FYRA FUNDAMENTALA TEOREM

Anders Tengstrand

Förord

Denna lilla skrift har tillkommit på grund av ett överskott av tid och av ett obotligt intresse för matematik. När man blir tillräckligt gammal – en bra bit över 80 år – kan man inte undervisa längre, förmågan att ge egna bidrag till den matematiska forskningen har sedan länge försvunnit och att ge sig på att skriva läroboksliknande alster känns orealistisk då man inte längre har kontakt med elever. Men det är svårt att på ålderns höst helt lämna det som så präglat ens liv och bara ägna sig åt social verksamhet, korsordslösning och TV-tittande. Om den rent fysiska rörelseförmågan avtar väsentligt minskar dessutom möjligheterna till diverse aktiviteter drastiskt. Det blir tid över till att bara sitta och låta tankarna fara. Till barn och barnbarn och barnbarnsbarn, till det bekymmersamma världsläget och till de praktiska problemen att få vardagen att fungera. Men också till det ämne som så dominerat mitt yrkesverksamma liv. Risken att tankarna far vilse är inte helt försumbar. För att få något konkret att göra beslöt jag mig för att skriva ner några funderingar kring matematik. Det skulle ge struktur åt vardagen och tankeverksamheten och vara ett slags arbete. När det var gjort skulle jag med gott samvete kunna ägna mig åt korsordslösande eller läsande eller TV-tittande eller dagdrömmeri.

Men vad skulle jag då skriva om? Jag vet inte hur men jag kom fram till att skriva om några viktiga teorem som finns med i de grundläggande kurserna i matematik som jag ägnat en stor del av mitt liv åt att undervisa. Jag skulle kunna reflektera över deras bakgrund, jag skulle bevisa dem, diskutera hur de tillämpas och ge en historik. Dessutom skulle jag ha med ett avsnitt där jag associerade fritt. Så tänkte jag och så fick det bli.

Jag fastnade för fyra satser: Pythagoras sats, aritmetikens fundamentalsats, algebrans fundamentalsats och analysens fundamentalsats. För att skapa någon form av enhetlighet tog jag mig friheten att ge Pythagoras sats tillnamnet geometrins fundamentalsats. Varje sats behandlas genom följande underrubriker: Vad säger satsen?, Hur bevisas den?, Tillämpningar, Historik och Reflektioner. Att satsen skulle formuleras och bevisas fann jag självklart. Mina erfarenheter som lärare har lärt mig att det är viktigt att för eleverna motivera de matematiska begreppen som jag inför och de teorier och metoder som jag lär ut. Det finns många sätt att göra det men för mig fanns det två huvudvägar. Vilken jag valde berodde till en stor del på studenternas bakgrund. Den ena är att visa att det finns problem utanför matematiken som leder till den matematik vi ska behandla. Den andra är att följa den historiska utvecklingen. Jag har fått två frågor av studenter och de har varit vägledande. Den ena är ”Vi har nu gjort definitioner, bevisat satser och löst

problem. Men varifrån kommer allt det här? Jag saknar den historiska dimensionen." och den andra "Vad ska vi ha allt detta till? Vem serieutvecklar på arbetstid?". Att diskutera hur satserna kan tillämpas och ge en kortfattad historik bakom dem kändes viktigt. Sedan ville jag också ta mig friheten att utifrån satserna låta tankarna sväva relativt fritt.

Naturligtvis har jag använt mig av litteratur men den består av de läroböcker jag använt som elev och lärare. Vissa fakta har jag kontrollerat på Internet. Bakgrundskällorna är av standardtyp och jag har därför inte med någon litteraturlista. Beviset för algebrans fundamentalsats är kanske ett undantag. Det har jag rekonstruerat från minnesbillder från mina studier för två betyg i Lund.

En fråga inställde sig. Vem skriver jag för? Naturligtvis i första hand för mig själv. Men jag tror att jag haft studenterna på de inledande basala kurserna i matematik på högskolenivå i tankarna. Jag känner mig på något sätt hemma där. De kurserna har jag undervisat på i decennier. För visst kan det behövas en del vad jag vill kalla matematikvana för att i detalj kunna följa delar av texten. Det gäller framför allt bevisen. Jag har inte vinnlagt mig om att tillrättalägga texten så att vem som helst kan förstå allting. Jag har heller inte lagt mig vinn om att definiera alla begrepp utan räknar med att läsaren kan göra sig en tillräckligt bra bild av dem. Vem som helst får naturligtvis läsa texten och kan ju hoppa över de delar som är alltför tekniska. Så har jag gjort många gånger då jag läst matematik. Läs så mycket ni vill och orkar!

Växjö nyårsdagen 2026
Anders Tengstrand

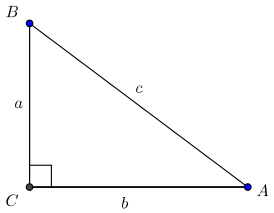
Pythagoras sats eller Geometrins fundamentalsats

Hjärnan i mig vrides,
När jag tänker på Euklides
och på de trianglarna
ABC och CDA.
Svetten ur min panna gnides
värre än på Golgata.
Carl Michael Bellman (1740-95)

Vad säger satsen?

För de flesta är matematik detsamma som räkning - ett antal algoritmer som man ska lära sig och lära sig tillämpa. Att det finns matematiska resultat och samband av mer generell natur är för de flesta obekant - möjligen med ett undantag, Pythagoras sats. Den finns på något sätt i det allmänna medvetandet. Den kan till exempel dyka upp i korsord. Vad kan det bero på? Kanske är det för att satsen är relativt enkel att formulera samtidigt som dess innehåll är förvånande. Kanske är det terminologin. Ord som ”katet” och ”hypotenusa” är egendomliga och lite fantasieggande.

Pyhagoras sats handlar om rätvinkliga trianglar och ger ett enkelt samband mellan deras sidor. De båda sidor som utgår från den räta



Figur 1: En rätvinklig triangel ABC med hypotenusan $AB = c$ och kateterna $AC = b$ och $BC = a$.

vinkeln kallas kateter och den tredje sidan kallas hypotenusa. Satsen säger följande:

Pythagoras sats *I en rätvinklig triangel är summan av kvadraterna på kateterna lika med kvadraten på hypotenusan.*

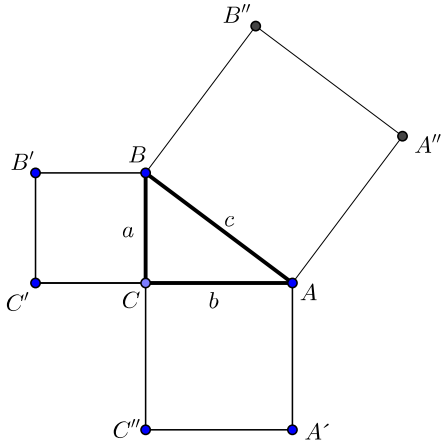
Om vi betecknar längderna av kateternas uttryckta i någon längdenhet med a och b och längden av hypotenusan med c så gäller alltså

$$a^2 + b^2 = c^2$$

och det är antagligen i denna algebraiska form som de flesta känner igen sig. Men man kan också se sambandet rent geometriskt som i figur 2.

Hur bevisas den?

Pythagoras sats ger ett samband mellan sidorna i en rätvinklig triangel som man knappast inser utan vidare. Det krävs någon form av bevis. Det finns många bevis av satsen och det finns böcker som presenterar omkring hundra sådana. I verket *Elementa* ger den grekiska matematikern Euklides (ca 325 – 265 f Kr) en systematisk framställning av den tidens kunskaper inom geometrin. Utifrån fem fundamentala påståenden som han accepterar utan bevis bygger han upp en logiskt sammanhängande teori där den tidens resultat presenteras. Ett av resultaten är naturligtvis Pythagoras sats och hans bevis ges längre fram. Ett något enklare

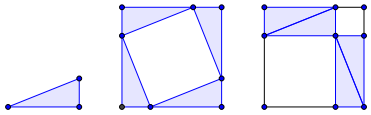


Figur 2: Pythagoras sats säger att summan av areorna av de båda mindre kvadraterna $BB'C'C$ och $CC''A'A$ med sidorna a respektive b är lika med arean av den större kvadraten $AA''B''B$ med sidan c.

bevis får vi genom att lägga pussel. som i figur 3. Pusslet förklaras i bildtexten.

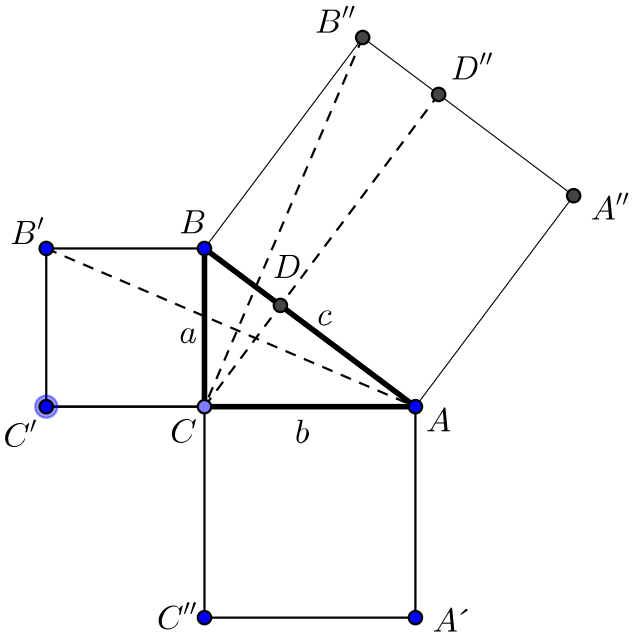
Detta bevis kände säkert Euklides till men han använder det inte i *Elementa*. Han väljer ett annat som är mer komplicerat. Man kan fråga sig varför? En gissning kan vara att de operationer i form av flyttningar som görs i det enklare beviset måste bevisas i *Elementas* anda och det kan vara komplicerat. Ett annat skäl kan vara att man kan se hur kvadraten på hypotenusan delas i två delar som motsvarar kvadraterna på kateterna.

Nu kan det vara dags att ge Euklides bevis för Pytharoras sats. I beviset använder sig Euklides av påståenden som tidigare bevisats nämligen att en arean av en triangel är hälften av arean av en rektangel med samma höjd och bas. Han använder sig också av begreppet kongruens. Två trianglar är kongruenta om motsvarande sidor och vinklar är lika stora. Han har tidigare visat att om två sidor och mellanliggande vinkel i den ena triangeln är lika med motsvarigheterna i den andra så är trianglarna kongruenta d.v.s. den återstående sidan och de båda övriga vinklarna är då automatiskt lika stora.



Figur 3: Vår rätvinkliga triangeln är längst till vänster. Vi gör fyra kopior av den och placerar dem som i figuren i mitten. Det bildas då två kvadrater. Den större har summan av kateterna som sida medan den mindres sida är lika med hypotenusan. Placera nu istället de fyra trianglarna i den större kvadraten som i figuren längst till höger. Kvadraten på hypotenusan är lika med det vita området i figuren i mitten, som är lika med hela kvadraten minus de fyra rätvinkliga trianglarna. Men summan av båda vita kvadraterna i den högra figuren är summan av kvadraterna på kateterna och den summan är också lika med den stora kvadraten minus summan av de fyra rätvinkliga trianglarna. Alltså är kvadraten på hypotenusan lika med summan av kvadraterna på kateterna.

Euklides bevis av Pythagoras sats. I beviset hänvisas till figur 4.
En rät linje genom C vinkelrät mot sidan AB skär AB i D och $A''B''$ i D''.
Kvadraten med sidan c delas av sträckan DD'' i två delrektanglar, $BB''D''D$ och $AA''D''D$.
Det visar sig att dessa har samma areor som kvadraterna på kateterna a respektive b och av det följer ju satsen. Varför är det så?
Triangeln $BB''C$ har basen BB'' och höjden $B''D''$. Dess area är alltså hälften av rektangeln $BB''D''D$:s.
Men triangeln $BB''C$ är kongruent med triangeln $BB'A$.
Sidorna BB' och BA i triangeln $BB'A$ är nämligen lika stora som BC respektive BB'' i triangeln $BB''C$. Vidare är vinklarna $B'BA$ och $B''BC$ lika stora eftersom båda är lika med vinkeln ABC plus en rät vinkel.
Men triangeln $B'BA$ har basen BB' och höjden BC och dess area är därför halva arean av kvadraten med sidan a.
Eftersom trianglarna $BB''C$ och BAC' är kongruenta har de samma area.
Den förstnämndas area är hälften av arean av rektangeln $BB''D''D$ och den andra är hälften av kvadraten med sidan a.
Alltså har rektangeln $BB''D''D$ samma area som kvadraten på sidan a.
På samma sätt visas att arean av rektangeln $AA''D''D$ är lika stor som arean av kvadraten på kateten b.



Figur 4:

Tillämpningar

Pythagoras sats säger att om vi känner två sidor i en rätvinklig triangel så kan vi beräkna den tredje. Det är uppenbart att den har tillämpningar inom områden som har med mätning av sträckor att göra. Det kan gälla geodesi, kartritning, navigering, astronomi och mekanik.

Att triangeln är rätvinklig innebär naturligtvis begränsningar. En slags generalisering är cosinusteoremet som säger att

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

där vinkeln C nu inte behöver vara rät. Satsen är central inom triangelgeometrin där de trigonometriska funktionerna cos, sin, tan och cot spelar huvudroller. Inom trigonometrin används ofta den trigonometriska ettan som säger att

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$$

Det sambandet kan om man så vill ses som en omskrivning av Pythagoras sats.

Pythagoras sats kan också användas för att konstruera en rät vinkel. Om man bildar en triangel med sidorna 3, 4 och 5 i någon längdenhet så blir den största vinkeln rät. Talen 3, 4 och 5 uppfyller ju sambandet

$$3^2 + 4^2 = 5^2.$$

Att därav dra slutsatsen att triangeln är rätvinklig följer emellertid inte omedelbart av Pythagoras sats. Den s.k. omvändningen till Pythagoras sats säger att om sidorna a, b och c i en triangel uppfyller

$$a^2 + b^2 = c^2$$

så är den vinkel som står mot sidan c rät. Vi har alltså bytt på förutsättning och slutsats. Omvändningen är enkel att bevisa om man en gång visat Pythagoras sats. Det sägs att de gamla egyptierna konstruerade räta vinklar med hjälp av trianglar med längderna 3, 4 och 5. Dessa trianglar kallas egyptiska.

