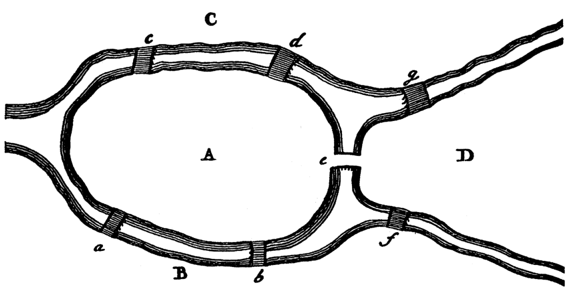
EN LITEN TEXT OM GRAFER

Anders Tengstrand



Här kommer en fjärde text om matematik som jag skrivit för att ha något som jag själv tycker meningsfyllt att göra. De tre tidigare *Fyra fundamentala teorem*, *Några prydnadsstenar i klassisk geometri* och *Fermat – amatör och innovatör* följs av *En liten text om grafer*.

Grafer används i många sammanhang där man vill beskriva samband och relationer. Det kan gälla systemet av broar i en stad, släktträd, problem inom teoretisk kemi, elektrisk kretsar eller vägar i ett kommunikationssystem. Inom datavetenskap användes de ofta liksom inom psykologi och sociologi. Grafteorin blir ett område inom matematiken där man studerar grafer för dess egens skull. Den är en viktig del av den matematik som kallas för diskret matematik och som ger matematiska grunder för datavetenskap.

Upprinnelsen är det problem om Königsbergs broar som Euler (1707-83) löste i mitten av 1700-talet. Klassiska problem som handelsresandeproblemet och fyrfärgsproblemet kan formuleras som problem om grafer. Teorin om grafer har utvecklats av bl.a. den tyske fysikern Gustav Kirchhoff (1824-87), de brittiska matematikerna Arthur Cayley (1821-95) och William Rowan Hamilton (1805-65) samt den ungerske matematikern George Póya (1887-1985)

Grafer ska ge konkreta bilder av olika situationer och ska vara ett stöd för mer allmänna resonemang. Men när jag ska försöka bevisa generella påståenden om grafer har jag funnit att det är svårt att stödja sig på bilder. En graf kan se ut på så många olika sätt och att låta en figur vara bas för ett resonemang, som det kan när det gäller geometri och analys, finner jag svårt. Det är lätt att utnyttja egenskaper hos den graf man ritat upp och som inte gäller i det generella fallet. En bild kan förvirra mer än den förklarar. Grafer ska ge en bild av komplexa situationer men för att bevisa en sats i grafteorin måste resonemangen vara allmänna. Bevisen kan därför upplevas som svåra.

Man kan förhålla sig till texten på många sätt. Man kan läsa allt och grotta ner sig i bevisen, man kan hoppa över det svåra för att få en bild av vad det handlar om, man kan bara bläddra igenom den eller man kan helt enkelt låta bli att läsa den.

Läs så mycket ni orkar och har lust till! Själv har jag haft roligt under skrivandet!

Växjö 7 maj 2026
Anders Tengstrand

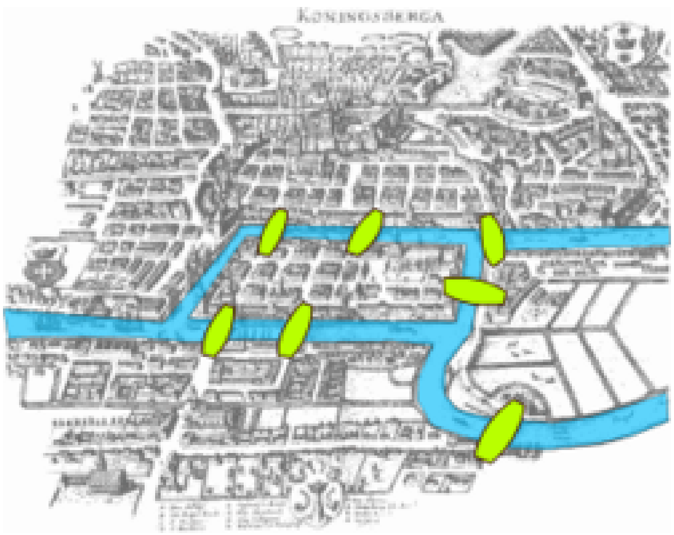
Problemet om Königsbergs broar

- Skulle du vilja tala om för mig, vilken väg jag ska gå härifrån?
- Det beror på vart du ska, svarade katten.
- Det betyder inte så mycket vart, sade Alice.
- Då kvittar det åt vilket håll du går, sade katten.
- ... så länge jag kommer någonstans tillade Alice som en förklaring.
- Du gör säkert det, sade katten, om du bara går tillräckligt långt.
Ur Alices äventyr i underlandet av Lewis Carroll (1832-1898)

