

MATEMATIK SOM LOGISKT SYSTEMBYGGE

Anders Tengstrand



copyright Anders Tengstrand

Den femte texten i min lilla serie om matematik har titeln *Matematik som logiskt systembygge*. Den handlar om matematikens grundvalar och är ett försök att följa arbetet med att ge matematiken en logisk struktur från Euklides till Gödel. De problem som behandlas är mycket abstrakta. Några tycker kanske att de är för abstrakta.

För några år sedan hade jag intressanta diskussioner om matematik och matematikundervisning med en forskare från Kina som gästade matematiska institutionen, som då var en del av Växjö universitet och som nu ingår i Linnéuniversitetet. Vi jämförde två centrala verk inom matematikens historia. Det ena var det kinesiska verket *Nio kapitel om den matematiska konsten* från 200-talet e.Kr. som sammanställts av Liu Hui (ca 220-80) och det andra var Euklides *Elementa* från 300 talet f.Kr.

Det kinesiska arbetet innehåller 246 problem med lösningar inom skilda områden som lantmäteri, handel, mätning av areor och volymer, rätvinkliga trianglar, ingenjörskonst m.m. Problemen leder till olika matematiska tekniker som räkning med negativa tal, procenträkning, reguladetri¹, bestämning av kvadrat- och kubikrötter, proportionalitet, hastighets- och flödesproblem, bestämning av största gemensamma delare, aritmetiska och geometriska summor samt linjära ekvationssystem med Gausselimination. Det förekommer också försök att räkna med infinitesimaler. Listan är lång och skulle kunna göras längre. Många av de metoder och begrepp som beskrivs kom långt senare att utvecklas i Europa.

Elementa är uppbyggd på ett helt annat sätt. Där försöker man ge en struktur åt den tidens matematiska kunnande och visa på sambanden mellan matematiska påståenden eller satsar. Verket byggs upp utifrån ett antal axiom och satserna bevisas genom strikt logiska resonemang. Stilen är klinisk och medvetet stram. Inga tillämpningar ges och det finns inga diskussioner om vare sig grundtankarna i bevisen eller om hur man valt ordningen mellan satserna. Framställningen verkar vid en jämförelse med den i *Nio kapitel om den matematiska konsten* torr och tråkig. Å andra sidan känns det kinesiska verket spretigt. Samband mellan olika metoder och begrepp behandlas inte systematiskt.

Jag minns att jag just då försökte läsa delar av *Nio kapitel om den matematiska konsten* och att jag hade börjat beundra framställningen med dess starka anknytning till vardagsproblem. Kanske tyckte jag att vi i västerlandet under århundraden borde haft mer av det och mindre av *Elementa* som förberedelser för studier i matematik på högskolenivå. Min kinesiska kollega tyckte tvärtom. Hon menade att *Nio kapitel om den matematiska konsten* kanske hade varit alltför dominerande i kinesisk

¹Reguladetri betyder "räkning med de tre". Ett typiskt problem är: Om 3kg av en vara kostar 7.80 kr hur mycket kostar 4 kg?

matematikundervisning. Hon saknade inte bara den stringens och den struktur som finns i *Elementa* utan också de mer principiella frågor som kommer upp och som leder till icke-euklidisk geometri och till ett annat sätt att se matematik med abstrakta strukturer som grupp, ring, kropp och linjärt rum – teorier som har visat sig vara viktiga för utvecklingen av naturvetenskaperna i första hand fysik men också för t.ex. statistik. En alltför hård anknytning till tillämpningarna kan hindra skapandet av nya abstrakta matematiska teorier som visar sig vara effektiva. Den låser fantasin.

Vi kom väl till den slutsatsen att båda sätten att se matematiken hade sina förtjänster och att någon form av kombination vore önskvärd och det bör kunna låta sig göras på något sätt. Att i undervisningen låta tillämpningarna vara ett avstamp för utveckling av matematiska teorier samtidigt som man klargör de abstrakta sambanden mellan matematiska begrepp, metoder och teorier. Innehåller dagens matematikundervisning i Sverige tillämpningar på någorlunda komplicerade vardagsproblem? Bevisar man satser och formulerar man definitioner? Jag vet inte men hoppas att så är fallet.

Det var under arbetet med denna text som jag erinrade mig diskussionerna med min kinesiska kollega. Den ursprungliga idén var emellertid något helt annat. En före detta student berättade att han nyligen utan framgång hade försökt sätta sig in i Gödels teorier. Jag tänkte att jag kanske skulle kunna hitta ett sätt att göra dem begripliga. Men det var för svårt för mig. Abstraktionsnivån är mycket hög och resonemangen är alltför komplicerade. Jag fick ge upp. Istället blev det denna lilla exposé kring diskussionerna kring matematikens grundvalar. Om ni har tid och lust så håll till godo!

Växjö på Mors dag 2026
Anders Tengstrand

Euklides *Elementa* – ett försök att ge matematiken struktur

*Om Euklides misslyckas med att tända
din ungdomliga entusiasm så är du inte född
att bli en vetenskaplig tänkare.
Albert Einstein (1879-1955)*

*Det är chockerande att unga människor ska
förvirra sina hjärnor med enbart logiska subtiliteter,
att försöka förstå beviset av ett självklart fakta
med hjälp av något som är lika ... självklart.
Oliver Heaviside (1850-1925)*

Är en matematisk sanning odiskutabel? Kan vi lita på den? Hur hänger olika matematiska satser samman? Kan de inordnas i någon form av system där det framgår hur olika satser beror av varandra? Hur beskriver man matematiska begrepp med tillräcklig precision?

Dessa frågor rör matematikens grundvalar och förr eller senare måste vi som arbetar med matematik på något sätt ta ställning till dem. Det gäller inte minst om man vill tradera ett matematiskt innehåll. Frågorna

berör i hög grad den som undervisar i matematik. Men de angår också forskare. Hur ska jag veta att de resultat jag kommit fram till är korrekta? En matematisk sanning ska ju vara något absolut. Matematiska satser får inte vara lösa påståenden. De ska kunna härledas med logisk stringens. Vad menar vi med det?

Det första systematiska försöket att tackla dessa frågor finns i Euklides *Elementa* från 300-talet före vår tideräknings början. Den har omnämnts vid många tillfällen i mina texter. Vi ska titta lite närmare på uppbyggnaden.²

Omfattning *Elementa* är en sammanfattning av den tidens matematiska kunnande. Vetenskaplig matematik var på den tiden i det närmaste synonymt med geometri. Verket består av 13 böcker och det är i det första kapitlet som principerna för verkets uppbyggnad introduceras. I det ges grundläggande definitioner, fem postulater, fem grundsatser, kongruensfallen, satser om vinklar, bestämning av areor av polygoner samt Pythagoras sats. De övriga kapitlen behandlar satser om cirklar, talteori i geometrisk form, geometrisk algebra som innehåller bl.a. kvadrerings- och konjugatreglerna också de i geometrisk form, beräkning av volymer samt de regelbundna polyedern.

Definitionerna Den första boken inleds med 23 definitioner. Euklides börjar med att definiera begreppen punkt, linje, sträcka och plan. En punkt är något som inte kan delas. En linje är en längd utan bredd vars ändar är punkter. En sträcka är en linje som ligger jämnt mellan punkterna. På liknande sätt definieras yta och plan. För mig är dessa definitioner långt ifrån tillfredsställande och definitionen av sträcka begriper jag inte. Men om man utgår från dessa grundläggande begrepp så är övriga definitioner klara och tydliga.