Historik

Pythagoras, som gett namn åt vår sats, levde mellan 570 f.Kr. och 495 f.Kr. Han var en grekisk filosof och matematiker. Han var född på ön Samos där han också under en stor del av sitt liv ledde en filosofisk sekt. En av hans grundläggande teser var att tillvaron var uppbyggd av tal. Han såg bl.a. att tonerna från en svängande sträng förhåller sig som hela

tal. Hans världsåskådnng fick sig en törn då det visade sig att förhållandet mellan diagonalen och sidan i en kvadrat inte kan uttryckas med heltal med andra ord att $\sqrt{2}$ är irrationellt. Han och hans medarbetare var förmodligen de första som kunde ge ett bevis för Pythagoras sats. Det finns anledning att tro att hans bevis påminde om den pusselläggning vi beskrev i föregående avsnitt. Satsen var emellertid känd långt tidigare. Vi nämnde att i det forna Egypten använde man trianglar med sidorna 3, 4 och längdenheter för att konstruera en rätvinklig triangel. På en över tretusen år gammal lertavla från Babylonien, den s.k. Plimpton 322, finns en slags motsvarighet till våra trigonometriska tabeller och där användes en motsvarighet till Pythagoras sats.

Varför har då Pythagoras fått ge namn åt satsen? Vi har tidigare nämnt Eukides *Elementa* där den tidens geometriska kunskap presterades systematiskt. Utifrån några enkla påståenden s.k. postulat härleds de olika satserna med strikt logiska resonemang. *Elementa* har sedan dess varit normgivande för framställning av matematiska teori. Det var ett epokgörande verk och redan under antiken kom det att studeras och bearbetas av många matematiker. I det arbetet föll det sig förmodligen naturligt att ge viktiga satser namn. Och vår sats blev kanske benämnd efter Pythagoras för att hedra en av antikens mest berömda matematiker. *Elementa* och många andra av antikens skrifter översattes också till persiska under den s.k. islamiska guldåldern efter Romarrikets fall.

Några reflektioner

Enligt Pythagoras sats har en rektangel i planet med sidorna a och b diagonalen c där

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

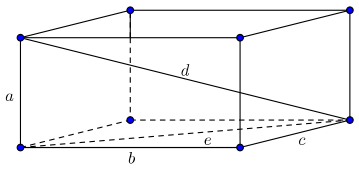
En slags motsvarighet i rummet får vi om betraktar en låda eller en rätvinklig parallellepiped med kanterna a, b och c. Rymddiagonalen d är då lika med

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

och det framgår av figur 5 med bildtext.

Genom att införa ett koordinatsystem med två respektive tre axlar kan man ange läget av varje punkt i planet och rummet genom talpar (x_1, x_2) respektive taltrupler (x_1, x_2, x_3). Ofta, kanske oftast, väljer man ett koordintatsystem där axlarna är vinkelräta och där enheter på axlarna. är desamma Om punkterna P och Q har koordinaterna (x_1, x_2) respektive (y_1, y_2)i ett sådant koordinatsystem så har sträckan PQ enligt Pyhagoras sats längden

$$d(P, Q)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$



Figur 5: Enligt Pythagoras sats är diagonalen e i den undre rektangeln lika med $\sqrt{b^2+c^2}$. Genom att än en gång använda Pythagoras sats nu på den rätvinkliga triangeln med sidorna a, e och d får vi att $d = \sqrt{a^2+e^2} = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Motsvarigheten i rummet är uppenbar. Om P och Q har koordinaterna (x_1, x_2, x_3) respektive (y_1, y_2, y_3)i så är

$$d(PQ) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(y_1-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}.$$

I många sammanhang kan det vara intressant att studera följder av n tal $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Det kan t.ex. gälla mätserier. Det ligger nära till hands att matematiskt studera ett rum som består av sådana n-tupler. Mängden av alla n-tupler $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ betecknas med $\mathbf{R^n}$. Planet och rummet motsvarar alltså $\mathbf{R^2}$ respektive $\mathbf{R^3}$. Vi har formler för avstånden mellan två punkter i planet och i rummet. Men vad skall vi mena med avståndet mellan två punkter i $\mathbf{R^n}$ om $n \geq 4$? Det är då rimligt att låta oss vägledas av avståndsformlerna i planet och rummet och helt enkelt definiera avståndet $d(P,Q)$ mellan $P = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ och $Q = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ som

$$d(P,Q) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2}.$$

Detta avståndsbegrepp kan inte åskådliggöras på samma sätt som avstånd i det tvådimensionella planet och i det tredimensionella rummet. Där härledde vi avståndsformeln med hjälp av Pythagoras sats och vi utgår från egenskaper hos geometriska begrepp som vi anser självklara eller som vi härlett. Det är den åskådliga geometrin som är grunden. Det nya avståndsbegreppet i $\mathbf{R^n}$ där $n \geq 4$ definieras rent algebraiskt och geometriska egenskaper som vi är vana vid och som knappast krävt något bevis måste nu visas. Ett exempel är den s.k. triangelolikheten

som säger att summan av två sidor i en triangel är större än eller lika med den tredje sidan. Likhet inträffar när triangeln är urartad och de tre hörnen ligger i rät linje. Om A, B och C är tre punkter så har vi att

$$d(B,C) \leq d(A,B) + d(A,C).$$

Den gäller i $\mathbf{R^n}$ även om $n \geq 4$ men den kräver ett bevis som måste vara algebraiskt. Ett sådant bevis är inte trivialt utan kräver en del fingerfärdighet.

Man kan gå ännu längre och på liknande sätt definiera avståndet mellan två funktioner. Antag t.ex. att $f(x)$ och $g(x)$ är två funktioner som är kontinuerliga på ett intervall $[a, b]$. Avståndet mellan de båda funktionerna kan då definieras genom

$$d(f,g) = \int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx.$$

Definitionen verkar vara ett rimligt mått på skillnaden mellan de båda funktionerna eftersom integralen kan uppfattas som en summa av oändligt många oändligt små tal. Men naturligtvis finns det flera mått som är rimliga t.ex. maximum av $|f(x) - g(x)|$ där x varierar mellan a och b eller

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

men det visar sig att det mått som i någon mening inspirerats av Pythagoras sats har stora fördelar. Det är i många sammanhang lättare att räkna med. Vi har här ett avståndsbegrepp i ett oändligtdimesionellt rum.

Generaliseringar från det tredimensionella rummet till rum av högre dimension är av stor betydelse i dagens matematik. Kvantmekanikens språk är rent matematiskt och beskrivs i oändligtdimensionella rum av funktioner där det avståndsbegrepp som inspirerats av Pythagoras sats är fundamentalt.

Pythagoras sats är gammal och användes av egyptier och babylonier. Den är höjdpunkten i den första boken i *Elementa*. I dagens matematik kan man se spår av den så snart avståndsbegreppet används även om det är abstrakt. Jag har därför tagit mig friheten att ge Pythagoras sats tillnamnet geometrins fundamentalsats.

Aritmetikens fundamentalsats

De hela talen skapade Gud. Allt annat är människans verk.
Leopold Kronecker (1823-91)

Vad säger satsen?

Aritmetikens fundamentalsats handlar om primtal och är central inom talteorin, ett område inom matematiken där man studerar egenskaper hos heltalen. De naturliga talen 1, 2, 3, ... är kanske de mest grundläggande begreppen inom matematiken och om vi till dem fogar talet 0 och de negativa talen $-1, -2, -3, \ldots$ får vi de hela talen. Det är naturligtvis av intresse att undersöka vilka egenskaper dessa tal har.

Ett viktigt begrepp inom talteorin är begreppet delare. Vi säger att heltalet d är en delare till heltalet a om det finns ett heltal b sådant att $a = bd$. Så är t.ex. talen 2, 3, 4 och 6 är delare till 12 eftersom $12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$.

Uppenbarligen är talen $1, -1, a$ och $-a$ alla delare till heltalet a eftersom $a = a \cdot 1 = (-a) \cdot (-1)$. Dessa delare brukar kallas triviala. De delare som inte är triviala kallas äkta delare. Ett heltal p är ett primtal om $p \geq 2$ och om p saknar äkta delare. Exempel på primtal är 2, 3, 5, 7 och 11. Det kan läsaren själv lätt kontrollera. Men hur är det 9007? Det innebär ett visst arbete att avgöra om det är ett ett primtal eller inte. I detta fallet är svaret: Ja, det är ett primtal. Men hur är det med 8007? Det är inte ett primtal.

Talteorin är ett område som studerades systematiskt redan under antiken. Euklides gav bl.a. ett bevis för att det finns oändligt många primtal. Ibland uppkommer primtalen parvis som två på varandra udda tal som 3,5 och 5,7 och 11,13. Det är ännu en öppen fråga om det finns oändligt många sådana primtalstvillingar eller ej. Inom talteorin finns jämfört med andra områden inom matematiken många frågor som är enkla att formulera men svåra att besvara.

Arimetikens fundamentalsats handlar om att skriva ett godtyckligt heltal som är större än eller lika med 2 som en produkt av primtal. Den lyder på följande sätt:

Aritmetikens fundamentalsats *Varje naturligt tal större än eller lika med 2 kan kan skrivas som en produkt av primtal och framställningen är entydig om man bortser från ordningen.*

Vi ger några exempel.

$$84 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 7 \text{ och } 8007 = 3\cdot 17\cdot 157 \text{ och } 8100 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5 = 2^2\cdot 3^2\cdot 5^2.$$

Vi noterar att om talet $n \geq 2$ själv är ett primtal som består produkten av bara en faktor. Det kan verka konstigt med ett sådant språkbruk men vi använder det här.

Det kan vara skäl att anmärka att om talet 1 hade räknats som primtal så hade entydigheten förlorats.

Om $n \geq 2$ är ett heltal så kan alltså n skrivas

$$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$$

där $p_1, p_2, \ldots, p_n$ är primtal. Om man samlar samman primtal som är lika så kan framställningen skrivas

$$n = q_1^{\alpha_1} \cdot q_2^{\alpha_2} \cdot \ldots q_m^{\alpha_m}$$

där $q_1, q_2, \ldots, q_m$ är olika primtal och $\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_m$ är naturliga tal.

I någon mening bygger alltså primtalen upp de naturliga talen. Läsaren kanske inte tycker att satsen är så revolutionerande. I motsats till vad som var fallet med Pythagoras sats tror de flesta på den utan att kräva bevis. Om man nu tillhör skaran av skeptiker och försöker genomföra ett bevis i Euklides anda visar det sig att det är är relativt lätt att visa att man kan skriva varje tal större än 2 som en produkt av primtal, men att visa entydigheten bjuder på betydligt större svårigheter. Vi ska i vårt bevis använda centrala satser och metoder inom talteorin och dessa har analogier inom andra delar av matematiken.

Hur bevisas den?

Som vi redan nämnt accepterar nog flesta med basala kunskaper i matematik aritmetikens fundamentalsats utan ett formellt bevis. De tror på den. Men det känns otillfredsställande att inte kunna förklara varför den gäller. Satsen innehåller två delar. Den ena säger att det går att skriva varje naturligt tal större än eller lika med 2 som en produkt av primtal. Den andra säger att det bara går på ett sätt om vi inte tar hänsyn till ordningen. Det visar sig, som vi tidigare nämnt, att den första delen kan visas genom ett relativt enkelt resonemang medan den andra är betydligt svårare. Och kanske har många en känsla av att här krävs någon form av bevis. Den känns när allt kommer omkring inte lika självklart.

Innan vi går in på beviset skriver vi upp två påståenden som följer direkt ur definitionen och som vi kommer att använda. Läsaren kan själv visa dem.

Antag att a, b, d och n är heltal.

1. Om d är delare till både a och b så är d också delare till summan $a + b$ och skillnaden $a - b$.

2. Om d är delare till a så är d också delare till na för varje heltal n.

Bevis av existensen

Vi börjar med att visa existensen - den enklare delen. Läsaren kanske själv inser att om vi först delar upp det aktuella talet i faktorer och sedan faktorerna i faktorer o.s.v. så måste vi till slut komma till en punkt då ingen av faktorerna kan delas upp mer - de är primtal. För att få en mer stringent formulering kan vi använda oss av en variant av induktionsprincipen som lyder som följer.

Induktionsprincipen Låt P_n vara ett påstående om ett heltal $n \geq n_0$. Då är P_n sant för alla $n \geq n_0$ om följande två villkor är uppfyllda:

1. P_n är sant för $n = n_0$

2. Om vi hypotetiskt antar att P_k är sant för alla heltal k sådana att $n_0 \leq k < n$ så är P_n också sant.

Antagandet i punkt 2 brukar kallas induktionsantagande.

I vårt fall är P_n påståendet att heltalet n kan skrivas som en produkt av primtal och $n_0 = 2$.

Eftersom 2 är ett primtal så kan det skrivas som en produkt av primtal med en faktor. Alltså är punkt 1 i induktionsprincipen uppfylld.
Antag nu att varje heltal mindre än n och större än eller lika med 2 kan skrivas som en produkt av primtal. Om n är ett primtal är vi färdiga. Om n inte är ett ett primtal så kan det skrivas $n = a \cdot b$ där a och b är heltal och $1 < a < n$ och $1 < b < n$. Enligt induktionsantagandet är både a och b produkter av primtal och alltså är också $n = a \cdot b$ det.
Alltså är också punkt 2 i induktionsprincipen uppfylld och vi har visat att varje heltal $n \geq 2$ kan skrivas som en produkt av primtal.

Bevis av entydigheten

Det kanske vanligaste sättet att visa entydigheten av en framställning är att anta att det finns flera framställningar och sedan visa att de i själva verket är desamma. Så ska också vi göra. Men det visar sig att för att kunna dra de avgörande slutsatserna krävs att vi först härleder ett antal viktiga egenskaper hos heltalen.

En av de mest grundläggande satserna är divisionsalgoritmen som innebär att man kan införa begreppen kvot och rest vid division av två naturliga tal. Den lyder som följer.

Divisionsalgoritmen Om a och b är två naturliga tal så finns det heltal q och r sådana att

$$a = b \cdot q + r$$

där $q \geq 0$ och $0 \leq r < b$.

Vi kallar q för kvoten och r för resten då a divideras med b.

Om vi dividerar 17 med 5 har vi $17 = 5 \cdot 3 + 2$. Kvoten är 3 och resten 2 och kanske många minns att de gjorde sådana räkningar redan i lågstadiet.

Observera att b är en delare till a då och endast då resten $r = 0$.

Beviset är relativt enkelt. Om $a < b$ så kan vi välja $q = 0$ och $r = a$. Antag att $a \geq b$. Bilda följden $a - b, a - 2b, a - 3b, \ldots$. Eftersom b är ett naturligt tal så är $b \geq 1$ och då blir talen i följden till slut negativa. Låt nu q vara det största tal n för vilket $a - nb \geq 0$. Då är alltså $a - qb \geq 0$ men samtidigt är $a - (q+1)b < 0$. vilket ger att $a - qb < b$. Om vi sätter $r = a - bq$ följer satsen.