Den gamla staden Königsberg, som nu heter Kaliningrad, delades av floden av och två öar i fyra delar. Genom ett brosystem med sju broar kunde man gå från en del till en annan. Det blev ett folknöje att försöka hitta en väg sådan att man gick över varje bro precis en gång för att återkomma till utgångspunkten. Man kan tänka sig att borgarna efter söndagens gudstjänst tog en promenad för att hitta en lösning. På figurerna 1 och 2 visas ett flygfoto över dagens Kaliningrad och en karta över det gamla Königsberg.

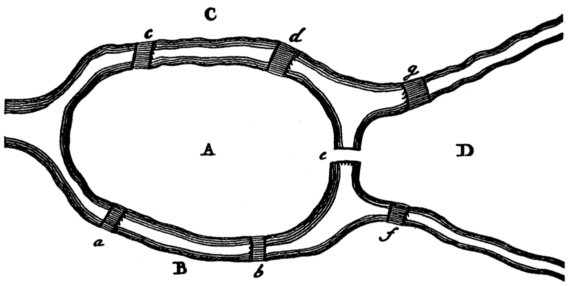
Leonard Euler intresserade sig för problemet. Han var då professor i Sank Petersburg och ansågs som en av världens ledande matematiker. I en artikel från 1736 löser han problemet och generaliserar det.

Figur 1:



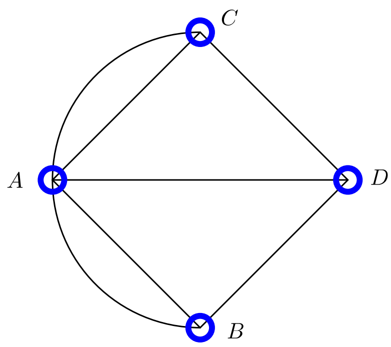
Figur 2:

Han inleder med att påstå att problemet är geometriskt men inte av den typ som man studerat i alla tider. Här betyder inte avstånd något utan det som är viktigt är hur de olika broarna, öarna och stränderna ligger i förhållande till varandra och illustrerar situationen med en bild som är starkt förenklad men där ändå den nödvändiga informationen finns. Hans bild ser ut som i figur 3.



Figur 3:

Vi gör ytterligare en förenkling och låter de fyra landområdena A, B, C och D representeras av fyra noder i en graf och broarna representeras av kanter mellan respektive noder.



Figur 4:

Euler diskuterar olika sätt att tackla problemet. En möjlighet, skriver han, är att numrera alla vägar som börjar och slutar i A och därefter kontrollera om någon av dessa uppfyller villkoret att varje bro passeras precis en gång. Men han menar att det är orealistiskt. Antalet möjligheter är alltför många och han hittar ett annat sätt. I princip resonerar han på följande sätt. För att passera varje bro måste man också passera noderna A, B, C och D. Men om man ska göra en rundtur som uppfyller villkoren måste man både komma till och komma från noden ifråga. Eftersom man får använda en bro endast en gång måste antalet broar som ansluter sig till en nod vara ett jämnt heltal. Men så är uppenbart inte fallet. Till A ansluter sig fem broar och till de övriga ansluter sig tre. Någon promenad där varje bro passeras en och endast en gång finns inte. Borgarnas försök var alltså från början dödfödda. Vad de tyckte om det förtäljer inte historien. Men Euler generaliserade problemet och studerade det då antalet noder och broar ökade.

Eulers lösning av problemet leder oss till en sats men för att formulera den behöver vi göra ett antal definitioner.