Postulat och grundsatser Euklides utgår från fem postulater. De är utgångspunkterna för framställningen och används i bevisen. De är egenskaper hos de objekt han studerar och de behöver inte bevisas.

Postulat 1. Genom två punkter går precis en rät linje.

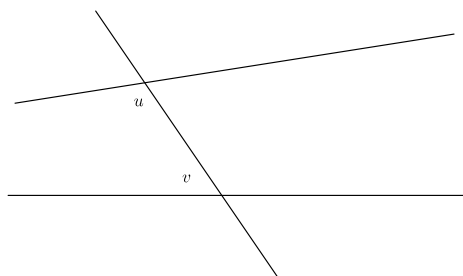
Postulat 2. En sträcka kan förlängas till en sträcka av godtycklig längd.

Postulat 3. Kring en punkt kan man beskriva en cirkel med en given sträcka som radie.

Postulat 4. Alla räta vinklar är lika med varandra.

Postulat 5. Om två räta linjer skärs av en tredje och om summan av två inre vinklar på samma sida om den skärande linjen är mindre än två

²Framställningen är mycket översiktlig. En mer detaljerad framställning finns i *Åtta kapitel om geometri. Elementa* i sin helhet finns på länken aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html.



Figur 1: En illustration till det femte postulatet. Summan av de båda vinklarna u och v är mindre än två räta och de båda räta linjerna skär varandra till vänster om den tredje linjen.

räta, så skär de båda linjerna varandra på samma sida om de dras ut tillräckligt långt.

Vi noterar att det femte postulatet är betydligt mer komplicerat än de fyra övriga. Det illustreras i figur 1 och vi återkommer till det senare. Euklides utgår också från fem mer allmänna grundsatser.

Grundsats 1. Två ting som båda är lika med ett tredje är också lika med varandra

Grundsats 2. Om lika adderas till lika blir summorna lika.

Grundsats 3. Om lika subtraheras från lika är skillnaderna lika.

Grundsats 4. Ting som är identiska med varandra är också lika med varandra.

Grundsats 5 Det hela är större än sina delar.

Postulaten och grundsatserna kallas ofta axiom.

Satserna Efter de inledande definitionerna och axiomen bevisas satserna. Ordningen mellan satserna är viktig och de numreras. Vill vi visa t.ex. sats 15 får vi använda axiomen och satserna 1-14 och inga andra. Bevisen är rent deduktiva. Någon diskussion om vilka idéer som ligger bakom ges inte. I varje steg hänvisas till det axiom eller den sats som utnyttjas och när man nått fram till det det önskade resultatet avslutas beviset med VSB som betyder Vilket Skulle Bevisas.

För att illustrera framställning går vi igenom beviset av Sats I.5 d.v.s. sats 5 i bok I. Vi skriver först upp de fyra första satserna som vi får an-

vända oss av.

Sats I.1. Att på en given sträcka konstruera en liksidig triangel.

Sats I.2. Att från en given punkt dra en sträcka lika med en given sträcka.

Sats I.3. Att från den större av två givna sträckor avskära en sträcka lika med de mindre.

Sats I.4. Om två sidor och mellanliggande vinkel i en triangel är lika med motsvarande element i en annan triangel så är trianglarna kongruenta.

De tre första satserna är konstruktionsuppgifter. Vid konstruktioner får man bara använda sig av en ograderad linjal och passare. Först beskriver Euklides hur konstruktionerna utförs och därefter bevisar han att resultatet är korrekt. Den fjärde satsen kallas första kongruensfallet och tidigare har man definierat begreppet kongruens på följande sätt: Två trianglar säges vara kongruenta om motsvarande sidor och vinklar är lika stora. Nu formulerar och bevisar vi sats I.5 och hänvisar till figur 2.

Sats I.5. Vinklarna vid basen i en likbent triangel är lika stora.

GIVET: En triangel ABC där AB är lika med AC .

PÅSTÅENDE: Vinkeln ABC är lika med vinkeln ACB .

BEVIS: Konstruera punkterna D och E på förlängningarna av AB respektive AC . (Postulat 2)

Låt F vara en punkt på AD mellan B och D och konstruera en punkt G på AE sådan att AG är lika med AF . (Sats 1.2)

Betrakta nu trianglarna ABG och ACF .

Sidan AB är lika med sidan AC enligt förutsättningen.

Sidan AG är lika med sidan AF enligt konstruktionen.

Vinkeln BAG är identisk med och därmed lika med vinkeln CAF . (Grundsats 4)

Alltså är trianglarna ABG och ACF kongruenta. (Sats I.4)

Alltså gäller att sidan BG är lika med sidan CF , att vinkeln ABG är lika med vinkeln ACF och att vinkeln AGB är lika med vinkeln AFC .

Betrakta trianglarna BFC och CGB .

Enligt förutsättningen är sidan AB lika med sidan AC .

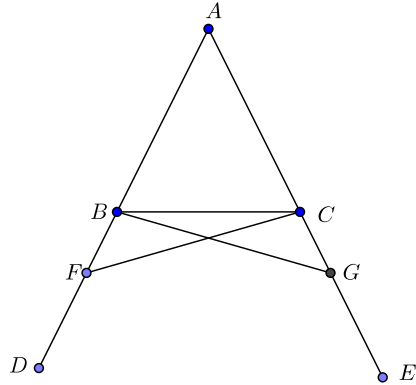
Enligt konstruktionen är sidan AF lika med sidan AG .

Då är sidan BF lika med sidan CG . (Grundsats 3)

Sidan BG är lika med sidan CG enligt vad vi nyss bevisat.

Vinkeln BFC är lika med vinkeln CGB enligt vad vi nyss bevisat.

Då är trianglarna BFC och CGB kongruenta. (Sats 1.4)



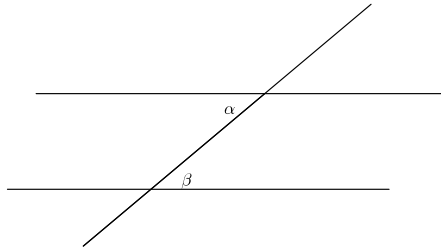
Figur 2:

Alltså är vinkeln FBC lika med vinkeln GCB .
 Men vinkeln ABC är skillnaden mellan två räta och vinkeln FBC och vinkeln ACB är skillnaden mellan två räta och vinkeln GCB . Alltså vinkeln ABC lika med vinkeln ACB .
 (Grundsats 3)
 VSB

Beviset saknar som jag tidigare nämnt kommentarer. Varför gör vi så här? Den frågan varken ställs eller besvaras. Framställningen är klinisk. Stilen är ren och upprepningarna är legio. Exaktheten är viktigare än läsbarheten. Det karakteriserar alla de tretton kapitlen. Just Sats 1.4 ansågs vara speciellt svår. Den brukade kallas för åsnebryggan. Förstod man den så ansågs man kunna ta sig igenom hela *Elementa*.

Det femte postulatet Som vi tidigare nämnt intar det femte postulatet en särställning bland axiomen. Det är betydligt mer komplicerat än de övriga. Redan under antiken ansåg flera matematiker att det borde kunna härledas utifrån de fyra övriga. Euklides måste själv haft sådana tankar. Han undviker det i det längsta och använder det först i Sats I.29 som illustreras i figur 2 med bildtext. I Sats I.32 visar han att vinkelsumman i en triangel är lika med två räta. Det verkar som om den

egenskapen hos en triangel hänger samman med det femte postulatet.



Figur 3: I figuren skärs två parallella räta linjer av en tredje. De båda vinklarna α och β kallas alternatvinklar och Sats I.29 säger att de är lika stora, I beviset används för första gången i *Elementa* det femte postulatet.