Den största gemensamma delaren till två naturliga a och b visar sig ha stor betydelse inom talteorin Talen a och b har minst två gemensamma

delare nämligen 1 och -1. Antalet gemensamma delare är ändligt och därför finns en största sådant och vi betecknar det med med $\gcd(a, b)$ [1]. Om a och b inte har några äkta gemensamma delare så är $\gcd(a, b) = 1$ och vi säger då att a och b är relativt prima.

Det visar sig att man kan bestämma största gemensamma delaren med hjälp av upprepad användning av divisionsalgoritmen. Vi antar att vi valt beteckningar så att $a \geq b$. Om $a = b$ så är naturligtvis $\gcd(a, b) = a = b$ och vi utgår från att $a > b$. Det finns enligt divisionsalgoritmen naturliga tal q och r sådana att

$$a = bq + r \text{ där } 0 \leq r < b.$$

Om $r = 0$ så är b delare till a och då är $\gcd(a, b) = b$. Om $r > 0$ använder så använder vi divisionsalgoritgmen på nytt och delar b med r och får

$$b = rq_1 + r_1 \text{ där } 0 \leq r_1 < r.$$

Om $r_1 = 0$ så slutar vi här. Om $r_1 > 0$ använder vi divisionsalgoritmen igen och får

$$r = r_1q_2 + r_2 \text{ där } 0 \leq r_2 < r_1.$$

Om $r_2 = 0$ slutar vi annars använder på nytt vi divisionsalgoritmen och dividerar r_1 med r_2 o.s.v. Eftersom resterna avtar strängt och alla är större än eller lika med 0 så måste till slut en av resterna vara lika med noll och vi betecknar den med r_{n+1}. Vi har alltså sammanfattningsvis att

$$\begin{aligned}
a &= bq + r \\
b &= rq_1 + r_1 \\
r &= r_1q_2 + r_2 \\
&\vdots \\
r_{n-2} &= r_{n-1}q_n + r_n \\
r_{n-1} &= r_nq_{n+1} + r_{n+1}
\end{aligned}$$

där

$$b > r > r_1 > r_2 > \ldots > r_n > r_{n+1} = 0.$$

Detta räkneschema kallas **Euklides algoritm**.
Det visar sig att den sista resten r_n som är större än noll är lika med den största gemensamma delaren $\gcd(a, b)$ till de naturliga talen a och b. Vi formulerar det som en sats.

[1] greatest common divisor

Sats Om a och b är två naturliga tal så är $\gcd(a, b)$ lika med den första icke-försvinnande resten som uppkommer då Euklides algoritm tillämpas på a och b.

Vi visar först att r_n är en gemensam delare till a och b. Eftersom $r_{n-1} = r_n q_n$ så är r_n delare till r_{n-1}. Men då är också r_n delare till $r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$. Vi följer på detta sätt Euklides algoritm nerifrån och upp och kan successivt sluta oss till att r_n delar $r_{n-1}, r_{n-2}, \ldots, r_2, r_1, r, b$ och a. Alltså är r_n en gemensam delare till a och b.

Att r_n är den största av de gemensamma delarna följer av följande resonemang. Antag att d är en gemensam delare till a och b. Där är d också en delare till $r = a - bq$. Om vi följer Euklides algoritm uppifrån och ner få vi att d är delare till $r, r_1, r_2, \ldots r_n$. Alltså delar d taler r_n och därmed gäller att $d \leq r_n$. Alltså måste r_n vara dem störta gemensamma delaren till a och b d.v.s. $r_n = \gcd(a, b)$.

En typ av problem ger upphov till s.k. **diofantiska ekvationer**. Låt oss ge ett exempel. Antag att vi har hundra kronor och att vi vill köpa två olika sorters godis för hela hundralappen. De kostar 5 respektive 8 kronor per styck. Hur många ska vi välja av de båda sorterna? Vi antar att vi väljer x stycken av den billigare sorten och y av den dyrare. Vi får då att

$$5x + 8y = 100$$

där x och y är naturliga tal. Vi ser genom att pröva oss fram att vi kan välja $x = 12$ och $y = 5$ men också $x = 4$ och $y = 10$. Ekvationen har alltså flera lösningar.

Studiet av diofantiska ekvationer

$$ax + by = c$$

där a, b och c är givna heltal är är ett centralt område inom grundläggare talteori. Vi vill bestämma heltalslösningar x och y. Finns det alltid sådana? Kan det finnas fler än en? Hur bestämmer man x och y? Vi ska inte gå igenom hela teorin utan koncentrerar oss på de resultat som är relevanta för beviset av aritmetikens fundamentalsats. Vi kan emellertid lätt konstatera att en diofantisk ekvation inte behöver ha någon lösning. I ekvationen $2x + 6y = 13$ är vänsterledet ett jämnt tal hur vi än väljer heltalen x och y medan högerledet är ett udda tal. I vårt inledande exempel $15x + 20y = 100$ såg vi att det kan finnas flera lösningar. Om vi tillåter även negativa x och y visar det sig att den har oändligt många lösningar.

Med hjälp av Euklides algoritm kan vi visa följande sats som visar sig mycket användbar i många sammanhang inte minst för beviset av aritmetikens fundamentalsats.

Sats Om a och b är två naturliga tal så finns heltal x och y sådana att

$$ax + by = \gcd(a, b).$$

Vi utnyttjar, som vi annonserade, Euklides algoritm och har att $\gcd(a, b) = r_n$. Vi ska nu försöka skriva r_n som $ax + by$ där x och y är heltal. Vi går nerifrån och upp i Euklides algoritm och får till en början

$$r_n = r_{n-2} - r_{n-1}q_n = r_{n-2} - (r_{n-3} - r_{n-2}q_{n-1})q_n.$$

Alltså är

$$r_n = x_{n-2}r_{n-2} + y_{n-3}r_{n-3}$$

där

$$x_{n-2} = 1 + q_nq_{n-1} \text{ och } y_{n-3} = -1$$

är heltal. Fortsätter vi uppåt i Euklides algoritm kan vi ersätta r_{n-2} med $r_{n-4} - r_{n-3}q_{n-2}$ och ser att vi kan skriva

$$r_n = x_{n-3}r_{n-3} + y_{n-4}r_{n-4}$$

där x_{n-3} och y_{n-4} är heltal. Vi fortsätter på detta sätt och får till slut att

$$r_n = ax + by$$

där x och y är heltal. Satsen är visad.

Divisionsalgoritmen, Euklides algoritm och grundläggande teori för diofantiska ekvationer är centrala i den elementära talteorin. Med hjälp av de resultat vi härlett inom dessa områden skal vi formulera en sats som är av avgörande betydelse för att visa entydigheten av primtalsframställningen i aritmetikens fundamentalsats. Vi kallar den för en hjälpsats eller ett lemma.

Hjälpsats Antag att a och b är naturliga tal och att p är ett primtal. Om p är en delare till produkten ab så är p delare till minst ett av talen a och b.

Beviset bygger på den sats om diofantiska ekvationer som vi nyss visat.

Om p är delare till a så är vi färdiga. Antag alltså att p inte är en delare till a. Då måste den största gemensamma delaren $\gcd(a, p) = 1$

d.v.s. a och p är relativt prima. Enligt den sats vi nyss visat finns då heltal x och y sådana att

$$ax + py = 1.$$

Multiplicera båda leden i ekvationen med b. Vi får då att

$$abx + pby = b.$$

Enligt förutsättningen är p delare till ab därmed också till abx. Men p är också delare till pby. Då är p delare till summan $abx + pby = b$. Hjälpsatsen är visad.

Vi kan nu visa entydigheten i aritmetikens fundamentalsats. Antag att $a \geq 2$ är ett naturlig tal och att det kan framställas på två sätt som en produkt av primtal. Vi har alltså att

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_m = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$$

där $p_1, p_2, \ldots, p_m$ och $q_1, q_2, \ldots q_n$ är primtal. Vi antar också att $m \leq n$.

Vi sätter $a = q_1 a_1$ där $a_1 = q_2 \cdot \ldots \cdot q_n$. Primtalet p_1 är en delare till $a = q_1 a_1$ och enligt hjälpsatsen är det då en delare till minst ett av talen q_1 och a_1. Om p_1 är en delare till q_1 så är $p_1 = q_1$ eftersom båda talen är primtal. Om p_1 inte är en delare till q_1 så är p_1 delare till a_1. Vi kan nu upprepa resonemanget och får att p_1 är en delare till q_2 eller till $q_3 \cdot \ldots \cdot q_n$. Om p_1 är en delare till q_2 så är $p_1 = q_2$ eftersom båda är primtal. Om inte så är p_1 en delare till $q_3 \cdot \ldots q_n$. Vi fortsätter på samma sätt och kan så småningom dra slutsatsen att p_1 måste vara lika med ett av primtalen $q_1, q_2, \ldots, q_n$.
Det första tal q_j som vi identifierat med p_1 kallar vi q_1 och gör alltså en omnumrering. Vi har då att

$$p_2 \cdot \ldots \cdot p_m = q_2 \cdot \cdots \ldots \cdot q_n.$$

Med samma resonemangen som förut kan vi successivt konstatera att till slut kan varje primtal p_j i vänsterledet identifieras med ett primtal q_j i högerledet. Vidare kan inte $n > m$ för då skulle

$$1 = q_{m+1} \cdot \ldots \cdot q_n$$

vilket är orimligt eftersom högerledet uppenbarligen är större än eller lika med 2. Entydigheten av primtalsfaktoriseringen av ett naturligt tal större än eller lika med 2 är visad.

Vägen till det fullständiga beviset av aritmetikens fundamentalsats är lång och bygger på centrala resultat inom elementär talteori som i sin tur kräver bevis. Man kan, som vi tidigare nämnt, fråga sig varför man överhuvudtaget behöver göra beviset. De flesta tror ändå på satsen. Naturligtvis finns i matematiken ett krav på formella bevis. Det är något som kännetecknar ämnet. Men vägen till beviset leder också till större förståelse av de naturliga talen - de mest fundamentala begreppen inom matematiken.

Tillämpningar

Vilka tillämpningar finns det då av aritmetikens fundamentalsats? Man kan lika gärna fråga vilka tillämpningar det finns av talteori? Inom talteorin är satsen så central att man inte kan komma ifrån den om man arbetar med problem av talteoretisk natur. Har då talteorin några tillämpningar i det vi vill kallar verkligheten och som ligger utanför den rena matematiken.

I antiken var talteoretiska problemställningar högst relevanta för några av filosoferna och då går tankarna i första hand till Pythagoras som ansåg att de hela talen utgjorde grundstenarna i universum. Grundläggande resultat inom talteorin var kända under denna epok och det utvecklades en sammanhängande teori för området. Men längre fram, efter renässansen, när naturvetenskaperna framför allt fysiken gjorde sitt genombrott kom andra områden inom matematiken i förgrunden. Talteori ansågs nog av många vara en verksamhet som i och för sig har estetiska kvaliteter men som inte har med ”verkligheten” att göra. Den kunde inte användas för att beskriva naturvetenskapliga fenomen och bidrog inte heller till att utnyttja de naturvetenskapliga rönen för att utveckla en teknik som kunde tjäna mänskligheten. Den kanske mest framstående talteoretikern under 1600-talet var Pierre de Fermat (1607-65). I en berömd korrespondensen mellan honom och Blaise Pascal (1623-62) vill han intressera Pascal för talteoretiska problem. Men Pascal är kallsinnig och vill inte ägna sin dyrbara tid till sådana onyttiga ting. Fermat var tydligen av en annan mening. Kanske hade det att göra med att Fermat till yrket var jurist och att matematiken var hans hobby. På sin fritid kan man ta sig rätten att ägna sig åt matematiska spetsfundigheter även om de inte har tillämpningar. Det skulle ändra sig under 1700- och 1800-talen då giganter som Leonhard Euler (1707-83) och Carl Friedrich Gauss (1777-1855) gav viktiga bidrag till talteorin. Gauss kallade talteorin för Matematikens drottning. Men några egentliga tillämpningar utanför matematiken fanns knappast.

Det är först på senare tid som talteorin har blivit ett viktigt verktyg

inom områden som berör gemene man. Det har att göra med den nya informationsteknologin och dess krav på säkerhet. Kodning och kryptering är områden som varit aktuella i århundraden och då främst inom krigföring och diplomati men de hade knappast haft någon större anknytning till matematiken. Idag är kryptering och kodning viktiga för stora delar av samhället och matematiken har blivit ett allt viktigare redskap för att utveckla säkra men samtidigt hanterbara system. Vissa kryptosystem kräver t.ex. att man kan konstruera stora primtal och satser inom talteorin, inte minst de vi nyss visat, spelar en stor roll. Ny teknologi har gett upphov till en ny gren av matematiken som kallas diskret matematik och i den är talteori en central del jämte t.ex. kombinatorik, formell logik och mängdlära.

När vi tänker på tillämpningar av matematik så finns det underförstått ett slags nyttotänkande. Matematiken skall hjälpa oss att lösa problem i verkligheten utanför matematiken. Men matematiken är ju en del av verkligheten och matematiska problem kan vara utmanande, stimulerande och fantasieggande. Det har ofta gett upphov till glädje av att ha löst dem, frustration över att inte kunna lösa dem och fascination av själva problemställningarna. De har berört många människor. Ett problem som sticker ut är det som kallas Fermats gåta och som har utmanat matematiker, professionella och amatörer, under århundraden. Det lyder: Finns det positiva heltal x, y och z sådana att

$$x^n + y^n = z^n$$

om $n \geq 3$ är ett heltal. Problemet formulerades av Fermat år 1637 och löstes 1995 av den brittiska matematikern Andrew Wiles (1953-). Svaret är: Nej! Som så många andra matematiska problem, stora som små, har det engagerat människor och stimulerat deras tankeverksamhet. Kanske kan man kalla detta ett slags nytta?

Historik

Den som först formulerade aritmetikens fundamentalsats var Carl Friedrich Gauss i hans berömda verk *Disquisitones Arithmeticae* eller på svenska *Aritmetiska undersökningar* från 1798. Det är den första systematiska framställningen av talteorin sedan antiken. Som vi redan sett var talteorin då en viktig del av matematiken. För Pythagoras som levde på 500-talet före Kristus var talen de naturliga talen de grundläggande elementen i universum. Euklides, som levde 200 år senare, ägnar talteorin en stor del av hans *Elementa*. Det kan vara på sin plats att säga ytterligare några ord om *Elementa* som än idag står som modell för matematisk framställning. Vi har tidigare nämnt att från ett antal postulat

och axiom som förutsätts sanna visar Euklides genom logisk deduktion ett stort antal då kända resultat. Verket består av tretton böcker eller kapitel och handlar väsentligen om geometri. Men tre böcker ägnas åt talteori även om språket är geometriskt något som innebär att framställningen känns omständlig. Algebran som vi använder nu fanns inte då. Euklides formulerar och bevisar flera av de satser vi använde när vi bevisade entydigheten i aritmetikens fundamentalsats. Mer än femhundra år efter Euklides levde den grekiske matematikern Diofantos. Hans stora verk är *Arithmetika* från omkring 250 e.Kr. I den bröt han mot den geometriska traditionen i grekisk matematik. Han studerade som verkets titel anger talen och han använde symboler på ett sätt som leder tanken till vår algebra - men vägen dit blev lång. Det tog över tusen år innan den algebra som vi känner igen oss i etablerades. Det är i *Arithmetika* som Diofantos introducerar den typ av ekvationer som vi idag kallar diofantiska.