En *graf* består av ett ändligt antal *noder* $A, B, C, \ldots$ och ett ändligt antal *kanter* $u, v, w, \ldots$ där varje kant förenar två noder. Om u förenar A och B skriver vi AuB och säger att u ansluter sig till A och B.

Flera kanter kan ansluta sig till en nod och antalet kanter som ansluter sig till en nod kallas *nodens gradtal.*

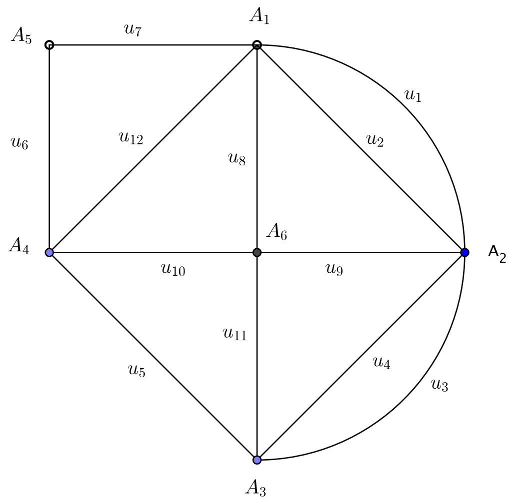
En *promenad* i en graf får vi om vi från en nod A_1 följer ett antal kanter som slutar i en nod A_n dvs om det finns kanter $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ sådana att $A_1 u_1 A_2 \ldots u_{n-1} A_{n-1}$.

En promenad där varje kant förekommer bara en gång kallas en *väg.*

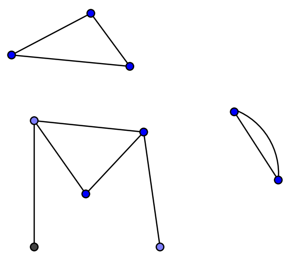
En väg som börjar och slutar i samma nod kallas en *cykel.* En *Eulercykel* är är en cykel där alla kanter i grafen ingår.

En graf kallas *sammanhängande* om det alltid finns en väg mellan två olika noder i den. En graf som inte är sammanhängande kan delas in i ändligt många *sammanhängande komponenter.*

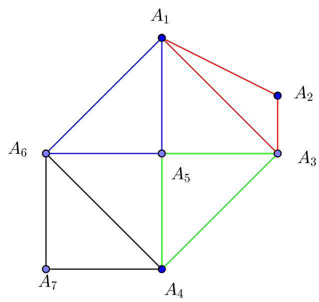
Begreppen illustreras i figurerna 5 och 6 på nästa sida.



Figur 5: Grafen har sex noder och tolv kanter. Noderna A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 och A_6 har graderna 5, 5, 4, 4, 2 respektive 4. En promenad är t.ex.$A_1u_1A_2u_9A_6u_{10}A_4u_5A_3u_{11}A_6u_9A_2$. En väg är $A_1u_7A_5u_6A_4u_5A_3$. En cykel är $A_1u_2A_2u_9A_6u_{10}A_4u_6A_5u_7A_1$



Figur 6: En icke-sammanhängande graf med tre sammanhängande komponenter



Figur 7: Grafen i figuren är en Eulergraf eftersom varje nod har ett jämnt gradtal. För att konstruera en Eulercykel har jag successivt avlägsnat cykler. Först bågarna i cykeln som markerats med rött o.s.v Till slut har jag fyra cykler, en röd, en grön, en blå och en svart. De ska nu kombineras till en Eulercykel och det kan göras på följande sätt: $A_1A_2A_3A_1A_5A_3A_4A_5A_6A_7A_4A_6A_1$

Eulers observationer leder nu till följande sats:

> En sammanhängande graf har en Eulercykel om och endast om varje nod har ett jämnt gradtal. En sammanhängande graf som har en Eulercykel kallas en *Eulergraf*.

Att visa att varje nod i en Eulergraf har ett jämnt gradtal görs på samma sätt som vi visade att problemet med Königsbergs broar inte är lösbart. Om det finns en Eulercykel som måste man komma till en nod genom en kant och kunna avlägsna sig från den genom en annan kant. Antalet kanter som ansluter sig till noden måste alltså vara jämnt.

Omvändningen är besvärligare och bevisades först 1873 av den tyske matematikern Carl Hierholzer (1840-71). Innan vi ger ett induktionsbevis skisserar vi en metod som underlättar konstruktionen av en Eulergraf i en graf där varje nod har jämnt gradtal.