Problemet med det femte postulatet skulle komma att utmana matematiker i århundraden och det fick sin lösning först under första hälften av 1800-talet. I försöken att bevisa det femte postulatet omformulerade man det och fann att det var ekvivalent med följande påstående som också kallas parallellpostulatet:

Genom en punkt utanför en rät linje går precis en rät linje parallell med den givna.

Lösningen skulle komma att ändra synen på matematiken och det kom att ge upphov till en diskussion om matematikens grundvalar – en diskussion där Kurt Gödels (1906-78) sats om ofullständigheten av axiom-system var ett av de viktigaste bidragen – kanske det viktigaste.

En icke-euklidisk geometri upptäcks

*Från ingenting skapade jag en helt ny värld.
János Bolyai (1802-60)*

*Det finns ingen gren av matematiken, hur abstrakt den än må vara,
som inte någon gång kommer att tillämpas på problem i den verkliga
världen.*

Nikolai Lobachevskij (1792-1856)

Euklides femte postulat kom att sysselsätta många matematiker under århundraden.³ En av dem var Proklos (412-85) som var en av de ledande nyplatonikerna. Han såg sig som en försvarare av hedendomen och var kunnig i magi. Han kommenterade Platons dialoger och Euklides *Elementa*. Proklos var starkt kritisk till det femte postulatet och gjorde allvarliga försök att bevisa det men det visade sig att hans bevis stödde sig på ett påstående som är ekvivalent med parallellpostulatet. Proklos hade alltså ersatt det omdiskuterade postulatet med ett annat.

Alla de försök som gjorts av matematiker under århundraden visar samma mönster. Man ersätter medvetet eller omedvetet Euklides postulat med annat som inte bevisas. Den persiske filosofen, matematikern

³En mer detaljerad framställning av icke-euklidisk geometri finns i *Åtta kapitel om geometri*.

och poeten Omar Khayyam (1041-1131) och den arabiske matematikern Eddin al-Tussi (1201-74) gjorde försök som inte löste problemet men som fördjupade det. Ett annat viktigt bidrag för att skapa djupare förståelse för parallellpostulatet gjordes av jesuitprästen Girolami Saccheri (1667-1733) och hans idéer utvecklades av Johann Heinrich Lambert (1722-77) och Adrienne-Marie Legendre (1752-1833), som båda var ansedda matematiker. De lyckades visa följande påstående.

Av de fyra första postulaten i Euklides *Elementa* följer att vinkelsumman i en triangel är mindre än eller lika med två rätta,

Saccheris, Lamberts och Legendres så kallade misslyckanden hade medfört att frågan om parallellpostulatet fördjupats och strukturerats. En del matematiker börja acceptera tanken på att det finns en annan geometri där de fyra första av Euklides postulat gäller men inte det femte. I den skulle det genom en given punkt utanför en given rät linje gå flera rätta linjer som inte skär den givna. Man hade tidigare visat att de fyra första postulaten medför att det måste finnas minst en sådan rät linje. En tysk juridikprofessor Ferdinand Karl Schweikart (1780-1869) hävdade att det finns två geometrier – den vanliga euklidiska och en annan geometri som han kallade astral. Hans tankar utvecklades av hans brorson Franz Adolf Taurinus (1794-1874). Den tidens störste matematiker Carl Friedrich Gauss (1777-1855) hade också börjat tänka i de banorna och skrev i ett brev till Taurinus

Antagandet att summan av de tre vinklarna i en triangel är mindre än 180° leder till en egendomlig teori, helt skild från vår, men helt konsekvent, och jag har utvecklat den för mitt eget nöje, så att jag kan lösa varje problem i den med undantag av att bestämma en konstant, som inte kan anges a priori.

De som helt kom att bryta med det gamla och utarbeta en ny geometri var Nikolaj Ivanovitj Lobatjevskij (1793-1856) och Janos Bolyai (1802-60).

Lobatjevskij var professor vid universitetet i Kazan i Ryssland där han under en tid var uppskattad rektor. Han ökade effektiviteten i förvaltning, rustade upp biblioteket och genom ett kraftfullt ingripande räddade han studenter och lärare undan en pest som grasserade i omgivningen. I februari 1826 håller han en föreläsning där han för första gången utvecklar sina tankar kring en icke-euklidisk geometri. I den kan man genom en given punkt utanför en given rät linje dra fler än en rät linje som inte skär den givna. I den är vinkelsumman i en triangel mindre än 180° . Han publicerar därefter ett antal artiklar i ämnet.

Janos Bolyai var ungrare. Hans far, Farkas Bolyai, var god vän med Gauss och hade bidragit med intressanta arbeten om parallellpostulatet. Janos visade tidigt stora anlag för musik och var en skicklig violinist. Han var också en god fäktare. Hans matematiska utveckling var egenartad. Först vid 10 års ålder lärde han sig grundläggande aritmetik men sedan gick det fort. När han var tretton år behärskade han differential- och integralkalkylen och när han var femton skickades han till Wien för att studera till ingenjör. Han avslutade studierna 1822. Under sin studietid blev han intresserad av parallellpostulatet och arbetade trots faderns varningar vidare med det. Han presenterade sitt arbete 1831 som ett appendix till en lärobok i ren matematik som hans far skrivit. Boken och appendixet var skrivna på latin och titeln på appendixet är i svensk översättning *Den absoluta vetenskapen om rummet*.

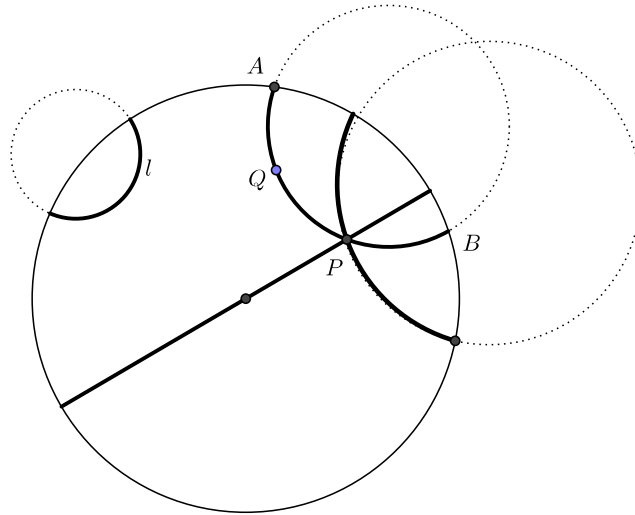
Lobatjevskijs och Bolyais arbeten har ungefär samma innehåll men Bolyais framställning är mer kompakt och svårtillgängligare. I den nya geometrin, som kommer att kallas hyperbolisk, kommer de bland annat fram till följande:

- I en hyperbolisk geometri är vinkelsumman i en triangel mindre än två rätta.
- I en hyperbolisk geometri är likformiga trianglar kongruenta.
- I en hyperbolisk geometri finns inga rektanglar.

Man frågar sig: Finns det verkligen en sådan geometri? Hur ser den i så fall ut? Kan det möjligen vara så att axiomsystemet för den nya geometrin kommer att ge upphov till motsägelser?

Svaret på den sista frågan är att om den hyperboliska geometrin skulle innehålla motsägelser så gör också den euklidiska det. Matematiker som Eugenio Beltrami (1835-99), Felix Klein (1849-1925) och Henri Poincaré (1854-1912) skapade modeller av den hyperboliska geometrin med hjälp av den euklidiska. Begreppen "plan" och "rät linje" får en annan betydelse än de vi är vana vid. I Kleins modell är planet det inre av en cirkel och de rätta linjerna är cirkelbågar som skär vår cirkel vinkelrätt samt diametrar. Avståndsbegreppet blir inte det vanliga. Modellen uppfyller Euklides fyra första postulat men genom en given punkt utanför en given "rät linje" går ett helt knippe av "räta linjer" som inte skär den givna. En bild av Kleins modell finns på figur 4.