Gauss formulerade satsen precis som vi har gjort det. Han bevisar den men i beviset skriver han att det är mer eller mindre uppenbart att en faktorisering är möjlig men att man utan att ha reflekterat över det också antagit att den var entydig. Han bevisar entydigheten men inte på det sätt vi gjort. Satsen är central för hans framställning av talteorin och han härleder systematiskt viktiga resultat från flera av den tidens etablerade matematiker och han härleder också nya.

Idag är, som i Gauss *Disquisitones Arithmeticae*, aritmetikens fundamentalsats central i de flesta grundläggande läroböcker i talteori. Beviset är i regel detsamma som vårt.

Några reflektioner

Flera av de satser som leder fram till vårt bevis av aritmetikens fundamentalsats finns, som vi tidigare nämnt, i geometrisk form redan i Euklides *Elementa*. Det visar sig att samma typ av satser finns inom andra delar av matematiken. Det finns en divisionsalgoritm för klasser av polynom och därmed en motsvarighet till Euklides algoritm. Begreppen delare och största gemensamma delare finns också i teorin för polynom. Största gemensamma delaren till två polynom kan på samma sätt som i talteorin bestämmas med Euklides algoritm. Man kan definiera primpolynom och visa en slags motsvarighet till aritmetikens fundamentalsats. Varje polynom kan bortsett från ordningen skrivas som en produkt av primpolynom. Vad menar vi då med polynom?

När vi säger polynom menar vi uttryck av formen

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0.$$

Om $a_n \neq 0$ säger vi att polynomet $f(x)$ har graden n och vi betecknar den med grad $f(x)$. Det polynom vars alla koefficienter är lika med 0 kallas nollpolynomet och betecknas med 0. Det tilldelas inget gradtal.

Vi kan studera olika klasser av polynom beroende på koefficienterna $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1$ och a_0. Vi kan bestämma oss för att studera polynom där koefficienterna är komplexa tal eller begränsa oss till de med reella tal. I vissa sammanhang är det kanske relevant att låta koefficienterna vara rationella tal och i andra hela tal. Vi inför beteckningen $\mathbf{C}[x], \mathbf{R}[x], \mathbf{Q}[x]$ och $\mathbf{Z}[x]$ för mängden av alla polynom där koefficienterna är komplexa tal, reella tal, rationella tal respektive heltal.

Hur ser då divisionsalgoritmen ut i t.ex. $\mathbf{C}[x]$? Vi låter $f(x) \neq 0$ och $g(x) \neq 0$ vara två polynom i $\mathbf{C}[x]$. Då finns polynom $q(x)$ och $r(x)$ i $\mathbf{C}[x]$ sådana att

$$f(x) = g(x)q(x) + r(x)$$

där $r(x) = 0$ eller grad $r(x) <$grad $g(x)$.

Beviset påminner om beviset för divisionsalgoritmen för hela tal. Vi subtraherar från $f(x)$ successivt multipler av $g(x)$ till dess vi får ett polynom som antingen har lägre grad än $g(x)$ eller som är lika med nollpolynomet. Divisionsalgoritmen gäller också för t.ex. $\mathbf{R}[x]$ och $\mathbf{Q}[x]$. Därmed gäller den inte för $\mathbf{Z}[x]$. Det visas av följande exempel.

Antag att vill dividera $f(x) = 3x^3 + 1$ med $g(x) = 2x^2 + 1$. Båda är polynom i $\mathbf{Z}[x]$. Om divisionsalgoritmen skulle gälla i $\mathbf{Z}[x]$ så skulle $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ där $r(x)$ är lika med nollpolynomet eller har graden mindre är grad $g(x) = 2$. Det betyder att $r(x) = ax + b$ där a och b är hela tal. Vidare måste polynomet $q(x)$ ha graden 1 eftersom $f(x) = q(x)g(x) + r(x)$ skall ha graden 3. Då är

$$3x^3 + 1 = (2x^2 + 1)(cx + d) + ax + b$$

där a, b, c och d är heltal. Koefficienten för x^3 i högerledet är $2c$ medan den i vänsterledet är lika med 3. Alltså måste $c = 3/2$ som inte är ett heltal.

Om vi försöker dividera två polynom i $\mathbf{Z}[x]$ med varandra så hamnar vi utanför $\mathbf{Z}[x]$. Om vi försöker kopiera beviset i t.e.x $\mathbf{C}[x]$ så kommer vi till en punkt då vi måste använda oss av rationella tal. De hela talen räcker inte till.

Divisionsalgoritmen fungerar alltså i $\mathbf{C}[x], \mathbf{R}[x]$ och $\mathbf{Q}[x]$. Vi kan som i talteorin härleda Euklides algoritm, definiera största gemensam delare $\gcd(f(x), g(x))$ samt visa att det finns polynom $p(x)$ och $q(x)$ sådana att $f(x)p(x) + g(x)q(x) = \gcd(f(x), g(x))$. Vidare kan vi, som vi tidigare nämnt, visa en motsvarighet till algebrans fundamentalsats.

De hela talen, $\mathbf{Z}$, och polynomen med koefficienter i $\mathbf{C}, \mathbf{R}$ respektive $\mathbf{Q}$ har gemensamma egenskaper trots att de är helt olika till sin

ursprungliga natur. Detta leder tankarna till möjligheter att skapa någon form av abstrakta begrepp där man en gång för alla bevisar satser som sedan kan användas på speciella objekt som t.ex. $\mathbf{Z}$ eller $\mathbf{C}[x]$. Man ser konturerna av det vi idag kallar abstrakt algebra där begrepp som grupp, ring och kropp spelar en stor roll.

Vi ger några kommentarer kring begreppet ring. En **ring** A är en mängd av element där det finns två operationer $+$ och $\cdot$ sådana att om a och b är två element i A så är också $a+b$ och $a \cdot b$ element i A. De associativa lagarna $(a+b)+c = a+(b+c)$ och $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ skall gälla för alla a, b och c i A. Additionen $+$ ska vara kommutativ d.v.s. $a+b = b+a$ för alla a och b i A. Det ska också finnas ett element som vi kallar 0 sådant att $a+0 = 0+a = a$ och till varje a i A ska finnas ett element i A som vi kallar $-a$ som uppfyller $a+(-a) = 0$. Multiplikationen kan vara men behöver inte vara kommutativ. I vissa ringar finns ett element 1 som vi kallar etta och som uppfyller $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ för alla a i ringen.

Uppenbarligen är $\mathbf{Z}, \mathbf{C}[x], \mathbf{R}[x], \mathbf{Q}[x]$ och $\mathbf{Z}[x]$ alla kommutativa ringar med etta. De jämna heltalen är en kommutativ ring men utan etta och mängden av alla 2×2- matriser är en icke-kommutativ ring. Varje påstående som man kan visa för en kommutativ ring med etta gäller alltså för de fem förstnämnda ringarna. En speciell typ av ringar kallas euklidiska. Där finns ett mått som anger storleken av varje element skilt från noll och man har en divisionsalgoritm. Ringarna är $\mathbf{Z}, \mathbf{C}[x], \mathbf{R}[x]$ och $\mathbf{Q}[x]$ är euklidiska men inte $\mathbf{Z}[x]$.

Man kan på detta sätt införa matematiska begrepp definierade genom deras egenskaper och på det viset ge matematiken en struktur som känns mer abstrakt. Den delen av matematiken kallas abstrakt algebra. En av de mest tongivande matematikerna inom det området var Emmy Noether (1882-1935), som var judinna och som huvudsakligen verkade i Tyskland. En av de alltför få kvinnliga matematiker som på ett avgörande sätt påverkat matematikens utveckling.

Algebrans fundamentalsats

Algebran är aritmetikens metafysik
John Ray (1627-1705)

Vad säger satsen?

Algebran har sitt ursprung i ekvationslösning. Algebrans fundamentalsats handlar om rötter till ekvationer av typen $f(x) = 0$ där $f(x)$ är ett polynom. I grundskolan lär vi oss lösa förstagradsekvationer och på gymnasiet andragradsekvationer. Då vi under skoltiden oftast begränsar oss till reella tal så har inte alla andragradsekvationer lösning. Typexemplet är ekvationen $x^2 + 1 = 0$. Kvadraten på ett reellt tal är ju alltid större än eller lika med 0 och kan aldrig bli lika med -1. Genom att lägga till ett tänkt tal i som har egenskapen $i^2 = -1$ bildar vi ett nytt talområde som vi kallar de komplexa talen. Det består av alla tal $a + ib$ där a och b är reella tal. Vi kan på ett naturligt sätt addera, subtrahera, multiplicera och dividera dem och de flesta räknelagar för reella tal, som vi vant oss vid att använda, gäller också för komplexa tal.

Genom att införa talet i kan vi nu lösa inte bara ekvationen $x^2+1 = 0$ utan varje andragradsekvation där koefficienterna t.o.m. är komplexa tal. Nu visar det sig att varje ekvation av högre grad än två också har en lösning bland de komplexa talen. Vi behöver alltså inte tillfoga ytterligare tal för att t.ex. en ekvation av grad 3 eller 4 o.s.v. ska ha en lösning. Det är anmärkningsvärt. Den som först visade det var Carl Friedrich Gauss

och han gjorde det i sin doktorsavhandling 1799. Beviset innehöll en del luckor som han senare kunde täppa till. Satsen lyder på följande sätt:

Algebrans fundamentalsats *Varje polynom med komplexa koefficienter vars grad är större än eller lika med 1 har minst ett komplext nollställe.*

Observera att satsen bara säger att det existerar ett nollställe. Den talar inte om hur man bestämmer det. När det gäller ekvationer av första och andra graden har vi lärt oss hur man kan göra. Under 1500-talet utvecklade man generella metoder för att lösa tredje- och fjärdegradsekvationer genom att använda de fyra räknesätten och rötter av ordningen 2, 3 och 4. Men för ekvationer av graden fem och högre finns det inte någon sådan metod. Men att visa det är en lång och ganska besvärlig historia som bl.a. utnyttjar resultat inom den abstrakta algebran som vi berörde i avsnittet om aritmetikens fundamentalsats.

Vi vet alltså att ett polynom

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$

där $a_0, a_1, \ldots, a_n$ är komplexa tal, $a_n \neq 0$ och $n \geq 1$ har minst ett komplext nollstället x_1. Vi kan använda faktorsatsen, som är bekant från gymnasiet, och skriva $f(x) = (x - x_1)g(x)$ där $g(x)$ är ett polynom av graden $n-1$. Vi kan använda algebrans fundamentalsats på $g(x)$ om dess grad är större än eller lika med 1 och finna en ny rot x_2 och kan skriva $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)h(x)$ med ett nytt polynom $h(x)$ och fortsätta på detta sättet till dess vi får ett polynom av graden 1. Vi har alltså i verkligheten inte bara en utan n nollställen till vårt polynom $f(x)$. Några av dessa kan vara lika. Sammanfattningsvis kan vi skriva

$$f(x) = c(x - x_1)^{\alpha_1} \cdot (x - x_2)^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot (x - x_k)^{\alpha_k}$$

där $x_1, x_2, \ldots, x_k$ är olika komplexa tal, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ är naturliga tal sådana att $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k = n$ och $c \neq 0$ är ett komplext tal. Uppenbarligen är $c = a_n$. Framställningen för onekligen tankarna till primtalsfaktoriseringen av naturliga tal. Det svåra steget att visa denna faktorisering av polynom är att visa att varje polynom med komplexa koefficienter och vars grad är minst ett verkligen har ett komplext nollställe. Resten följer relativt enkelt av faktorteoremet.

Bevis av algebrans fundamentalsats

Det finns många bevis för algebrans fundamentalsats. Gauss bidrog själv med några förutom det ursprungliga från hans doktorsavhandling. En

del av bevisen utnyttjar grundläggande satser inom teorin för analytiska funktioner - ett område inom matematiken som ligger på en relativt hög nivå - och blir då mycket korta Vi ska ge ett bevis som endast förutsätter grundläggande kunskaper om komplexa tal. Vi kommer också att använda oss av den sats som säger att en reellvärd funktion $F(x, y)$ som är kontinuerlig på ett slutet begränsat område D i $\mathbf{R}^2$ antar sitt minsta värde i någon punkt i D. En sats som är lätt att tro på men som är relativt svår att bevisa.

Vi betraktar polynomet

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

med komplexa koefficienter där $a_n \neq 0$ och $n \geq 1$.[2] Vi noterar att $f(0) = a_0 \neq 0$ för annars är 0 ett nollställer till $f(z)$ och det finns inget att bevisa.

Vi visar först att om $z = x + iy$ så är $g(x, y) = |f(z)| > 0$ för $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geq R$ om talet R är tillräckligt stort. Ett eventuellt nollställe måste då ligga i cirkeln $|z| \leq R$.

Vi gör en enklare omskrivning och får

$$g(x, y) = |f(z)| = |z|^n |a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \ldots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n}|.$$

En version av triangelolikheten[3] ger att

$$g(x, y) \geq |z|^n ||a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \ldots - \frac{|a_1|}{|z^{n-1}|} - \frac{|a_0|}{|z^n|}|.$$

Den andra faktorn i högerledet går mot det strängt positiva talet $|a_n|$ då $|z|$ går mot ∞ vilket innebär att högerledet går mot ∞ då $|z|$ går mot ∞. För tillräckligt stora $|z|$ är alltså högerledet strängt större än t.ex. $|f(0)|$. Alltså har vi att

$$g(x, y) = |f(z)| > |f[0]| > 0$$

för alla z sådana att $|z| \geq R$ där R är tillräckligt stort.

Uppenbarligen är funktionen $g(x, y) = |f(z)|$ kontinuerlig och enligt den sats om kontinuerliga funktioner som vi nämnt ovan antar funktionen $g(x, y) = |f(z)|$ sitt minsta värde i cirkeln $|z| \leq R$ i en punkt w där $|w| \leq R$. Eftersom $|f(z)| > |f(0)|$ då $|z| = R$ så måste $|w| < R$. Vi antar att $|f(w)| > 0$ och visar att i så fall finns ett w' sådant att $|f(w')| < |f(w)|$ och därför måste vårt antagande om att $|f(w)| > 0$ vara felaktigt. Alltså är $|f(w)| = 0$ och polynomet $f(z)$ har ett nollställe w.