En metod för att konstruera en Eulergraf

Här följer en beskrivning hur man kan konstruera en Eulergraf om alla noder har ett jämnt gradtal.

> Vi kallar grafen G och den har noderna $A_1, A_2, \ldots$ och kanterna $v_1, v_2, \ldots$.
>
> Konstruera en väg i G som börjar i en nod A_1 och gå via kan-

ten v_1 till noden A_2 fortsätt via kanten v_2 till noden A_3 o.s.v. Eftersom antalet noder är ändligt måste vi någon gång komma till en nod där vi varit tidigare. Antag att den noden är A_j d.v.s. $A_1 v_1 A_2 \ldots A_j v_j A_{j+1} v_{j+1} A_{j+1} \ldots A_{k-1} v_{k-1} A_j$. Vägen $A_j v_j A_{j+1} v_{j+1} \ldots v_{k-1} A_j$ är då en cykel. Observera att om vi har kommit till en nod i cykeln så finns alltid en kant att komma därifrån eftersom nodens gradtal är jämnt.

Avlägsna nu kanterna $v_j, \ldots, v_{k-1}$ från den ursprungliga grafen. Vi får då en ny graf med samma noder men med ett färre antal kanter. Fortfarande har varje nod i den nya grafen ett jämnt gradtal. Antalet kanter vi avlägsnar från varje nod är ju jämnt. Den nya grafen kan men behöver inte vara sammanhängande. Den består av ett antal komponenter som kan se olika ut. En komponent kan till och med innehålla bara en nod och inga kanter,

Vi kan nu upprepa proceduren i den nya grafen och konstruera en cykel i varje sammanhängande komponent. Efter ett antal steg kommer vi inte ha några kanter kvar.

Vi har nu att antal cykler som är sådana att varje kant i den ursprungliga grafen ingår i precis en cykel och genom att sammankoppla dem på lämpligt sätt får vi en Eulercykel till G.

Det sista steget, sammankopplingen, behöver konkretiseras för att att resonemanget ska kunna kallas ett bevis. Sammankopplingen får ske från fall till fall. Metoden illustreras i figur 7 med bildtext. Nu följer ett induktionsbevis som bevisar vårt påstående, men som inte är konstruktivt.

Ett induktionsbevis

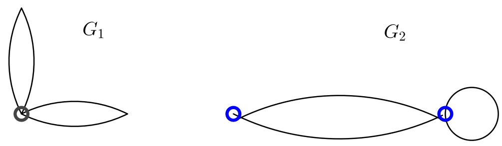
Vi kallar grafen för G och betecknar dess noder med $A, A_1, A_2, \ldots$ och dess kanter med $v, v_1, v_2, \ldots$.

I figur 8 med bildtext visas att påståendet är sant för alla grafer med 1 eller 2 noder. Vi kan alltså i fortsättningen anta att G har minst 3 noder.

Vi visar påståendet genom induktion över antalet kanter n.

Påståendet är sant för $n = 1$ och 2. Då har nämligen G en eller två noder eftersom gradtalet för varje nod är jämnt.

Vi antar nu att påståendet är sant för varje graf med k kanter



Figur 8: Grafen G_1 har en nod och två kanter som båda börjar och slutar i den enda noden. En sådan kant brukar kallas loop. En graf med en nod kan ha ett godtyckligt antal loopar och nodens grad är då alltid jämnt. En Eulercykel får man genom att gå igenom den ena loppen efter den andra till dess man han gått igenom alla. Grafen G_2 har två noder. För att båda nodernas gradtal ska var jämnt måste ett jämnt antal kanter gå mellan de båda noderna och ett godtyckligt antal loopar kan fogas till varje nod. En Eulercykel får man om man först går igenom alla looparna till den första noden och därefter går över till den andra noden genom en av kanterna varefter man går igenom alla looporna till den andra noden för att sedan återvända till den första noden genom den andra kanten mellan dem. Om det är fler än två kanter mellan de båda noderna går man fram och tillbaka mellan dem till dess alla kanter utnyttjats. Man kommer alltid till slut till den första noden eftersom antalet kanter är jämnt.

där $1 \leq k < n$ och vi antar att $n > 2$.