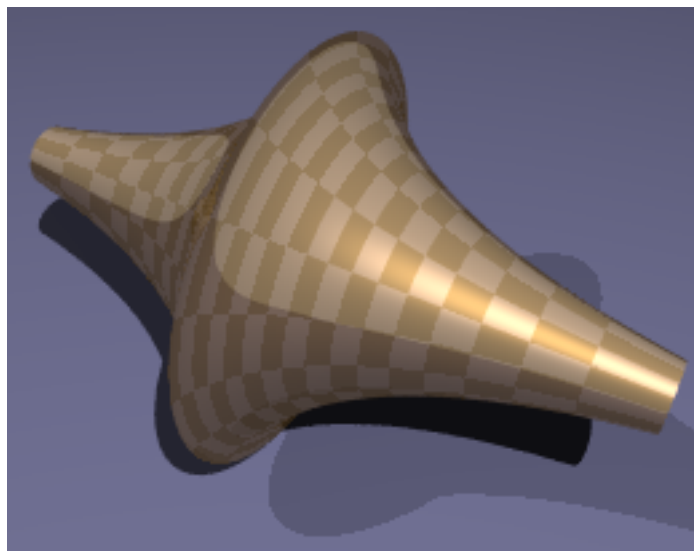
Ett annat sätt att realisera den hyperboliska geometrin är genom en s.k. pseudosfär som uppkommer då en traktrix roterar kring sin asymptot. En traktrix eller en släpkurva, som den också kallas, är en kurva som skär alla cirklar med en given radie och med medelpunkten på en



Figur 4: I figuren illustreras Kleins modell av den hyperboliska geometrin. Punkterna i modellen är punkterna inuti cirkeln. "Räta linjer" är cirkelbågar som skär cirkeln under räta vinklar samt diametrar. En "rät linje" l och en punkt P är givna. Genom P går flera "räta linjer" genom P som inte skär l . Vi har ritat upp tre - två cirkelbågar och en diameter. Vi kan nämna att det hyperboliska avståndet mellan två punkter P och Q är lika med $\ln\left(\frac{AP}{BP} / \frac{AQ}{BQ}\right)$ där A och B är kordan PQ :s skärningspunkter med cirkeln. AP, BP, AQ och BQ är de vanliga euklidiska längderna av motsvarande sträckor.

rät linje under räta vinklar. En pseudosfär visas i figur 5. Punkterna i denna modell av den hyperboliska geometrin är punkterna på pseudosfären och de "räta linjerna" är de geodetiska linjerna d.v.s. de kurvor på ytan som minimerar avstånden mellan punkter.

Det finns alltså en icke-euklidisk geometri som vi kallar hyperbolisk. Den uppfyller Euklides fyra första postulater men det femte ersätts med "Genom en given punkt utanför en given rät linje går flera räta linjer som inte skär den givna." Man brukar också tala om en elliptisk geometri. Den realiserar på en sfär och de "räta linjerna" svarar mot storcirklar. Den geometrin uppfyller inte de fyra första postulaten och en motsvarighet till det femte är "Genom en given punkt utanför en given rät linje skär alla räta linjer den givna." I den geometrin är vinkelsumman i triangel



Figur 5: En pseudosfär

större än två räta. Men de fyra första postulaten måste modifieras. Vi går inte närmare in på hur man gör det.

Under arbetet som ledde fram till den icke-euklidiska geometrin granskades Euklides axiomsystem i detalj och man konstaterade att postulaten måste kompletteras. Euklides hade tagit en del saker för givna utan att skriva upp dem som axiom. Ett fullständigt axiomsystem gavs av David Hilbert (1862-1943) i arbetet *Grundlagen der Geometrie* som gavs ut 1899.⁴

Till slut kan det anmärkas att den geometri som Albert Einstein behövde för sin relativitetsteori är icke-euklidisk.

⁴En genomgång av Hilberts axiomsystem finns i *Åtta kapitel om geometri*.

Ett nytt sätt att se matematiken

*Matematiken är ett spel som spelas enligt
vissa enkla regler med meningslösa tecken på ett papper.
David Hilbert (1862-1943)*

Upptäckten av den icke-euklidiska geometrin fick många matematiker att ändra synen på matematiken. I ett berömt tal vid den stora internationella matematikkonferensen i Paris år 1900 framhöll en av den tidens mest ansedda matematiker David Hilbert att upptäckten av den icke-euklidiska geometrin var en av de främsta matematiska framstegen under 1800-talet. Man kan nu se matematiken som ett spel där axiomen både anger spelreglerna och karakteriserar de begrepp man arbetar med. Formellt sett behöver det inte finnas någon anknytning till den så kallade verkligheten. Varje axiomsystem ger upphov till en matematisk teori. Vissa krav bör man ställa på ett axiomsystem:

- Det skall vara motsägelsefritt d.v.s. från axiomen skall man inte kunna härleda både ett påstående och dess motsats.
- Inget av axiomen ska kunna härledas av de övriga.
- Det ska vara fullständigt d.v.s. man ska med hjälp av axiomen kunna avgöra om ett påstående inom teorin är sant eller inte.

Av dessa tre villkor är naturligtvis det första helt nödvändigt. Det andra är mer av estetisk karaktär. Om det första villkoret är uppfyllt så kan ett onödigt axiom inte göra någon skada. Det tredje visar sig vara problematiskt och vi återkommer till det.

Parallellt eller kanske på grund av denna nya syn på matematiken utvecklades den abstrakta algebran. Man skapade begrepp som grupper, ringar och kroppar. En grupp definieras på följande sätt:

En mängd G är en grupp om man till varje par (a, b) av element i gruppen har ordnat ett element $a \star b$ i G sådant att

- $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$ för alla a, b och c i G
- det finns ett element e i G sådant att $a \star e = e \star a = a$ för alla a i G
- till varje a i G finns ett element a' i G sådant att $a \star a' = a' \star a = e$.

Man kan bevisa satser om grupper utan att ha någon reell uppfattning om vilka elementen i G är. Elementen kännetecknas av de villkor som ska vara uppfyllda. De resultat som man kommer fram till kan användas på olika mer konkreta objekt. Exempel på en grupp är mängden \mathbf{R} av reella tal där \star är $+$, men det finns många andra. Det finns t.ex. olika grupper av avbildningar. Man kan visa satser som gäller för en godtycklig grupp och de satserna gäller naturligtvis för alla typer av grupper t.ex. för \mathbf{R} och för olika grupper av avbildningar. Matematiken får en klarare struktur. Gemensamma egenskaper framhävs och det som skiljer blir tydligt.

Det skulle föra alltför långt att utveckla gruppbegreppet ytterligare. Denna mycket korta beskrivning får ge antydning om ett nytt tänkesätt. Nya abstrakta strukturer som ring och kropp skapades under decennierna före och efter 1900. De skulle bli viktiga redskap för att förstå lösbarheten av algebraiska ekvationer och gruppbegreppet är centralt i både relativitetsteorin och i den nya kvantmekaniken. Man skapade också en teori för oändligtdimensionella vektorrum som skulle bli oundgänglig vid utvecklingen av kvantmekaniken. Matematiker som Felix Klein (1849-1925), Emmy Noether (1882-1935), David Hilbert och John von Neumann (1903-57) gav viktiga bidrag för att utveckla matematiska strukturer.