[2] I detta avsnitt är det praktiskt att använda z som variabel istället för x.

[3] $|u \pm v| \geq ||u| - |v||$ för alla komplexa tal u och v.

För att visa att det finns ett komplext tal sådant att $|f(w')| < |f(w)|$ betraktar vi $f(z)$ i en punkt $w + re^{i\theta}$ för små $r > 0$.

$$f(w+re^{i\theta}) = a_n(w+re^{i\theta})^n + a_{n-1}(w+re^{i\theta})^{n-1} + \ldots + a_1(w+re^{i\theta}) + a_0$$

Vi utvecklar nu parenteserna i högerledet och observerar att summan av de termer som inte innehåller en faktor r är lika med $f(w)$ och vi har

$$f(w+re^{i\theta}) = f(w) + b_{n-1}r^{n-1}e^{i(n-1)\theta} + b_{n-2}r^{n-2}e^{i(n-2)\theta} + \ldots + b_k r^k e^{ik\theta}$$

där $b_k, b_{k+1}, \ldots, b_{n-1}$ inte beror av r och θ. Vidare är $b_k \neq 0$ och $k \geq 1$.

Vi ska nu välja θ på lämpligt sätt så att

$$|f(w + re^{i\theta}| < |f(w)|$$

om r är tillräckligt litet. Vi observerar att för tillräckligt små r så gäller att $|w + re^{i\theta}| < R$. Vidare domineras de $n - 1 - k$ sista termerna av den sista $b_k r^k e^{ik\theta}$. Vi gör följande enkla omskrivning:

$$f(w + re^{i\theta}) = (f(w) + b_k r^k e^{ik\theta}) + r^{k+1}e^{i(k+1)\theta} \cdot h(re^{i\theta})$$

där $h(z)$ är ett polynom av graden $n - k - 1$.

Vi ska nu välja θ så att den andra termen får motsatt riktning som den första, $f(w)$, i det komplexa talplanet. Vi skriver $f(w) = Ae^{i\alpha}$ och $b_k = Be^{i\beta}$ på polär form, där $A > 0, B > 0$ och α och β är reella tal. Välj nu θ så att

$$\alpha = \beta + k\theta + \pi$$

Då gäller

$$|f(w) + b_k r^k e^{ik\theta})| = |Ae^{i\alpha} + r^k e^{ik\theta} Be^{i\beta}| = |Ae^{i\alpha} + r^k Be^{i(\alpha-\pi)}|$$

och

$$|f(w) + b_k r^k e^{ik\theta})| = |e^{i\alpha}| \cdot |A - r^k B| = A - r^k B = |f(w)| - r^k B$$

om r är tillräckligt litet. Triangelolikheten ger att

$$|f(w + re^{i\theta})| \leq (|f(w) + b_k r^k e^{ik\theta})| + |r^{k+1}e^{i(k+1)\theta} \cdot h(re^{i\theta})|$$

varför

$$|f(w + re^{i\theta})| \leq |f(w)| - Br^k + r^{k+1}|h(re^{i\theta})|.$$

Om vi väljer r så litet att $r|h(re^{i\theta})| < B/2$ så är

$$|f(w + re^{i\theta})| \leq |f(w)| - r^k \cdot \frac{B}{2} < |f(w)|.$$

Alltså kan inte $|f(w)|$ vara det minsta värdet av $|f(z)|$ och vårt antagande att $f(w) \neq 0$ var felaktigt. Alltså måste $f(w) = 0$. Polynomet $f(z)$ har ett nollställe.

Tillämpningar

Algebrans fundamentalsats är en sats som säger att ”något” existerar. Den säger inte hur man beräknar detta ”något” och det känns därför svårt att koppla satsen till konkreta tillämpningar. Man vill ju i de flesta fall beräkna eller konstruera ”något” inte bara veta att det finns. Jag tror att det är svårt att hitta någon som i sin yrkesutövning hänvisar till algebrans fundamentalsats eller ens reflekterar över den. Naturligtvis är yrkesmatematiker undantagna. Men den har principiell betydelse. Att veta att ett polynom med komplexa koefficienter och med graden större än eller lika med ett har en komplex rot och kan skrivas som en produkt av förstagradspolynom är om man tänker efter häpnadsväckande. För att kunna lösa en allmän andragradsekvation med reella koefficienter införde vi ett nytt tal i för vilket $i^2 = -1$ Vi bildar de komplexa talen $a + ib$ där a och b är reella tal och använder de fyra räknesätten ungefär som vanligt men ersätter i räkningarna i^2 med -1. Inom de komplexa talens ram har alla polynom vars grad är minst ett en lösning. Några ytterligare tal ”utifrån” behöver inte införas.

Fundamentalsatsen säger något väsentligt om polynom och polynom är en av de viktigaste klasserna av funktioner inom tillämpningarna. När det kommer till beräkningar som t.ex. att ange de numeriska värdena av en funktion är det ofta effektivt att approximera funktionen med polynom eftersom de byggs upp av de tre räknesätten addition, subtraktion och division och för dem finns sedan länge fungerande algoritmer. Med tanke på polynomens stora betydelse i tillämpad matematik känns algebrans fundamentalsats extra betydelsefull.

Historik

Som vi flera gånger nämnt lär vi oss redan i grundskolan att lösa förstagradsekvationer. I gymnasiet lär vi oss att lösa en godtycklig andragradsekvation och den formel som anges i de flesta läroböcker finns i Eulers *Algebra* från 1770. Men problem som leder till andragradsekvationer och metoder att lösa dem finns på tvåtusen år gamla lertavlor från Babylonien. Andra boken i Euklides *Elementa* från 300-talet f.Kr. ägnas åt ekvationslösning i en geometrisk språkdräkt och om man läser noggrant kan man känna igen den metod för att lösa en andragradsekvation som finns i dagens läroböcker. En mer modern framställning finns i ett annat av de stora epokgörande verken i matematikens historia, *Al - Jabr* från omkring 820 e.Kr. Titeln har givit upphov till namnet Algebra. Författaren är al-Khwarizmi (ca 780-ca 850), som var verksam i Vishetens hus i Bagdad. Problemen och lösningarna beskrivs med ord. Den symboliska algebran

där den obekanta representerades av en bokstav lät vänta på sig några hundra år. Det är främst genom framför allt verk från 1500- och 1600-talet av fransmännen Francois Viète (1540-1603) och René Descartes (1596-1650) som den började utvecklas till den algebra vi har idag.

Hur är det då med nollställen av polynom av högre grad än två? Vi har tidigare nämnt att det har utvecklats metoder att skriva upp de exakta lösningarna till ekvationer av tredje och fjärde graden. En slags lösning gavs av poeten, filosofen och matematikern Omar Khayyam (1048-1131) som verkade i Samarkand runt 1100 e.Kr. Han visade hur man kan konstruera lösningen till en tredjegradsekvation geometrisk med hjälp av kägelsnitt. Den lösning vi ger idag finns i Girolamo Cardanos (1501-76) stora verk *Ars Magna* från 1545. Där finns också metoden för att lösa fjärdegradsekvationer. Det var emellertid inte Cardano som var upphovsmannen. De var italienarna Niccolo Tartaglia (1499-1567) och Scipio del Ferro (1465-1526) som för första gången gav metoder för att lösa tredje- respektive fjärdegradsekvationer och som Cardano med hänvisning till källorna återgav i *Ars Magna*. Metoderna beskrivs i ord genom konkreta exempel och utan de symboler vi är vana vid.

Den naturliga frågan är nu om man kan hitta motsvarande metoder för att lösa ekvationer av graden 5 eller högre. Svaret kom under första hälften av 1800-talet genom den norske matematikern Niels Henrik Abel (1802-29) i en artikel från 1827. Han visade att det finns ekvationer av femte graden där rötterna inte kan uttryckas genom att successivt använda de fyra räknesätten och radikaler d.v.s. n:te rötter. Den franske matematikern Evariste Galois (1811-32) utarbetade en teori som beskrev när algebraiska ekvationer kan lösas med radikaler. Den publicerades 1846, fjorton år efter hans död.

Det finns alltså ekvationer vars grad är större än eller lika med fem som har nollställen som vi inte kan nå med hjälp av de fyra räknesätten och rotutdragningar. Man kan då ställa sig frågan. Har dessa polynom något nollställe överhuvudtaget? Det känns inte helt självklart. Det är här algebrans fundamentalsats kommer in. Det existerar alltid ett komplext nollställe om polynomet har komplexa koefficienter men vi kan inte alltid konstruera det med hjälp av radikaler. Satsen har ett djup som gör den viktig ur ett teoretiskt perspektiv och Gauss bevis är av stor betydelse för utvecklingen av matematiken.

Om vi vill bestämma rötterna till t.ex. en femtegradsekvation så kan vi, som vi tidigare sagt, använda ett antal metoder som utvecklats av Isaac Newton (1643-1727) och Euler med flera och som ger approximativa lösningar mycket snabbt och med stor noggrannhet. Modern beräkningsteknik har säkert förfinat och utvecklat dem och de har förmodligen de klassiska metoderna som bas.

Några reflektioner

Ett polynom har formen

$$f(z) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

Antalet termer är ändligt. Vad händer om vi låter antalet termer vara oändligt och betraktar funktioner som kan skrivas

$$f(z) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

Naturligtvis konvergerar inte alltid en sådan summa men den gör det ibland och de funktioner som kan skrivas som en sådan konvergent oändlig summa kallas hela funktioner. Exempel på en sådan är

$$h(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

och vi har lärt oss att $h(x) = e^x$. Finns det någon teori för de hela funktionerna som är analog med teorin för polynom? Någon motsvarighet till algebrans fundamentalsats finns inte eftersom $h(x) = e^x \neq 0$ för alla komplexa tal x.

Den tyske matematikern Karl Weierstrass (1815-97) formulerade och bevisade omkring 1870 en slag motsvarighet av algebrans fundamentalsats för hela funktioner. Den är relativt komplicerad och det känns inte meningsfullt att här skriva upp den i hela sin glans, men om den tillämpas på den hela funktionen $\sin \pi x$ som har nollställena $0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ så kan vi skriva

$$\sin \pi x = \pi x \cdot (1 - x^2) \cdot (1 - \frac{x^2}{4}) \cdot (1 - \frac{x^2}{9}) \cdot \ldots = \pi x \cdot \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \frac{x^2}{k^2}).$$

Hundra år tidigare hade Leonard Euler använt denna framställning för att komma fram till att

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Han bekymrade sig inte om besvärliga frågor om konvergens, men genom intuition och fingerfärdighet, kunde han genom att utnyttja ovanstående framställning av $\sin \pi x$, beräkna en oändlig summa som många av de stora matematikerna hade misslyckats med. Matematikens vägar kan

vara snåriga. De resultat som idag presenteras på ett sätt som fyller alla krav på logisk stringens har många gånger långt tidigare insetts intuitivt. En intuition som utvecklats tack vare stor begåvning kombinerad med mycket arbete.

Analysens fundamentalsats

Matematisk analys är lika omfattande som själva naturen
Joseph Fourier (1768-1830)

Vad säger satsen?

Matematisk analys handlar om hur man kan räkna med det ”oändligt lilla” och det ”oändligt stora”. Genombrottet av analysen eller Kalkylen, som den då kallades, skedde under 1680-talet genom Isaac Newtons stora verk *Principia Mathematica* och banbrytande artiklar av Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716). Newton utvecklade teorin huvudsakligen som ett hjälpmedel för att beskriva naturlagarna. Leibniz, som var en av den tidens stora filosofer, hade ett mer abstrakt anslag och han intresserade sig mycket för hur man kan införa effektiva beteckningar.

Kalkylen var en stor händelse under slutet av 1600-talet. Den fick stort genomslag inom naturvetenskaperna och var ämne för debatt i den tidens intellektuella kretsar. Vi ska betrakta två typiska problemställningar inom analysen: ”Hur beräknar man hastigheten i en given tidpunkt hos en partikel i rörelse?” och ”Hur beräknar man arean av ett område som begränsas av kurvor som inte är räta linjer om man vet hur man beräknar arean av en rektangel?” De får illustrera hur man kan bestämma kvoter mellan två oändligt små tal och summor av oändligt många oändligt små tal.

I det första fallet antar vi att partikeln rör sig kontinuerligt efter en rät linje och att den efter t sekunder har förflyttat sig $f(t)$ meter. Hur

ska vi bestämma hastigheten i en punkt t_0? Det är inte uppenbart. Det är betydligt enklare att bestämma partikelns medelhastighet mellan två olika tidpunkter t_1 och t_2 där vi antar att $t_1 < t_2$. Partikeln har under den tiden, $t_2 - t_1$ sekunder, tillryggalagt sträckan $f(t_2) - f(t_1)$ meter och medelhastigheten är

$$\frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Medelhastigheten mellan t_0 och en punkt $t_0 + h$

$$\frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

bör därför vara ett hyggligt mått på hastigheten i t_0 om h är litet – bättre ju mindre h är. Ett exakt värde får vi om h är "oändligt litet". Då är också $f(t_0 + h) - f(t_0)$ "oändligt litet". Hastigheten i t_0 är alltså kvoten mellan två oändligt små tal. Det känns otillfredsställande. Vad menas egentligen med oändligt små tal? När Kalkylen slog igenom blev den ifrågasatt just för denna oklarhet. Ändå använde man den under hundra år utan större bekymmer. Den fungerade ju och tack vare den kunde nya genomgripande teorier inom framför allt fysiken formuleras.

Ett enkelt exempel får åskådliggöra problematiken. Vi antar att för vår partikel gäller att $f(t) = t^2$. Hastigheten i punkten t_0 får vi genom att bestämma kvoten

$$\frac{(t_0 + h)^2 - t_0^2}{h} = \frac{2t_0h + h^2}{h} = 2t_0 + h$$

då h är oändligt liten. I praktiken sätter vi $h = 0$ och får att hastigheten vid tiden t_0 är lika med $2t_0$. Det finns naturligtvis invändningar av filosofisk natur. Under räkningarnas gång antar vi att $h \neq 0$ men till slut låter vi ändå $h = 0$. Det känns motsägelsefullt men det fungerar.

Den franske matematikern August Cauchy (1789-1857) införde i början 1800-talet begreppet gränsvärde för att i någon mån klara ut begreppen. Analysen utvecklades starkt under 1700- och 1800-talen och problemen blev alltmer komplexa och man behövde klara och tydliga definitioner av intuitivt enkla begrepp som kontinuitet och gränsvärde. Analysen behövdes byggas upp från grunden på samma sätt som geometrin gjordes i *Elementa*. Den som framför allt stod för det arbetet var den tyske matematikern Karl Weierstrass i en rad berömda föreläsningar från mitten av 1800-talet. Vi ska emellertid i denna framställning utgå från att läsaren har en intuitiv förståelse av begrepp som gränsvärde och kontinuitet.