Anta nu att G är en sammanhängande graf med k kanter och med minst 3 noder.

Eftersom G är sammanhängande finns tre hörn A_1, A_2 och A_3 och kanter v_1 och v_2 sådana att $A_1 v_1 A_2 v_2 A_3$.

Ersätt grafen G med en ny graf G' genom att ta bort kanterna v_1 och v_2 och lägga till en kant v_3 mellan A_1 och A_3.

Noderna i den nya grafen G' är desamma som i G och de har alla jämnt gradtal. Vi har ju lagt till och tagit bort en kant från vardera A_1 och A_3 och tagit bort två kanter från A_2. De övriga noderna har lämnats oförändrade.

Vi ska nu visa att G' antingen är sammanhängande eller har två sammanhängande komponenter.

Låt nu p vara en väg i G som förbinder en av noderna A med A_1 En sådan finns eftersom G är sammanhängande. Låt p' vara den del av p som ligger i G'. Då måste p' sluta i A_1, A_2

eller A_3.

Om p' slutar i A_1 så ligger A_3 i samma komponent G'_1 som A_1 och omvänt eftersom $A_1 v A_3$. Noden A måste alltså ligga i G'_1.

Om p' slutar i A_2 så tillhör A samma komponent G'_2 som A_2.

Antingen är $G'_1 = G'_2$ d.v.s. G' är sammanhängande eller så är $G'_1 \neq G'_2$.

Om G' är sammanhängande så har den enligt induktionsantagandet en Eulercykel. Om vi i den Eulercykeln ersätter $A_1 v A_3$ med $A_1 v_1 A_2 v_2 A_3$ får vi en Eulercykel i G.

Om G' har två olika komponenter G_1 och G_2 så finns det enligt induktionsantagandet en Eulercykel c_1 i G_1 och en c_2 i G_2. Vi får nu en Eulercykel i G genom att i c_1 ersätta $A_1 v A_3$ med $A_1 v_1 A_2$ följt av c_2 följt av $A_2 v_2 A_3$.

Enligt induktionsprincipen gäller nu påståendet för godtycklig graf med n kanter.

Induktionsbeviset kan kännas omständligt men grundidén är att minska antalet kanter genom att ersätta två bågar $A_1 v_1 A_2 v_2 A_3$ med en $A_1 v A_3$ och på det sättet kunna använda induktionsantagandet. Nu kan den operationen innebära att den nya grafen inte längre är sammanhängande vilket innebär några extra turer till i resonemanget. Beviset kan kännas svårt eftersom det är svårt att stödja sig på en figur. Grafen G kan se ut på så många olika sätt att en figur förmodligen skulle förvirra mer än den förklarar.

Man kan säga att Eulers lösning av problemet med Königsbergs broar är början på det som ibland kallas Analysis situs (Analys av inbördes lägen) och till den hör grafteorin men också det område som skall kallas topologi. Här räknar man inte med avstånd utan med inbördes lägen.

Som vi tidigare nämnt diskuterar Euler inledningsvis möjligheten att räkna upp alla möjliga vägval och sedan kontrollera om det finns någon Eulercykel bland dem. Han finner att det är omöjligt. Visserligen är antalet möjligheter ändligt men det blir alltför stort. Situationen blir ohanterlig. Detta leder oss in på ett annat problem inom grafteorin nämligen Handelsresandeproblemet - ett problem som uppkommer i en viss typ av praktiska tillämpningar och som dessutom har stor principiell betydelse.

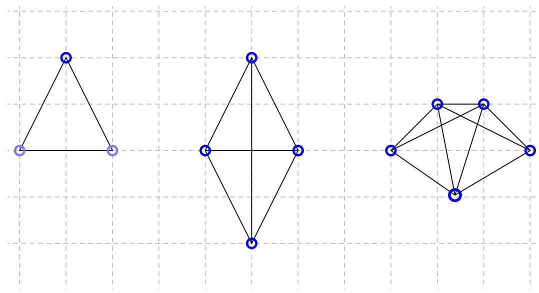
Handelsresandeproblemet

Världen är så stor, så stor,
Lasse, Lasse liten!
Större än du nånsin tror,
Lasse, Lasse liten.
Zacharias Topelius (1818-98)

En handelsresande ska besöka ett antal städer och han ska besöka varje stad precis en gång. Han känner avståndet mellan varje par av städer och vill planera sina besök så att längden av resrutten blir så liten som möjligt. Hur ska ha gå till väga? Vi kan åskådliggöra situationen med en graf där städerna är noder och där två olika noder förenas med precis en kant. En sådan graf kallas *fullständig* och vi har i figur 9 ritat upp de fullständiga graferna med 3,4 och 5 noder. De har 3, 6 respektive 10 kanter.