Cantors transfinita aritmetik

Vi har fler gånger använt ordet mängd och de flesta har nog en intuitiv uppfattning av begreppet. Den som framför allt utvecklade mängdbe-

greppet var den tyske matematikern Georg Cantor (1845-1918). Han gör följande definition:

Med en "mängd" menar vi varje sammanfattning M av för vår syn och för vår tanke bestämda väldefinierade objekt m (som kallas element i M) till en helhet.

Med beteckningar uttrycker vi det på följande sätt:

$$M = \{m\}$$

I en serie omfattande sex artiklar i tidskriften *Mathematische Annalen* alla under titeln *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigen* utvecklar Cantor en teori för oändliga mängder som skulle bli både hylad och kritiserad. Den inleds av den definition av mängd som vi tidigare gett. I en tidigare artikel hade han visat att alla tal som är rötter till en algebraisk ekvation⁵ kan numreras. Det betyder att man till varje algebraiskt tal kan ordna ett naturligt tal så att två olika algebraiska tal tilldelas olika naturliga tal. Vi säger att de algebraiska talen är uppräknliga. Han visade i en annan artikel att de reella talen inte är uppräknliga. De algebraiska talen är i Cantors mening lika många som de naturliga talen men betydligt färre än de reella talen.

Innan vi går in på de mer allmänna diskussionerna om oändliga mängder ska vi visa att de rationella talen är uppräknliga och att de reella talen inte är det.

De rationella talen är uppräknliga

Jag har valt att ge två bevis för de rationella talens uppräknlighet. Det ena visas i figur 6 med bildtext. Det är väl det som vanligen förekommer i litteraturen om Cantors teorier. Det andra hittade jag på nätet och fann det intressant.

Påstående: De rationella talen är uppräknliga.

Vi visar första att de positiva rationella talen är uppräknliga.

Varje positivt rationellt tal r kan skrivas p/q där p och q är naturliga tal och där vi har förkortat bråket så långt som möjligt. Det betyder att $\gcd(p, q) = 1$. Framställningen av r som ett bråk p/q är då entydig.

Till det rationella talet $r = p/q$ ordnar vi det naturliga talet

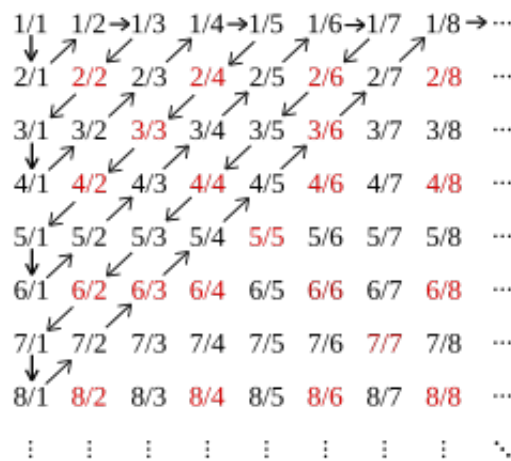
⁵En algebraisk ekvation har formen $p(x) = 0$ där $p(x)$ är ett polynom med heltalskoefficienter.

$n = 2^p 3^q$. Två olika par (p, q) ger då upphov till olika n .

Till varje rationellt tal $r = p/q$ har vi på detta viset ordnat ett naturligt tal n och till två olika rationella tal r ordnas alltid två olika naturliga tal n . Talen n bildar en delmängd av naturliga talen och vi kan räkna upp dem i storleksordning. Då kan också motsvarande rationella tal räknas upp (men det blir inte i storleksordning).

Låt nu r_1, r_2, r_3, \dots vara en uppräkningslista av de positiva rationella talen. De rationella talen består då av talet 0 och talen $\pm r_1, \pm r_2, \pm r_3, \dots$ och vi kan räkna upp dem på följande sätt:

$$0, r_1, -r_1, r_2, -r_2, r_3, -r_3, \dots$$



Figur 6: På den första raden har vi skrivit upp alla positiva rationella tal med nämnaren 1 i storleksordning, på den andra de med nämnaren 2, på den tredje de med nämnaren 3, o.s.v. Vi kan nu räkna upp de positiva rationella talen i den ordning som anges av pilarna i figuren. Ibland kommer man till ett tal som man redan räknat upp. Då hoppar man helt enkelt över det. De anges med rött. Nu kan alla rationella tal, positiva, negativa och 0, räknas upp på samma sätt som vi gjort i det andra beviset.

De reella talen är inte uppräknliga

Vi observerar att varje reellt tal har en decimalbråksutveckling $x.x_1x_2x_3\dots$ där x är ett heltal och talen x_1, x_2, x_3, \dots alla är något av talen 0,1,2,3,4,5,6,7,8

eller 9. Ett tal kan ibland ha två olika representationer. Vi har att

$$y = 0.x_1 \dots x_k 9999 \dots = 0.x_1 \dots x'_k 00000 \dots$$

där $x_k \neq 9$ och $x'_k = x_k + 1$. Vi väljer alltid den sista.

Påstående: De reella talen är inte uppräknliga.

Antag att de är uppräknliga. Då är också de reella talen mellan 0 och 1 uppräknliga och vi har en uppräknning $y_1, y_2, y_3, \dots, y_k, \dots$ av dem där

$$\begin{aligned} y_1 &= 0.x_{11}x_{12}x_{13} \dots x_{1k} \dots \\ y_2 &= 0.x_{21}x_{22}x_{23} \dots x_{2k} \dots \\ y_3 &= 0.x_{31}x_{32}x_{33} \dots x_{3k} \dots \\ &\vdots \\ y_k &= 0.x_{k1}x_{k2}x_{k3} \dots x_{kk} \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

Bilda talet

$$z = 0.z_1z_2z_3 \dots z_k \dots$$

där $z_k \neq x_{kk}$ för $k = 1, 2, 3, \dots$. För säkerhets skull väljer vi inte $z_k = 0$ eller $z_k = 9$. Talet z finns då inte med i vår uppräknning. Vi får en motsägelse och alltså är de reella talen inte uppräknliga.

Vi har här arbetat med oändliga mängder och vi har visat att till varje rationellt tal kan ordnas precis ett naturligt tal så att olika rationella tal tillordnas olika naturliga tal. Vi kan numrera de rationella talen. I någon mening är alltså de rationella talen lika många som de naturliga talen. Däremot kan vi inte på samma sätt jämföra de reella talen med de naturliga. De reella är fler. Man kan då ställa sig frågan

Finns det någon oändlig mängd som har fler element än de naturliga talen men färre än de reella?

Cantor antog att det inte finns någon sådan mängd och hans påstående kallas *kontinuumhypotesen*. Vi ska återkomma till den.

Transfinit aritmetik

Efter de båda artiklarna, där han visade att de algebraiska talen är uppräknliga och att de reella inte är det, övergick Cantor som vi tidigare nämnt att betrakta oändliga mängder i allmänhet. Han gör till en början följande definition:

Två mängder M_1 och M_2 säges ha samma mäktighet om man till varje element i M_1 kan ordna precis ett element i M_2 så att

- till olika element i M_1 ordnas olika element i M_2 och
- varje element i M_2 har blivit tillordnat något element i M_1 .