Exemplet med partikelns rörelse kan ges en mer generell form. Antag att $y = f(x)$ är en reellvärd funktion som är definierad på ett intervall på

reella axel [4]. Funktionens förändringshastighet i en given punkt x sätter vi lika med gränsvärdet av den så kallade differenskvoten

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

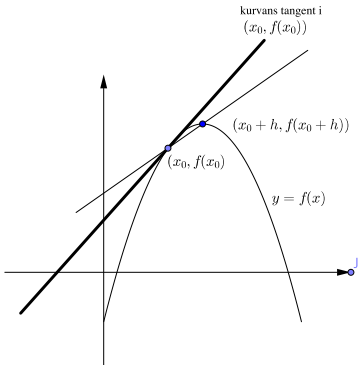
då h går mot 0 om gränssvärdet existerar. I så fall säger vi att $f(x)$ är deriverbar i x och gränsvärdet kallar vi för derivatan av $f(x)$ och betecknar det med $f'(x)$. Andra beteckningar är

$$\frac{df}{dx} \text{ eller } \frac{dy}{dx}$$

och de är inspirerade av att derivatan är kvoten mellan två oändligt små tal som båda är differenser. Vi skriver

$$\frac{f(x+h)-f(x))}{h} \to f'(x) \text{ då } h \to 0 \text{ eller } \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = f'(x).$$

Om vi ritar grafen till funktionen $y = f(x)$ så är $f'(x_0)$ lika med riktningskoefficenten till grafens tangent i punkten $(x_0, f(x_0))$. Det illustreras i figur 6.



Figur 6: Den räta linjen genom $(x_0, f(x_0))$ och $(x_0+h, f(x_0+h))$ vrider sig kring $(x_0, f(x_0))$ då h varierar och sammanfaller med tangenten i $(x_0, f(x_0))$ då $h \to 0$.

Några anmärkningar innan vi avslutar vårt avsnitt om ”kvoten mellan två oändligt små tal”. Vi har i resonemangen ofta tänkt oss att $h > 0$. De

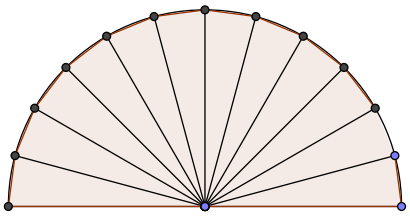
[4] I detta kapitel kommer alla funktioner vara reellvärda och definierade på intervall på reella axeln. Om det inte skrivs ut är det underförstått.

gäller naturligtvis också då $h < 0$. En funktion $f(x)$ som är deriverbar i ett intervall $a \leq x \leq b$ är också deriverbar ändpunkterna a och b. I det första fallet bestämmer man gränsvärdet av differenskvoten då $h \to 0$ och $h > 0$, i det andra fallet då $h < 0$.

Vi går nu över till den andra problemställningen som illustrerar "summan av oändligt många oändligt små delar". Det har varit känt i tusentals år och vi lär oss tidigt skolan hur man beräknar arean av rektanglar och trianglar. Det är då i princip möjligt att bestämma arean av områden som begränsas av räta linjer genom att dela upp dem i trianglar. Det kan vara arbetsamt men det är möjligt. Hur beräknar man då arean av ett område som begränsas av kurvor som inte är räta linjer? Enkla exempel är cirkeln och halvcirkeln. Man kan som i figur 10 dela in halvcirkeln i många små sektorer som liknar trianglar. Ju mindre sektorn är desto mer liknar den en triangel - ett något luddigt påstående. Om halvcirkelns radie är lika med 1 så har själva cirkelbågen längden π. Om vi delat in halvcirkeln i n lika stora sektorer så är varje sektor "nästan lika med"en triangel med basen π/n och höjden 1. Dessa area är

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{n} \cdot 1$$

och summerar vi alla dessa får $\pi/2$ som är halvcirkelns area.



Figur 7:

Det verkar som om resonemanget fungerar. Men kan man vara säker på det? Vi ersätter sektorer med trianglar och gör då ett fel om än litet. Sedan adderar vi areorna av alla dessa trianglar och hoppas att trots att

antalet termer blir stort så kommer totala felet att minska när termerna blir fler. Det är så men hur vet vi det? Redan under antiken gjorde man liknande resonemang för att t.ex. bestämma arean av en cirkel och de finns med i *Elementa*. Men kraven på stringens var stort och när man härlett ett resultat med en metod som denna bevisade man i efterhand att det stämde. De stödde sig då på en princip som formulerades av Eudoxus som verkade på 400-talet f.Kr. Den säger

> Antag att två olika storheter är givna. Om vi från den större subtraherar mer än hälften och från det som återstår mer än hälften av resten och upprepar denna procedur så kommer efter ett antal steg resten att bli mindre än den mindre av de givna storheterna.

Antikens kanske främste matematiker Arkimedes (287 f Kr- 212 f Kr), som verkade på 200-talet f.Kr., använde sig ofta av den principen bl.a. då han ville visa att hans metod för att beräkna volymen av ett klot var korrekt.

Vi kan använda samma teknik för att beräkna arean av ett område som begränsas av kurva $y = f(x)$ som är definierad och positiv i ett intervall $a \leq x \leq b$, x-axeln samt de båda räta linjerna $x = a$ och $x = b$. Ett sådant område visas i figur 8. Vi delar in intervallet i n lika stora delintervall och får punkterna

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n \text{ där } x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n} \text{ för } i = 1, 2, \ldots, n.$$

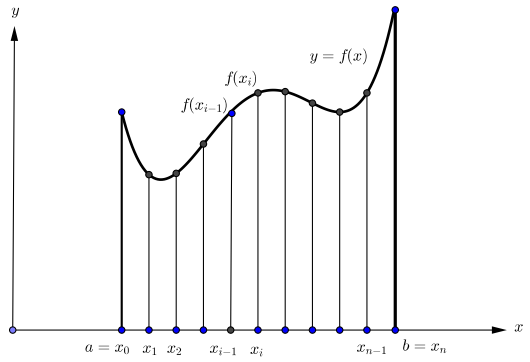
På det sättet kan vi dela in området i n strimlor. När n blir stort blir strimlorna mycket smala och de kommer alltmer att likna rektanglar där den i:te rektangeln har sidorna $(b-a)/n$ och $f(x_i)$.
Inspirerade av Leibniz sätter vi $(b-a)/n = \Delta x$. Den grekiska bokstaven Δ motsvarar vårt ”d” som är begynnelsebokstaven differens. Bokstaven x anger att skillnade är i x-led.

Arean av den i:te rektangeln är då $f(x_i)\Delta x$ och summan av rektangelareorna är lika med

$$f(x_1)\Delta x + f(x_2)\Delta x + \ldots + f(x_n)\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$

Nu visar det sig att om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig så har denna summa ett gränsvärde då $n \to \infty$ och detta gränsvärde är arean av det sökta området. Vi följer Leibniz och inför beteckningen

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$$



Figur 8:

Vid gränsövergången går den grekiska bokstaven Δ över i den latinska d. Den grekiska bokstaven Σ, som motsvarar vårt S, övergår i ett S-liknande tecken. Vi kallar

$$\int_a^b f(x)dx$$

för integralen av $f(x)$ från a till b.

Vi har i resonemangen förutsatt att funktionen $f(x)$ är positiv. Om $f(x)$ är kontinuerlig så existerar gränsvärdet och därmed integralen även om $f(x)$ är negativ eller växlar tecken i intervallet. Den geometriska tolkningen är då att integralen är lika med skillnaden mellan summan av de areor som ligger över x-axeln och summan av de areor som ligger under x-axeln.

Nu har vi infört begreppen derivata och integral för en typ av kvot mellan två oändligt små tal respektive en typ av summa av oändligt många oändligt små tal. Det finns ett samband mellan dem som kan kalla analysens fundamentalsats. Den lyder som följer.

Analysens fundamentalsats *Om den reellvärda funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i intervallet $a \leq x \leq b$ och om $F(x)$ är en funktion sådan att $F'(x) = f(x)$ då $a \leq x \leq b$ så är*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Funktionen $F(x)$ kallas primitiv funktion till $f(x)$ och man brukar

införa beteckningen

$$[F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Sambandet mellan integral och derivata är åtminstone för mig både enkelt och förvånande. Vi kan testa satsen med ett enkelt exempel. Vi har tidigare visat att derivatan av funktionen $f(x) = x^2$ är $f'(x) = 2x$. Alltså är x^2 en primitiv funktion till $2x$. Analysens fundamentalsats ger då att

$$\int_0^1 2x dx = [x^2]_0^1 = 1^2 - 0^2 = 1.$$

Området som begränsas av $y = 2x$, x-axeln samt linjerna $x = 0$ och $x = 1$ är en rätvinklig triangel med kateterna 1 och 2. Dess area är 1 som överensstämmer med integralen ovan. Läsaren kan själv rita en figur.

Vi har härlett derivatan av en funktion nämligen $f(x) = x^2$. Läsaren kan själv verifiera att för en konstant funktion $g(x) = C$ är derivatan $g'(x) = 0$ och för en linjär funktion $h(x) = ax + b$, där a och b är konstanter, är $h'(x) = a$. Man kan gå systematiskt tillväga och härleda derivatorna av de elementära funktionerna,[5] man kan visa räkneregler för derivatan av en summa, en skillnad, en produkt, en kvot, en sammansatt funktion och en invers funktion. Med hjälp av dessa räkneregler kan man sedan ge standardmetoder för att beräkna integraler som partialintegration och variabelsubstitution. Att bestämma derivator och integraler av mer eller mindre komplicerade funktioner är ett standardområde för problemlösning som både kräver kännedom om de elementära funktionerna och algebraisk fingerfärdighet.

Hur bevisas den?

I beviset för analysens fundamentalsats kommer vi att utnyttja fem egenskaper hos integraler som är enkla att inse och inte heller svåra att bevisa formellt. De är

- $$\int_a^b C dx = C(b-a) \text{ om } C \text{ är en konstant.}$$
- Om c är en punkt där $a < c < b$ så är

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

[5] Till de elementära funktionern räknas potensfunktionen x^α, exponentialfunktionen, logaritmfunktionen, de trigonometriska funktionerna och arcusfunktionerna.

- $$\int_a^b (f(x) \pm g(x)dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$
- $$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx \text{ där } \lambda \text{ är en konstant}$$
- Om $f(x) \leq g(x)$ för alla x sådana att $a \leq x \leq b$ så är

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

I dessa påståenden har vi förutsatt att $f(x)$ och $g(x)$ är kontinuerliga funktioner på intervaller $a \leq x \leq b$.

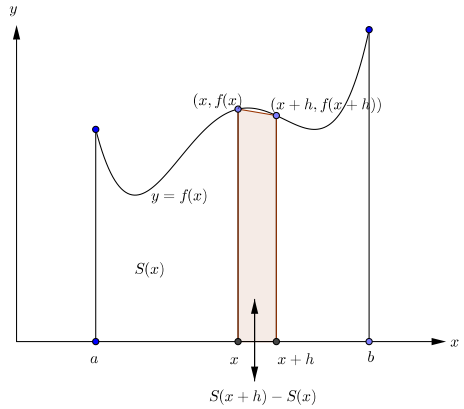
Grundidén i beviset av analysens fundamentalsats är att studera funktionen

$$S(x) = \int_a^x f(t)dt$$

och visa att $S'(x) = f(x)$. Vi betraktar därför

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h}.$$

I figur 9 är har vi illustrerat situationen då $f(x) \geq 0$ och den mörkare



Figur 9:

strimlan är differensen $S(x+h) - S(x)$. Den är för små h rektangelliknande och har en area som är ungefär $f(x) \cdot h$. Kvoten $(S(x+h) - S(x))/h$ är därför ungefär $f(x)$ och vårt påstående verkar korrekt, men det krävs ett mer strikt bevis som bl.a. inte förutsätter att $f(x) \geq 0$.

Vi observerar först att

$$S(x+h) - S(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+h} f(t)dt.$$

Funktionen $f(t)$ är kontinuerlig intervallet $x \leq t \leq x+h$ som är slutet. Enligt en känd sats för kontinuerliga funktioner antar då funktionen sitt största värde M och sitt minsta m samt alla värden däremellan. Eftersom $m \leq f(t) \leq M$ så är

$$\int_x^{x+h} m dt \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq \int_x^{x+h} M dt$$

vilket medför att

$$m \cdot h \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq M \cdot h.$$

Då är alltså

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)dt$$

ett tal mellan m och M och antas därför i en punkt ξ sådan att $x \leq \xi \leq x+h$. Om vi låter $h \to 0$ så medför det att $\xi \to x$ och

$$\frac{S(x+h) - S(x)}{h} = f(\xi) \to f(x)$$

eftersom $f(x)$ är kontinuerlig. Vi har visat att $S'(x) = f(x)$. Eftersom $S(a) = 0$ så är

$$\int_a^b f(t)dt = S(b) - S(a)$$

där $S'(x) = f(x)$. Det verkar som vi är nästan framme. Men $S(x)$ är bara en funktion sådan att $S'(x) = f(x)$ och analysens fundamentalsats säger att

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

för *varje* funktion $F(x)$ sådan att $F'(x) = f(x)$. Vi är alltså inte färdiga än.

Låt därför $F(x)$ vara en godtycklig funktion sådan att $F'(x) = f(x)$ och betrakta $D(x) = S(x) - F(x)$. Då är

$$D'(x) = S'(x) - F'(x) = 0$$

för alla x i intervaller $a \leq x \leq b$. Det ligger nära till hands att dra slutsatsen att $D(x) = C$ där C är en konstant. I så fall är $S(x) = F(x)+C$ och

$$\int_a^b f(t)dt = S(b) - S(a) = F(b) + C - (F(a) + C) = F(b) - F(a)$$

och satsen är visad.

Vi har tidigare konstaterat att derivatan av en funktion som är konstant i ett intervall är lika med 0. Men kan vi dra slutsatsen att om en funktions derivata är lika med 0 i ett intervall så är funktionen konstant där? De flesta accepterar nog detta utan bevis ungefär som de accepterar entydigheten av primtalsuppdelningen i aritmetikens fundamentalsats. Men funktioner kan se mycket egendomliga ut även om de är kontinuerliga. Ett bevis känns nödvändigt inte bara för formens skull. Beviset innehåller många små steg och vi visar först en sats som inte är obekant för den som löst problem där det gäller att bestämma maximum och minimum av en funktion.

Sats Om $g(x)$ är deriverbar i intervallet $a \leq x \leq b$ och om $g(x)$ antar sitt största eller sitt minsta värde i en punkt x_0 sådan att $a < x_0 < b$ så gäller att $g'(x_0) = 0$.