En fullständig graf men n noder har $n(n-1)/2$ kanter. Från varje nod utgår $n-1$ kanter och eftersom vi har n kanter får vi $n(n-1)$möjligheter men då har vi räknat med varje kant två gånger. Alltså är antalet kanter lika med $n(n-1)/2$.

Vi återgår nu till handelsresandeproblemet. En information som behövs är avståndet mellan varje par av städer d.v.s. varje kant förses med ett tal. Vi säger att vi har en *viktad graf.* Hur ska nu vår handelsresande gå till väga för att hitta den kortaste rutten? En möjlighet är att som Euler diskuterade i problemet med Köningsbergs broar att helt enkelt



Figur 9:

gå igenom alla möjliga rutter, bestämma dess längder och välja ut den kortaste. I dag har vi ju helt andra beräkningsmöjligheter och antalet rutter är ju faktiskt ändligt. Låt oss göra en uppskattning av hur många beräkningar som behövs. Om vi numrerar noderna med $1, 2, \ldots, n$ och antar att vi startar i nod nummer 1 så kan vi välja nästa nod på $n-1$ sätt och den därefter på $n-2$ sätt o.s.v. Antalet rutter R_n blir alltså $(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = (n-1)!$. Vi har t.ex. $R_4 = 6, R_5 = 24$ och $R_6 = 120$ och det är naturligtvis inte några problem att beräkna alla rutternas längder med dagens datorer. Men vad händer om $n = 50$ – ett inte helt orealistiskt fall i praktiska tillämpningar. En mycket grov uppskattning är att $50! > 10^{40}$. Datorn skall alltså göra betydligt fler än 10^{40} beräkningar. Antag att datorns kapacitet är sådan att varje beräkning tar 10^{-9} sekunder. Då skulle tidsåtgången alltså vara mycket större än $10^{40}\cdot 10^{-9} = 10^{31}$ sekunder vilket omräknat i år blir

$$\frac{10^{31}}{3600\cdot 24\cdot 365} > 10^{23}.$$

Det skulle alltså att ta en dator mer 10^{23} år att genomföra beräkningarna. Metoden är alltså inte genomförbar. Men i praktiken kräver problemet en lösning. En handelsresande använder förmodligen sin erfarenhet för att att hitta en bra lösning. Men problemet är generellt. Hur hittar jag i rimlig tid en rutt i en fullständig graf där varje kant har en vikt och där summan av kanternas vikter är så liten som möjligt. Vikterna kan t.ex. ange avstånd, tid eller kostnader. Problemet uppkommer i verkligheten och kräver någon form av lösning. Det kan vara planering av flygplansrutter vilket tydligen varit aktuellt någonstans någon gång under andra världskriget. Det kan gälla utdelning av post. Vår metod är grov och man borde kunna hitta en smartare algoritm som inom rimlig tid ger det resultat vi vill ha. Kanske behöver vi inte hitta den rutt som har absolut lägst kostnad. Vi kan kanske nöja oss med en som är "tillräckligt" bra. Naturligtvis har man arbetat fram metoder eller algoritmer som snabbare leder till fram till målet och som ger en lösning som är rätt nära den exakta. I det sistnämnda fallet kan man förmodligen utnyttja de kunskaper man har om just den graf det för tillfället är fråga om. Men kan man hitta en generell metod som ger den exakta lösningen inom rimlig tid? Svaret är att man kan hitta bättre metoder än vår lite klumpiga men man har ännu inte hittat någon som ger en lösning inom rimlig tid. Finns det en sådan algoritm? Eller finns det inte? Frågan har än så länge inget svar.