Att två mängder är lika mäktiga innebär alltså att man kan para ihop den ena mängdens element med den andras. Om en mängd är ändlig kan man ange antalet element med ett naturligt tal. För oändliga mängder är bilden mer komplicerad. En oändlig mängd kan ha samma mäktighet som en delmängd av sig själv. Så har till exempel mängden \mathbf{N} av naturliga tal samma mäktighet som de jämna naturliga talen. Vi kan ju para ihop dem på följande sätt:

$$1 \leftrightarrow 2 \quad 2 \leftrightarrow 4 \quad 3 \leftrightarrow 6 \dots k \leftrightarrow 2k \dots$$

Vi har ju faktiskt också visat att mängden av rationella tal \mathbf{Q} har samma mäktighet som \mathbf{N} .

Cantor inför nu s.k. transfinita tal. Alla mängder som är sinsemellan lika mäktiga tilldelas ett transfinit tal eller ett kardinaltal som betecknades med \aleph – den första bokstaven i det hebreiska alfabetet. Alla mängder som är lika mäktiga som mängden \mathbf{N} av naturliga tal tilldelas kardinaltalet \aleph_0 och alla mängder som har samma mäktighet som \mathbf{R} tilldelas kardinaltalet \aleph_1 . De säges ha kontinuerets mäktighet.

Cantor inför nu räkneoperationer och ordningsrelationer på de transfinita talen på följande sätt

Låt M och M' vara två oändliga mängder som har kardinaltalen \aleph respektive \aleph' .

Mängden $M + M'$ som består av alla element som ligger i någon av mängderna M och M' tilldelas kardinaltalet $\aleph + \aleph'$.

Mängden $M \times M'$ som består av alla par (x, x') där x och x' är element i M respektive M' tilldelas kardinaltalet $\aleph \cdot \aleph'$.

Vi säger att $M \prec M'$ om det finns en delmängd till M' som har samma mäktighet som M men där M och M' inte har samma mäktighet.

Det är lätt att övertyga sig om att $\aleph + \aleph = \aleph$ för alla kardinaltal \aleph för oändliga mängder. På samma sätt, som vi visade att de rationella talen är uppräknliga, kan vi visa att $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$. Eftersom de reella talen inte är uppräknliga har vi att $\aleph_0 \prec \aleph_1$ och kontinuumhypotesen säger att det inte finns ett kardinaltal \aleph sådant att $\aleph_0 \prec \aleph \prec \aleph_1$. Men

det var bara Cantors hypotes. Han anade att det var så. Det var inget han kunde bevisa.

Cantor definierade också kardinaltalet \aleph^{\aleph} och visade att $\aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1$. Det skulle föra alltför långt att göra det här men det visar hur långt han utvecklade sin transfinita aritmetik.

Kritik, visioner och tillnyktring

*Ingen ska fördriva oss från det paradiset som Cantor skapat.
David Hilbert (1862-1943)*

*Om man kan kalla mängdläran för ett paradiset kan man lika gärna kalla
den för ett skämt.
Ludwig Wittgenstein (1889-1951)*

*Antingen är matematiken för stor för den mänskliga hjärnan eller så är
den mänskliga hjärnan mer än en maskin.
Kurt Gödel (1906-78)*

*Let it be, let it be, let it be, let it be
Whisper words of wisdom
Let it be.
The Beatles (1970)*

Cantors mängdlära var och är kontroversiell. Den fränaste kritikern var den tyske matematikern Leopold Kronecker (1823-91) som sade "Jag vet inte vad som utmärker Cantors teori – filosofi eller teologi – men jag är säker på att den inte innehåller någon matematik." Den franske matematikern Henri Poincaré (1854-1912) fällde följande omdöme: "Senare generationer kommer att betrakta mängdlära som en barnsjukdom".

Men många matematiker anammade mängdläran och använde den.

Den matematik som Kronecker stod för var för många alltför begränsande. Kronecker krävde att alla matematiska objekt skulle kunna konstrueras i ett ändligt antal steg med de hela talen som utgångspunkt. Hans yttrande "Gud skapade de hela talen - allt annat är människoverk" karakteriserar hans inställning till matematiken. Kronecker accepterade inte heller motsägelsebevis. Det var kanske inte så konstigt att Kroneckers matematiska värld blev för trång för flera matematiker. Många av de teorier, som visat sig fruktbara inom algebran och analysen och som haft stor betydelse för bl.a. den nya fysiken, måste överges om man skulle följa den väg Kronecker anvisade. Men kritiken blev besvärande då det visade sig att det fanns inneboende motsägelser i mängdläran om man använde den utan begränsningar. Vi återkommer till det.

Hilbert var en av de ivrigaste anhängarna av Cantors teorier. I hans berömda tal på den internationella matematikkonferensen 1900 beskrev han 23 problem som han ansåg centrala för matematikens utveckling. Det första är kontinuumhypotesen och det andra är följande:

Bevisa att aritmetikens axiom är konsistenta d.v.s. att aritmetiken är ett formellt system utan motsägelser.



Figur 7: Giuseppe Peano

Geometrin hade sedan länge haft ett axiomsystem utifrån vilket man kunde härleda en flora av satser som var användbara eller estetiskt tilltalande eller bådadå. Kan man göra samma sak med den andra fundamentala grenen av matematiken – aritmetiken? Den italienske matematikern Giuseppe Peano (1859-1932) hade 1889 utformat ett sådant för de naturliga talen. Axiomsystemet bestod av följande fem postulater:

1. Det finns ett tal som vi kallar 0.
2. Varje tal x har en efterföljare som vi kallar $p(x)$.
3. Olika tal har olika efterföljare d.v.s. om $p(x) = p(y)$ så måste $x = y$.
4. varje tal utom 0 är efterföljare till något tal.
5. Om M är en mängd som innehåller 0, och som är sådan att om x ligger i M så måste $p(x)$ också ligga i M , så består M av alla naturliga tal.

De fyra första utgångspunkterna - axiomen - är en beskrivning av hur vi en gång som barn lärde oss de naturliga talen genom en form av uppräkningsprincipen. Det femte är induktionsprincipen. Med hjälp av dessa axiom

kan man nu införa operationerna addition, multiplikation och subtraktion, härleda de vanliga räknelagarna, bevisa satser inom talteorin och införa de rationella och de reella talen.

Peanos arbete var inspirerat av ett verk av den tyske logikern och matematikern Gottlob Frege (1848-1925) som år 1884 publicerade *Grundlagen der Arithmetik* där han med utgångspunkt från bl.a. Cantors teorier försökte bygga upp de hela talen utifrån logik och mängdlära. Den formella logiken hade tidigare utvecklats av framför allt George Boole (1815-64). Han studerade vad vi kallar satslogik och införde vad som nu kallas Boolesk algebra – en gren av matematiken som haft en avgörande betydelse inom teorin för elektroniska kretsar. Den handlar om påståenden som antingen är sanna eller falska. Om P och Q är två sådana påståenden kan man bilda nya påståenden ” P eller Q ” och ” P och Q ” där det första är sant om minst ett av P och Q är sant och det andra om både P och Q är sanna. Man kan också bilda påståendet ”icke P ” som är sant precis då P är falskt. Man kan härleda räkneregler och räkna med påståenden och på det sättet få en Boolesk algebra. Frege utvecklade satslogiken till vad som kallas predikatlogik. I den arbetar man med påståenden $P(x)$ som kan vara sanna eller falska beroende på x som väljs ur en mängd M . Man bildar påståenden av typen ”det finns ett x i M sådant att $P(x)$ är sant” och ” $P(x)$ är sant för alla x i M ”.