Vi antar att att $g(x)$ antar sitt största värde i x_0 i det inre av intervallet d.v.s. att $a < x_0 < b$. Om $|h|$ är tillräckligt litet så ligger $x_0 + h$ i intervallet och $g(x_0) \geq g(x_0 + h)$. Det medför att

$$\frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \leq 0 \text{ om } h > 0 \text{ och } \geq 0 \text{ om } h < 0.$$

Om vi låter $h \to 0$ då $h > 0$ får vi att $g'(x_0) \geq 0$ och om vi låter $h \to 0$ då $h < 0$ får vi att $g'(x_0) \leq 0$. Alltså måste $g'(x_0) = 0$ och vår sats är bevisad.

Nu kan vi ta det sista steget i beviset av analysens fundamentalsats.

Sats Om $g(x)$ är en funktion som är deriverbar i intervallet $a \leq x \leq b$ och om $g'(x) = 0$ för alla x i intervallet så är $g(x) = C$ där C är en konstant.

Vi antar motsatsen vilket innebär att det finns x_1 och x_2 sådana att $x_1 < x_2$ och $g(x_1) \neq g(x_2)$.

Vi inför en hjälpfunktion $m(x) = kx + l$ vars graf är en rät linje genom punkterna $(x_1, g(x_1))$ och $(x_2, g(x_2))$. Eftersom $g(x_1) \neq g(x_2)$ är $k \neq 0$. För funktionen

$$h(x) = g(x) - m(x) = h(x) - kx - l$$

gäller då att $h(x_1) = g(x_1) - m(x_1) = 0$ och $h(x_2) = g(x_2) - m(x_2) = 0$ samt att $h'(x) = g'(x) - k$,

Om $h(x) = 0$ för alla x i intervallet $x_1 \leq x \leq x_2$ så är $h'(x) = 0$ där. Men det innebär att $g'(x) = k \neq 0$ vilket strider mot förutsättningen att $g'(x) = 0$ för alla x sådana att $a \leq x \leq b$. Alltså kan inte $h(x) = 0$ för alla x i $x_1 \leq x \leq x_2$.

Funktionen $h(x)$ är kontinuerlig i det slutna intervallet $x_1 \leq x \leq x_2$ och enligt en sats om kontinuerliga funktioner måste den anta ett största och ett minst värde där. Om $h(x)$ inte är lika med 0 i hela intervallet så måste, eftersom $h(x_1) = h(x_2) = 0$, antingen dess största värde eller det minsta antas i en punkt ξ sådan att $x_1 < \xi < x_2$. Enligt den sats vi nyss bevisat måste då $h'(\xi) = 0$ vilket inbär att $g'(\xi) = k$ och eftersom $k \neq 0$ strider det mot förutsättningen att $g'(x) = 0$ för alla x sådana att $a \leq x \leq b$.

Vårt antagande att $g(x)$ inte är konstant i $a \leq x \leq b$ är felaktigt. Alltså finns det en konstant C sådan att $g(x) = C$ för alla x i $a \leq x \leq b$. Satsen är visad och av den följer Analysens fundamentalsats.

Den enkla idén som illustreras i figur 9 har förvandlats till långa och kanske ibland snåriga resonemang. Det är lätt att rita en enkel kurva och få idéer från den men en funktion kan se ut på många sätt och det är ofta svårt att rita grafen. Den kan t.ex. oscillera kraftigt nära en punkt som $\sin(1/x)$. Det behövs ett formellt bevis och med ledning av vår figur hittade vi det. Men det finns ”luckor”. Vi stöder oss hela tiden på en sats om kontinuerliga funktioner som vi inte bevisar. Den lyder som följer

Sats En funktion $f(x)$ som är kontinuerlig på ett slutet begränsat intervall $a \leq x \leq b$ antar alla värden mellan sitt största M och sitt minsta m d.v.s. för varje tal y_0 sådant att $m \leq y_0 \leq M$ finns ett x_0 sådant att $y_0 = f(x_0)$.

Satsen är relativt svår att bevisa och utnyttjar grundläggande egenskaper hos de reella talen. Det krävs också en formell definition av begreppet kontinuitet. Man säger att en funktion är kontinuerlig i en punkt a om $f(x) \to f(a)$ då $x \to a$ d.v.s. man utnyttjat gränsvärdesbegreppet

som i sin tur måste preciseras och konkretiseras. Vi ska inte gå in på hur man kan göra det men återkommer till frågan i det historiska avsnittet.

Tillämpningar

Differential- och integralkalkylen eller Kalkylen utvecklades i samband med den klassiska framställningen av naturlagarna som förknippas med Newtons *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Det är därför självklart att den har haft och har stor betydelse inte bara för vår kunskap om naturlagarna utan också för våra möjligheter att utnyttja dem för att utveckla tekniska system. Man kan säga att Kalkylen är en oundgänglig del av den klassiska mekaniken som i sin tur är en förutsättning för den industriella revolutionen. Matematisk analys används nu inte bara inom naturvetenskap och teknik utan också inom ekonomi och samhällsvetenskap. Det samband mellan derivata och integral som ges av analysens fundamentalsats används ständigt i tillämpningarna som är många och självklara. Inom statistiken är Kalkylen ett centralt hjälpmedel och i sambandet mellan fördelningsfunktion och frekvensfunktion för en kontinuerlig stokastisk variabel känner vi igen analysens fundamentalsats. För att bestämma den totala massan om man känner massfördelningen används fundamentalsatsen och detsamma gäller om man känner laddninsgtätheten och vill bestämma den totala laddningen. Många processer beskrivs av samband mellan en funktion och dess derivator, så kallade differentialekvationer, och i arbetet med att från en sådan ekvation härleda egenskaper hos den sökta funktionen är ofta fundamentalsatsen ett självklart hjälpmedel.

Vid tillämpningar av matematik vill man ofta i slutändan ge resultaten i numerisk form. Om en lösning beskrivs med t.ex. en funktion vill man kunna beräkna funktionens värden i olika punkter. De funktioner man vill bestämma är ofta uppbyggda av de elementära funktionerna och det kan vara angeläget att göra någon form av tabeller över dem. De klassiska tabeller man använder i skolan är över kvadratrötter, över de trigonometriska funktionerna och över logaritm- och exponentialfunktionerna. Tidigare fanns tabellerna i pappersform, nu finns de digitalt. Hur kan man beräkna dem? De finns olika metoder. Funktionerna kan approximeras med polynom, vars värden beräknas med hjälp av de tre räknesätten addition, subtraktion och multiplikation. Det kan vara en rimlig målsättning att reducera beräkningarna till att använda de fyra räknesätten som sedan gammalt kan utföras maskinellt med väl utvecklade metoder. Analysens fundamentalsats kan vara ett kraftfullt hjälpmedel för att göra numeriska beräkningar eftersom det finns mycket effektiva metoder att beräkna integraler. Integralen är ju gränsvärdet av

en summa av produkter och då delintervallen d.v.s. termerna är små och antalet termer stort får man bra approximationer. Vill vi bestämma de numeriska värdena av t.ex. $\ln x$ kan vi utnyttja att derivatan av $\ln x$ är lika med $1/x$ och använda analysens fundamentalsats. Vi har

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t} dt.$$

Högerledet är en integral och kan approximeras med den metod som vi beskrivit. Man behöver då bara använda de fyra räknesätten eftersom den funktion man integrerar är kvoten $1/x$. På samma sätt kan man tabellera t.ex. $\arctan x$, Naturligtvis har det under årens lopp utvecklats allt effektivare metoder, men analysens fundamentalsats är användbar för att göra tabeller över olika typer av funktioner till exempel de elementära.

Analysen är ett av de områden inom matematiken som har flest tillämpningar. Det kan gälla naturvetenskap framför allt fysik. Det kan gälla teknik, statistik och ekonomi. Den har naturligtvis också stor betydelse för utvecklingen av matematiken själv inte minst för att hitta effektiva metoder för numeriska beräkningar. Och närhelst analysen tillämpas visar sig fundamentalsatsen vara ett oumbärligt verktyg.

Historik

Vi har tidigare nämnt att de grundläggande idéerna bakom integralbegreppet fanns redan under antiken. Areor och volymer bestämdes genom att dela upp området eller kroppen i ”oändligt många, oändligt små delar” som sedan summerades. De resultat man då kom fram till kontrollerades sedan genom Eudoxos uttömningsprincip. Det kan noteras att i Euklides *Elementa* fanns metoder att bestämma cirkelns area och konens volym. Däremot behandlades inte klotets volym. Det var först Arkimedes som några decennier efter Euklides visade hur den kan beräknas.

Kalkylens genombrott kom, som vi tidigare nämnt, på 1680-talet genom epokgörande arbeten av Newton och Leibniz. Men de hade föregåtts av insatser av bl.a. Pascal och Fermat. Pascal beräknade arean av det område som begränsas av kurvan $y = \sin x$ och intervallet $0 \leq x \leq \pi$. Fermat visade hur man kunde bestämma maximum av en funktion $f(x)$ genom att studera oändligt små förändringar kring maximipunkten. Man känner i hans räkningar igen den metod vi nu använder - vi löser ekvationen $f'(x) = 0$. Men Pascal och Fermat var inte de enda som arbetade med det ”oändligt illa” och ”det oändligt stora”. Under första halvan av 1600-talet bidrog italienarna Bonaventura Cavalieri (1598-1647) och Evagelista Torricelli (1608-47) samt fransmannen Giles de Roberval

(1602-75) med arbeten som utnyttjade infinitesimaler - oändligt små tal. Metoden låg i tiden och en förutsättning för denna utveckling var den nya algebran som gav nya möjligheter att räkna med symboler. Det var arbeten av framför allt Francoise Viète och René Descatertes från slutet av 1500-talet och början av 1600-talet som bröt mark för den nya algebran.

Men det var alltså Newton och Leibniz som ungefär samtidigt gav en mer sammanhängande teori för räkning med infinitesimaler. Newton gjorde det i *Principia* från 1687 men han skrev också ett antal fristående artiklar om Kalkylen. I en artikel från 1684 med den imponerande titeln *Nova methodus pro maximis et minimas itemque tangentibus, quae ned fractas nedirrationelles quantitates moratur, et singulare pro illi calculi genus*[6] inför Leibniz begreppet differential och visar hur man med hjälp av det kan bestämma tangenter till kurvor och funktioners maxima och minima. Differentialer är oändligt små tal och han använder i en senare artikel begreppet derivata som en kvot mellan två differentialer och visar deriveringsregler för bl.a. en summa och en produkt. Derivata är latin och betyder ungefär ”härledning”. Han ägnar mycket tankearbete åt hur man inför lämpliga beteckningar och för en oändlig liten förändring av en variabel x skriver han dx, ”d” som i differens. Han studerar också integraler och införde integraltecknet som ett utdraget ”S” - begynnelsebokstaven i summa. Leibniz härledde också analysens fundamentalsats

Newton använde först termen moment och senare termen fluxion för det vi kallar derivata. Han införde begreppen i samband med att han studerade partiklars rörelse och ville ha ett mått på deras hastigheter. På samma sätt som Leibniz visade han hur man kunde räkna med fluxioner och han härledde analysens fundamentalsats. Newtons härledning är enklare än Leibniz. Newtons mer konkreta synsätt gör att satsen faller ut på ett mer naturligt sätt. Han utgår från ungefär samma bild som vi gjorde i figur 9. Men redan 1670, före Leibniz och Newton, publicerade Newtons lärare Isaac Barrow 1670 en samling av sina föreläsningar. En av dem innehåller analysens fundamentalsats i geometrisk form. Framställningen är emellertid svår att följa och man får anstränga sig för att se att det är fundamentalsatsen som behandlas.

Kalkylen gav vetenskapen ett effektivt redskap. Den fungerade. Fysiken fick en mer enhetlig form och framställningen blev mer överskådlig. Men den var i viss mån byggd på lösan sand. Den byggde på räkningar med ”det oändligt lilla” och ”det oändligt stora”. Begreppen är oklara och naturligtvis utsattes kalkylen för kritik. Den engelske biskopen Ge-

[6] En ny metod att bestämma maxima och minima liksom tangenter, som inte utesluter varken bråk eller irrationella storheter, och en märklig typ av kalkyl för detta

orge Berkley (1685-1753) skrev i en kritisk artikel *The Analyst* från 1734 följande:

> Vissa av dem som fordrar klara bevis i religiösa ting och säger sig inte tro på annat än vad de själva kan se, sätter faktiskt tro till alla dessa punkter. Att de som endast varit förtrogna med klara fakta bör ha svårt att gå med på dunkla punkter förefaller inte helt oförklarligt. Men den som kan smälta en andra- eller tredje fluxion och andra- och tredjeskillnad, behöver enligt min mening inte vara kräsmagad då det gäller någon teologisk fråga.

Problemen hade redan under första hälften av 1600-talet påpekats av Galileo Galilei (1564-1642). Han formulerar sig på följande sätt:

> Dessa svårigheter är reella och de är inte de enda. Men låt oss komma ihåg att vi har att göra med oändligheter och odelbarheter, båda övergår vår ändliga förståelseförmåga, de förra på grund av dess storlek de senare på grund av dess litenhet. Trots det kan inte människan avstå från att diskutera dem även om det måste göras indirekt.

Men Kalkylens effektivitet kunde inte förnekas. Tack vare den kunde fysikaliska processer beskrivas och viktiga resultat kunde uppnås. Flera läroböcker gavs ut och en av de viktigaste var Leonard Eulers *Introductio in analysin infinitorum*[7] från 1748. Euler var 1700-talets främste matematiker och han var en mästare i att utnyttja Kalkylen och den symboliska algebran. Han var inte ensam och under århundradet såg ett stort antal matematiska resultat, teorier och metoder dagens ljus. En bidragande orsak till framgångarna var det beteckningssystem som Leibniz utformat. 1700-talet var för matematiken en mycket produktiv period.

Till slut kom man emellertid till en punkt då det blev nödvändigt att precisera begreppen. Det var framför allt i samband med att Jean-Baptiste Fourier (1768-1830) i ett arbete från 1817 om värme använde trigonometriska serier, som situationen blev akut. Vissa resultat var beroende av tolkningen av oändliga summor och begreppet kontinuitet. Det var under andra halvan av 1800-talet som analysen fick en fast grund mycket tack vare Karl Weierstrass och den serie föreläsningar han gav i Berlin under åren 1859-1861. Ett centralt begrepp var gränsvärde som Cauchy introducerat under första halvan av 1800-talet. Weierstrass vidareutvecklade begreppet inspirerad av Eudoxos uttömningsprincip från 300-talet före Kristus och byggde systematiskt upp en stringent teori för analysen.

[7] ”Inledning till analys av det oändliga”

Denna mycket kortfattade historik handlar om den matematiska analysen i stort och inte speciellt om fundamentalsatsen. Men fundamentalsatsen är fundamental för analysen - därav namnet. Analysen handlar till stor del om begreppen derivata och integral och sambandet mellan dem uttrycks genom analysens fundamentalsats.

Några reflektioner

Kalkylen handlar om begreppen integral och derivata och den har uppstått ur ett behov att räkna med ”oändligt små” och ”oändligt stora” tal. Vi har svårt att föreställa oss dem. Som Galilei säger: ”Men låt oss komma ihåg att vi har att göra med oändligheter och odelbarheter, båda övergår vår ändliga förståelseförmåga, de förra på grund av dess storlek de senare på grund av dess litenhet.” Men genom fantasi och finurlighet gav räkningarna med ”oändligt små” och ”oändligt stora” tal resultat och det som förut krävde långa räkningar och resonemang kunde med hjälp av Kalkylen göras förvånansvärt enkelt och överskådligt. Länge blundade de flesta matematiker för att de grundläggande begreppen var vaga och odefinierade men när Kalkylens användningsområden utökades och när frågeställningarna blev allt mer komplexa blev det nödvändigt att ge analysen en fast grund och det skedde som vi nämnde i föregående avsnitt i slutet av 1800-talet av bl.a. Weierstrass.

Men det uppstod i tillämpningar, framför allt inom fysiken, situationer där man räknade med funktioner som kan anta värden som är oändliga i vissa punkter, något som matematiker med krav på stringens hade svårt att acceptera. Låt oss ge ett enkelt exempel från elläran. Antag att vi har en elektriskt laddad stav och att laddningstätheten är $\rho(x)$. Vi antar att staven motsvarar intervallet $-a \leq x \leq a$. Stavens totala laddning är då lika med

$$\int_{-a}^{a} \rho(x)dx.$$

En matematiker vill att funktionen $\rho(x)$ skall vara i någon mening ”snäll” så att integralen är väldefinierad. Det räcker att den är kontinuerlig men den ska anta ändliga värden i varje punkt. Men för fysikern är inte alltid verkligheten sådan. Vad händer om man placerar en enhetsladdning i en punkt i t.ex. $x = 0$? Hen vill gärna använda de ekvationer som innehåller laddning och laddningstäthet som har fungerat hittills. Fysikern inför en funktion, som han kallar deltafunktionen $\delta(x)$, för att beskriva stavens laddningstäthet om vi har en enhetsladdning i punkten $x = 0$ och staven för övrigt inte innehåller någon laddning. Deltafunktionen har följande

egenskaper

$$\delta(x) = 0 \text{ om } x \neq 0 \text{ och } \delta(0) = \infty$$

samt

$$\int_{-a}^{a} \delta(x)dx = 1.$$

En sådan funktion har inte plats i den teori som Weierstrass och hans kollegor omsorgsfullt hade byggt upp. Men det bekymrar inte vår fysiker som integrerar $\delta(x)$ och sätter

$$H(x) = \int_{-a}^{x} \rho(t)dt.$$

Då är $H(x) = 0$ om $-a \leq x < 0$ och $H(x) = 1$ om $0 < x \leq a$. Totala laddningen intervallet $-a \leq t < x$ är ju 0 om $x < 0$ och lika med 1 om $x > 0$. Om vi antar att analysens fundamentalsats kan användas så är $H'(x) = \delta(x)$. Inte nog med att vår fysiker studerar funktioner som kan vara oändliga i vissa punkter. Fysikern deriverar också funktioner som inte ens är kontinuerliga. Vår fysiker är långt utanför Weierstrass värld.

Metoderna känns tveksamma men de fungerar. Kritik finns men den får vika inför funktionaliteten. Det går ett tag men sedan börjar bristen på stringens bli besvärande åtminstone för matematikerna. Hur bygger man en teori som omfattar de gamla vanliga funktionerna men där också de ”nya” finns med? Hur räknar man med dessa nya ”funktioner”?

Under mitten av 1900-talet utvecklades teorier för en ny klass av ”funktioner” som löste problemen. Den franske matematikern Laurent Schwartz (1915-2002) skapade vad han kallade distributioner och två ryska matematiker Israel Gelfand (1913-2009) och Georgiy Shilov (1917-75) kallade sina nya objekt för generaliserade funktioner. Båda begreppen löste problematiken, men Schwartz distributioner och det sätt han på vilket han införde dem, är nu det vanliga. De grundläggande definitionerna i hans teori är enklare och mer överskådliga. De ryska eller kanske rättare sovjetiska matematikerna var på den tiden rätt isolerade från västvärlden och deras artiklar skrevs på ryska. Det är först långt senare de översattes till engelska. Detta kan ha bidragit till att Schwartz introduktion av distributioner blev den gängse. Vi ska ge några antydningar om hur Schwartz går tillväga.

En funktion $f(x)$ som är definierad på hela reella axeln är bestämd av sina värden. För varje x vet vi vad $f(x)$ är. Vissa funktioner är kontinuerliga och vissa är deriverbara. Men funktioner kan också bestämmas på andra sätt. Antag att vi känner

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

för ett stort antal funktioner $\varphi(x)$ som vi kallar testfunktioner. Om antalet testfunktioner är tillräckligt många och väljs skickligt bör dessa integraler karakterisera $f(x)$ åtminstone om vi vet att t.ex. $f(x)$ är kontinuerlig. Hur ska vi då välja våra funktioner $\varphi(x)$? Schwarz införde en klass av funktioner som han betecknade med $\mathcal{D}$ och som består av alla funktioner som har obegränsat antal derivator och som är lika med 0 utanför något intervall $-A \leq x \leq A$. Finns verkligen sådana funktioner överhuvudtaget? Det är inte helt trivialt. Och räcker de i så fall för att $f(x)$ ska karakteriseras av att vi känner

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

för varje funktion $\varphi(x)$ i $\mathcal{D}$? Schwartz kunde ge ett positivt svar på den första frågan. Men det krävs en del arbete. Kravet på att testfunktionerna ska ha obegränsat antal derivator är mycket starkt.

Svaret på den andra är litet mer komplicerat. Två funktioner $f(x)$ och $g(x)$ som bara skiljer sig åt t.ex. i ett ändligt antal punkter ger ju samma värden på integralerna. Schwartz lyckades visa att om integralerna är lika för alla $\varphi(x)$ i $\mathcal{D}$ så är $f(x) = g(x)$ för alla reella tal x utom för en mycket liten mängd - en mängd som i en viss mening har måttet 0.[8] Funktionerna säges då vara lika nästa överallt. Han identifierade då helt enkelt två funktioner $f(x)$ och $g(x)$ som är lika nästan överallt.

Schwarz noterade också att summan av två testfunktioner är en testfunktion och produkten av en testfunktion med ett reellt tal λ är en testfunktion samt att $\mathcal{D}$ är ett linjärt rum. Vidare gäller att

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\varphi_1(x) + \varphi_2(x))dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_1(x)dx + \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi_2(x)dx$$

och

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\lambda\varphi(x))dx = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

för alla $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ och $\varphi(x)$ i $\mathcal{D}$ samt alla reella tal λ.

Om $f(x)$ är en funktion som t.ex. är kontinuerlig har vi till varje φ i $\mathcal{D}$ har vi ordnat ett tal som vi kallar $T_f(\varphi)$ nämligen

$$T_f(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx$$

och avbildningen $T_f : \mathcal{D} \to \mathbf{R}$ är en linjär avbildning från $\mathcal{D}$ till $\mathbf{R}$.

[8]Inom matematiken hade under början av 1900-talet utvecklats ett område som kallas måtteori och där man preciserade begreppet mått av en delmängd av de reella talen.

Men det finns fler linjära avbildningar från $\mathcal{D}$ till $\mathbf{R}$ än de som definieras av en kontinuerlig funktion $f(x)$ som t.ex. de båda avbildningarna T_δ och T_H som definieras genom

$$T_\delta(\varphi) = \varphi(0) \text{ respektive } T_H(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(x)dx.$$

Vi observerar också att om $f(x)$ är deriverbar med derivatan $f'(x)$ så får vi med hjälp av partialintegration att

$$T_{f'}(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx = [f(x)\varphi(x)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx$$

och eftersom $\varphi(x) = 0$ för stora positiva och negativa x så har vi

$$T_{f'}(\varphi) = -\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx = -T_f(\varphi'). \tag{1}$$

Vi har betraktat linjära avbildningar från det linjära rummet $\mathcal{D}$ till de reella talen $\mathbf{R}$. Linjära avbildningar vars värdemängd är en delmängd av $\mathbf{R}$ kallas ofta linjära funktionaler och för att förenkla framställningen inför vi den terminologin.

Schwartz inför också ett slags konvergensbegrepp i det linjära rummet $\mathcal{D}$. En följd av funktioner φ_n av funktioner i $\mathcal{D}$ går mot en funktion φ i $\mathcal{D}$ om en rad villkor är uppfyllda. Det skulle föra alltför långt att precisera dem men det räcker inte att $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ för varje x i $\mathbf{R}$. När ett konvergensbegrepp införts kan man på ett naturligt sätt införa begreppet kontinuitet och en linjär funktional T på det linjära rummet $\mathcal{D}$ kallas kontinuerlig om $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$ då $\varphi_n \to \varphi$ i $\mathcal{D}$.

Nu är det dags att införa begreppet distribution.

En distribution T är en kontinuerlig linjär funktional på $\mathcal{D}$ och mängden av distributioner betecknar Schwartz med $\mathcal{D}'$.

Med ledning av (1) definierar vi derivatan T' av distributionen T genom

$$T'(\varphi) = -T(\varphi') \text{ för alla } \varphi \text{ i } \mathcal{D}.$$

Varje kontinuerlig funktion $f(x)$ ger upphov till en distribution T_f. Vi behöver inte förutsätta att den är kontinuerlig. Det räcker t.ex. att den är integrerbar över alla intervall på reella axeln. Vi har också konstaterat att två funktioner ger upphov till samma distribution precis då de är lika nästan överallt. Det är i längden tungrott att använda beteckningen T_f

för distributionen som motsvarar funktionen $f(x)$. Vi förenklar och skriver helt enkelt f istället för T_f och kommer ihåg att f är en distribution. Det blir då inte meningsfullt att tala om värdet $f(x)$ där x är en speciell punkt på reella axeln eftersom två funktioner som är lika nästan överallt genererar samma distribution.

För att illustrera hur man deriverar går vi tillbaka till "funktionerna" $\delta(x)$ och $H(x)$. Motsvarande distributioner definieras genom deras värden på testfunktionerna d.v.s.

$$\delta(\varphi) = \varphi(0) \text{ och } H(\varphi) = \int_0^\infty \varphi(x)dx.$$

Vi beräknar H' och får

$$H'(\varphi) = -H(\varphi') = -\int_0^\infty \varphi'(x)dx = -[\varphi]_0^\infty = \varphi(0) = \delta(\varphi)$$

eftersom $\varphi(x) = 0$ för stora x.

Alltså gäller $H' = \delta$ som förväntats om distributionerna ska uppfylla ett av de enklare kraven man ställt på dem.

Vi nöjer oss med att konstatera det. Målsättningen är att ge den eventuelle läsare en liten försmak av hur man kan definiera och räkna med distributioner. Gissningsvis tycker många det är besvärligt. Många nya beteckningar och begrepp kan göra det svårt att vid en första läsning hålla isär dem och abstraktionsnivån är hög. Jag kan trösta läsaren med att jag själv en gång försökt sätts mig in i Gelfand och Shilovs ansats och fann den mer svårtillgänglig även om den var mer konkret. Schwartz tillhörde den grupp matematiker som kallade sig Bourbaki och som sökte bygga upp den tidens matematiska kunskap ungefär som Euklides gjorde i *Elementa*. Deras framställning är abstrakt och matematiska strukturer har en framträdande plats. Teorin för distributioner har skapats i den andan.

De räkningar som fysiker tidigare framgångsrikt gjort kunde genom införandet av distributioner legitimeras. Man hade "funktionsliknande" objekt som kunde derivera hur många gånger man ville. Vidare är det lätt att se att $\mathcal{D}'$ är ett linjärt rum. Man kan addera distributioner och multiplicera dem med ett reellt tal. Däremot finns det ingen enkel tolkning av produkten av två distributioner. Distributionsteori är ett effektivt hjälpmedel i studiet av differentialekvationer. De sökta funktionerna kan omtolkas till distributioner och man kan då obekymrat derivera. När man sedan kommer fram till en lösning och vill studera dess egenskaper blir man tvungen att gå tillbaka till funktionstolkningen och det är inte alltid enkelt. Men distributionerna har gjort resonemangen mer överskådliga och därmed blir det kanske lättare att se nya samband och utveckla nya teorier.

Det ”oändligt lilla” och det ”oändligt stora” arbetade man med redan under antiken och man gjorde det på ett logiskt oantastligt sätt. Men resonemangen var långa och omständliga. När den symboliska algebran 1600-talet blev en naturlig del av matematiken kunde formella räkningar med infinitesimaler göras relativt enkelt och ett nytt område av matematiken, analysen, utvecklades. Den blev ett kraftfullt redskap inte bara för fysiken utan även för matematiken själv. Men grunden var bräcklig. Det ”oändligt lilla” och det ”oändligt stora” var odefinierade storheter och analysen behövde en stabil grund och en systematisk framställning och en sådan skapades under andra hälften av 1800-talet. Analysen användes av framför allt fysiker men de gick ”över gränsen” och använde den på ett sätt som inte var strikt. En ny teori skapades som utvidgade analysen och försåg den med nya begrepp t.ex. distributioner,

Matematiska teorier skapas för att lösa problem. När problemen inom ett område blir alltmer komplicerade och lösningarna alltmer svåra att beskriva skapar man nya begrepp som innebär att man får större överblick och när man väl vant sig vid det nya blir det enklare att både lösa och formulera nya intressanta problem. Ett nytt område skapas i vilket det gamla är en del och i det nya området uppkommer i sin tur problem som måste lösas och där man ser nya intressanta problemställningar. För att förenkla arbetet inför man nya mer abstrakta begrepp och så utvidgas matematiken hela tiden. Den svenske poeten Göran Sonnevi (1939-) skriver i sin diktsamling *Det omöjliga*

> att musiken! Att ingen gräns
> finns för dess
> utvidgning liksom den inte finns för
> matematiken
> och för känslolivets
> variation, förgrening, kärlekens
> och hatets
> ännu okända former.

Att jämföra matematik med kärlek och hat kan för många kännas egendomligt. Men den som arbetat med matematisk problemlösning vet hur man kan känna frustration och nästan hat när man förtvivlat söker lösningen på ett problem. Men om och när man väl hittar lösningen känner man en eufori som utvecklar en kärlek till ämnet. Och finns det något vackrare är en matematisk teori där begrepp och samband åskådliggörs enkelt och klart och med logisk stringens. Kanske tänkte Sonnevi inte i dessa banor. Men jag gör det.