Figur 8: Gottlob Frege

Frege använder sig av ett komplicerat beteckningssystem. Verket är svårläst och formlerna är legio. Efter ett antal förberedelser definierar han talet 0 på följande sätt

$$anz(0) := anz(ext \in (\in = \neg \in))$$

vilket med Freges beteckningar betyder att 0 svarar mot det påstående som är lika med sin egen negation. Sådana påståenden finns ju inte. Det verkar för den vanliga läsaren minst sagt omständligt men vitsen är att inte ta något för givet utan att visa att man genom manipulationer med logiska symboler kan definiera de naturliga talen samt addition och multiplikation av dem. Talen finns inte från början. De ska bildas utifrån logiken. Det är då viktigt att hålla tungan rätt mun och inte utnyttja sådant som av gammal vana verkar självklart.

Frege

Frege's verk är som vi tidigare nämnt mycket svårläst och det blev inte särskilt uppmärksammat. En som läste det var alltså Peano. En annan var Bertrand Russel. Tillsammans med Alfred North Whitehead (1861-1947) publicerade han det stora verket *Principia Mathematica* i tre band åren 1910-13. De försökte visa att aritmetiken är en del av



Figur 9: Bertand Russel och Alfred North Whitehead

logiken. Det är ett verk i samma anda som Freges och det domineras av symboler.

Det kan vara av intresse att se hur de definierade de naturliga talen $0, 1, 2, 3, \dots$. De utgick ifrån den mängd som inte har några element och som kallas den tomma mängden. Den betecknas de med \emptyset . Talet 0 svarar mot mängden \emptyset . Mängden vars enda element är den tomma mängden \emptyset betecknas med $\{\emptyset\}$ och alla mängder som har samma mäktighet som den svarar mot talet 1 . Talen $0, 1, 2, 3 \dots$ svarar mot de mängder som har samma mäktighet som

$$\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}, \dots$$

Principia Mathematica blev betydligt mer uppmärksammas än Freges *Grundlagen der Arithmetik* men den är minst lika svärgenomtränglig för en genomsnittlig matematiker. I figur 10 visas en sida med beviset för att $1 + 1 = 2$.

I sin framställning använde sig Russel och Whitehead av mängdbegreppet. Det visar sig att om man bildar mängder utan några begränsningar hamnar man i paradoxer. Antag att \mathbf{M} är mängden av alla mängder. Den är ju själv en mängd och alltså är den ett element i sig själv. Betrakta nu mängden \mathbf{M}' av alla mängder som inte är element i sig själv. Många mängder är ju sådana. De naturliga talen \mathbf{N} är ju t.ex. inte ett naturligt tal. Hur är det nu med mängden \mathbf{M}' ? Är den ett element i sig själv eller inte? Antag att \mathbf{M}' är ett element i sig själv. I så fall tillhör inte \mathbf{M}' sig själv och vi har fått en motsägelse. Om å andra sidan \mathbf{M}' inte är ett element i sig själv så är den ett element i sig själv. Situationen är orimlig och vårt sätt att bilda mängder ger upphov till en paradox. Russel och Whitehead insåg detta och införde olika typer av

(H)

362

PROLEGOMENA TO CARDINAL ARITHMETIC

[PART II

*54·42. $\vdash :: \alpha \in 2 . \supset :: \beta \subset \alpha . \mathfrak{H}! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv . \beta \in \iota''\alpha$

Dem.

$\vdash . *54·4 . \supset \vdash :: \alpha = \iota'x \cup \iota'y . \supset ::$

$\beta \subset \alpha . \mathfrak{H}! \beta . \equiv : \beta = \Lambda . \vee . \beta = \iota'x . \vee . \beta = \iota'y . \vee . \beta = \alpha : \mathfrak{H}! \beta :$

[*24·53·56.*51·161] $\equiv : \beta = \iota'x . \vee . \beta = \iota'y . \vee . \beta = \alpha \quad (1)$

$\vdash . *54·25 . \text{Transp.} *52·22 . \supset \vdash : x \neq y . \supset . \iota'x \cup \iota'y \neq \iota'x . \iota'x \cup \iota'y \neq \iota'y :$

[*13·12] $\supset \vdash : \alpha = \iota'x \cup \iota'y . x \neq y . \supset . \alpha \neq \iota'x . \alpha \neq \iota'y \quad (2)$

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash :: \alpha = \iota'x \cup \iota'y . x \neq y . \supset ::$

$\beta \subset \alpha . \mathfrak{H}! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv : \beta = \iota'x . \vee . \beta = \iota'y :$

[*51·235] $\equiv : (\mathfrak{H}z) . z \in \alpha . \beta = \iota'z :$

[*37·6] $\equiv : \beta \in \iota''\alpha \quad (3)$

$\vdash . (3) . *11·11·35 . *54·101 . \supset \vdash . \text{Prop}$

*54·43. $\vdash :: \alpha , \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54·26 . \supset \vdash :: \alpha = \iota'x . \beta = \iota'y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

[*51·231] $\equiv . \iota'x \cap \iota'y = \Lambda .$

[*13·12] $\equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (1)$

$\vdash . (1) . *11·11·35 . \supset$

$\vdash :: (\mathfrak{H}x , y) . \alpha = \iota'x . \beta = \iota'y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \quad (2)$

$\vdash . (2) . *11·54 . *52·1 . \supset \vdash . \text{Prop}$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

*54·44. $\vdash :: z , w \in \iota'x \cup \iota'y . \supset . . . \phi(z , w) : \equiv . \phi(x , x) . \phi(x , y) . \phi(y , x) . \phi(y , y)$

Figur 10: En sida ur *Principia Mathematica* med beviset för $1 + 1 = 2$. Beviset är inramat.

mängder och en ny reviderad upplaga av *Principia Mathematica* kom ut 1925-27.⁶ Freges *Grundlagen der Arithmetik* och Russels och Whiteheads *Principia Mathematica* är båda försök att bygga upp aritmetiken utgående från logiken. Men de ger inga svar på Hilberts frågor om konsistens och fullständighet. Den som skulle ge de avgörande bidragen till den problematiken var Kurt Gödel.

Kurt Gödel⁷ växte upp i Brünn som då var huvudstad i Mähren, en av de stater som senare skulle bilda Teckoslovakien. Nu heter staden Brno och är den näst största staden i Tjeckien. Efter avslutade gymnasiestudier flyttade han 1924 till Wien där han så småningom kom att delta i den exklusiva krets av unga matematiker och filosofer som leddes av matematikern Hans Hahn (1879-1934). Gödels huvudinriktning kom att bli matematisk logik. Den unge filosofen Ludwig Wittgensteins var då högaktuell. Han hade 1921 givit ut *Tractatus logico-philosophicus* - ett kryptisk arbete på 75 sidor som han skrev efter att ha läst *Principia Mathematica*. Det arbetet kom att bli ett av ämnena för diskussioner inom Hahns krets.⁸ Kanske var det dessa samtal om matematikens grundvalar som inspirerade Gödel att arbeta med de två frågor om konsistens och fullständighet som Hilbert ställt. Han publicerade sina resultat 1931 i artikeln *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter System* ("Om formellt oavgörbara satser i *Principia Mathematica* och besläktade system") som gavs ut i kretsens egen tidskrift *Monatshefte für Mathematik und Physik*. Resultatet var revolutionerande. Gödel visade att i varje axiomsystem som omfattar aritmetiken finns det påståenden som varken kan bevisas eller motbevisas och det gäller också frågan om ett axiomsystems motsägelsefrihet. Hilberts storartade planer hade grusats. Men Gödel såg det inte på det sättet. Han såg det positivt. Vi kan inte ersätta det mänskliga tänkandet med en maskin som kan ge svar på alla frågor. Det dyker alltid upp något i ett logisk system som systemet inte kan svara på. Matematiken har inte något slut.

Gödel tog upp två påståenden eller hypoteser som ingen ditintills varken hade kunnat bevisa eller motbevisa. Mot bakgrund av Gödels resultat kunde man misstänka att de helt enkelt inte går att visa utifrån aritmetikens axiomsystem. Den ena hypotesen var Goldbachs förmodan som säger att varje jämnt naturligt tal som är större än eller lika med 4

⁶En mer populär formulering av paradoxen med ungefär samma innebörd är Epimenides paradox. Epimenides levde omkring 600 f.Kr. Han var från Kreta och var alltså en kretensare. Han sade "Alla kretensare ljugar." Eftersom Euripedes är kretensare så ljugar han och talar alltså sanning. Vi har en paradox.

⁷Jag ha hämtat mycket av texten om Gödel ur Stephen Buidianskys biografi *Kurt Gödel. Mot förnuftets gränser*. Den ger förutom en beskrivning av Gödels liv och verk en intressant bild av miljöerna i Wien och Princeton

⁸Wittgensteins skulle senare ta avstånd från *Tractatus logico-philosophicus* och han kom att ägna sig åt filosofiska frågor kring språket.

kan skrivas som summan av två primtal. Frågan ställdes 1742 av Christian Goldbach (1690-1764) i ett brev till Leonhard Euler (1707-83). Ingen har hitintills vare sig visat eller motbevisat påståendet. Den andra var Fermats hypotes, men den frågan fick sin lösning 1995 då Andrew Wiles (1953-) visade att den var sann.⁹

Bevisen av Gödels satser är mycket tekniska. Det var min tanke när jag började skriva denna text att jag skulle kunna skissera beviset. Den målsättningen fick jag snart ge upp. Beviset är alltför komplicerat för mig men jag ger ett litet exempel på hur Gödel kunde numrera påståenden i verk som *Principia Mathematica* och därmed koppla samman problematiken med talteorin.

Gödelnumrering

Gödel utgår från ett antal symboler som bygger upp hans framställning. Det är med hjälp av dem som alla påståenden hans formella matematiska system formuleras. Varje grundläggande symbol kodas med ett nummer. Gödel använde sig av tretton sådana symboler.

Symbol	Definition	Kod
0	noll	1
N	efterföljare	2
=	är lika med	3
¬	icke	4
∨	eller	5
∧	och	6
→	om – så	7
≡	om och endast om	8
∀	allkvantifikator	9
∃	existenskvantifikator	10
∈	tillhör mängden	11
(vänsterparentes	12
)	högerparentes	13

Vi ger några enkla exempel hur Gödel numrerar formler. Betrakta påståendet "0 = 0". Tecknet "0" kodas till talet 1 och tecknet "=" till talet "3". Vi har

$$\begin{array}{ccc}
 0 & = & 0 \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 1 & 3 & 1
 \end{array}$$

⁹Se texten *Fermat innovatör och amatör* i denna serie.



Figur 11: Till vänster ses Gödel tillsammans med Einstein och bilden till höger är någon form av poster med Gödel och von Neumann.

Vi räknar nu upp primtalen 2, 3, 5, 7, ... i storleksordning och bildar talet

$$2^1 \cdot 3^3 \cdot 5^1 = 270$$

som är Gödeltalet till "0 = 0". Gödeltalet blir snabbt mycket stora. Betrakta t.ex. påståendet "¬¬0 = 0". Vi kodar de ingående tecknen och får

$$\begin{array}{cccccc} \neg & \neg & 0 & = & 0 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 4 & 4 & 1 & 3 & 1 \end{array}$$

Gödeltalet för "¬¬0 = 0" är alltså

$$2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^1 \cdot 7^3 \cdot 11^1 = 16 \cdot 81 \cdot 5 \cdot 343 \cdot 11$$

som är ett mycket stort tal noga räknat 24 449 040. Det viktiga är inte att kunna skriva upp talet i decimalform. Det viktiga är att det kan framställas som en produkt av primtal och att varje formel på det sättet kommer att tilldelas ett naturligt tal och att aritmetikens fundamentalsats garanterar att framställningen är entydig d.v.s. olika formler tilldelas olika tal.

Tekniken att tilldela varje formel ett unikt naturligt tal är grundläggande för Gödels bevis. Men hur han arbetar med formlerna och till slut visar ofullständigheten av aritmetikens axiomsystem är jag oförmögen att ta mig igenom. Gödels arbeten var revolutionerande och han blev ett stort

namn inom de kretsar som verkade i gränslandet mellan logik och matematik. Han flyttade 1940 till Princeton där han arbetade vid Institute of Advanced Studies. Han blev nära vän med bl.a. Albert Einstein och John von Neumann. År 1951 fick han motta Albert Einsteinpriset och 1953 utnämndes han till professor. Under tiden i Princeton arbetade han bl.a. med kontinuumhypotesen och visade att den inte stred mot mängdlärens axiomsystem. Den amerikanske matematikern Paul Cohen (1934-2007) skulle senare 1963 visa att hypotesen var oberoende av mängdlärens axiom. Innan Cohen publicerade sin artikel bad han Gödel att läsa igenom den, vilket Gödel gjorde och han uppmanade Cohen att publicera sitt resultat så fort som möjligt.

Gödel var en mycket säregen person. Han hade paranoida vanföreställningar och han dog 1978 av svält på ett sjukhus i Princeton. Han vägrade äta mat som inte hans fru hade lagat. Den kunde ju vara förgiftad. Hans fru hade tidigare lagts in på sjukhus.

Beviset av ofullständigheten av aritmetikens axiomsystem gjorde Gödel känd långt utanför matematikens och logikens kretsar. Han verkade emellertid inte trivas med uppmärksamheten. Han hade svårt att undervisa och han vände åhörarna ryggen då han föreläste. Han koncentrerade sig på den svarta tavlan. Hans anseende i de kretsar han verkade inom – matematik och logik – var mycket högt. Hans gode vän Einstein ansåg att Gödel var den störste filosofen efter Aristoteles. John von Neumann, som var en av de drivande krafterna för att Gödel skulle komma till Princeton, sade: "Gödel är oersättlig. Det är den ende nu levande matematiker som jag skulle våga uttrycka mig så om."

Har Cantors, Hilberts, Russels, Whiteheads, Freges och Gödels arbeten om matematikens grundvalar haft några implikationer för gemene man idag? Frågan känns för många berättigad. Det kan då vara på sin plats att notera att i den vetenskapliga miljö där dessa frågor studerades fanns Alan Turing (1912-54) som förde teoretiska resonemang om huruvida en maskin kan tänka och som konstruerade en abstrakt maskin som kom att kallas Turingmaskin. Där fanns också John von Neumann som var en av hjärnorna bakom den första datorn – ENIAC. Tankeverksamheten kring matematikens grundvalar lade grunden till den informationsteknik som vi nu finner oundgänglig och till dess vidareutveckling som vi kallar Artificiell Intelligens eller bara AI.

Jag har i denna text beskrivit hur man på olika sätt velat ge matematiken en struktur. Hur olika problem dykt upp. Hur lösningarna öppnade dörrar till ny världar. Hur lösningarna utsatts för kritik och hur stora visioner om en generell lösning kullkastats. Och hur detta ledde till en slags besinning. Men i arbete med dessa frågor har abstraktionsgraden och komplexiteten ökat. Luften har bildligt talat blivit allt tunnare och

det blev allt svårare att andas. Åtminstone för mig. Så nu är det dags att återvända till det mer konkreta, det som är mer jordnära där luften ännu är syremättad. Nästa text får ha en sådan karaktär.