Samma frågor kan ställas om många problem och vi behöver verktyg för att bestämma hur många steg en algoritm behöver för att lösa ett problem och vi behöver precisera vad vi menar med "rimlig tid". I den teori som utvecklas visar sig handelsresandeproblemet ha en särställning.

Problem av typ P och NP

År 1936 publicerade den engelske matematiker Alan Turing en artikel med titeln *On computable numbers, with an application to the Entscheidiungsproblem* där han konstruerar en abstrakt maskin som steg för steg kan utföra algoritmer. Maskinen har ett ändligt antal tillstånd, kan läsa tecken från en remsa och beroende på aktuella tillstånd och tecken förändra tillstånd, mata fram remsan och skriva ett tecken på en utåtgående remsa. Det skulle föra alltför långt att ge en exakt beskrivning. Det kan emellertid anmärkas att den abstrakta maskinen, som nu kallas Turingmaskin, var modell vid konstruktionen av den första datorn ENIAC.

Turingmaskinen kan tjäna som verktyg för att mäta komplexiteten hos en algoritm. Antalet steg Turingmaskinen behöver göra för att utföra algoritmen är ett mått på dess komplexitet. Antag att antalet tecken som ska läsas in är n och antalet steg är $K(n)$. Om vi kan hitta en algoritm som löser problemet där $K(n) \leq n^r$ för något positivt heltal r så säger vi att problemet är av ty P. Det innebär att antalet steg kan uppskattas med polynom i n och då anses problemet kunna lösas inom rimlig tid. Bokstaven P i typ P syftar alltså på polynom.

När det gäller handelresandeproblemet är indata proportionellt mot $n(n-1)$ om den fullständiga grafen har n noder. För att det ska kunna lösas inom rimlig tid krävs det alltså att vi kan konstruera en algoritm som löser problemet med ett antal steg som är mindre än eller lika med n^r där r är ett heltal. Vår mycket enkla algoritm kräver mer än $n!$ steg och det är långt från n^r där r är ett positivt heltal. Hittills har man inte kunnat finna någon algoritm som löser problemet polynomiell tid. Man vet alltså inte om handelsresandeproblemet är av typ P eller inte.

Det finns emellertid ett annat sätt att angripa problemet. Man gör en kvalificerad gissning. Detta måste var den bästa lösningen! Sedan kan man kontrollera det genom någon form av algoritm och då är frågan om den algoritmen kan göra kontrollen på rimlig tid d.v.s. att antalet steg växer polynomiellt med antalet indata. Man hittar först en lösning man tror på och kan sedan kontrollera om den är rätt på rimlig tid. Vi säger då att problemet är av typ NP. Bokstaven "N" står för "non-deterministisk" d.v.s. slumpvis. Vi har gissat en lösning och inte arbetat oss fram till den.

Det visar sig att handelsresandeproblemet är av typ NP. Man kan kontrollera om en angiven rutt är den minimala på rimlig tid. Det finns flera klassiska problem som är av den typen. Man vet att de är av typ NP men har inte kunnat visa att de är av typ P. Naturligtvis är varje problem av typ P också av typ NP. Men gäller omvändningen? Det vet man inte. Hitintills har man inte hittat något problem som är av typ NP men som bevisligen inte är av typ P. Handelsresandeproblemet har i denna typ av resonemang en speciell plats. Om man kan visa att just det är av typ P så är varje problem av typ NP också av typ P. Det är vad man kallar NP-komplett. Den förste som visade existensen av NP-kompletta problem var Stephan Cook (1939-) i en artikel från 1971 med titeln *The Complexity of Theorem Proving Procedures*. Vi ger några exempel på NP-kompletta problem.

- Kan man i en ändlig mängd av positiva tal hitta en delmängd vars summa är exakt lika med ett på förhand givet tal?
- *Kappsäcksproblemet* Saker med olika volym och vikt ska packas i en kappsäck och alla får inte plats. Vilka saker ska man välja så att värdet av de nedpackade blir så stort som möjligt?
- En graf kallas en *Hamiltongraf* om det finns en väg sådan att varje nod besöks precis en gång. Kan man avgöra om en given graf är en Hamiltongraf?

Begreppet Hamiltongraf har fått sitt namn av den irländske matematikern William Rowan Hamilton. Vi har tidigare diskuterat Eulergrafer. Det är lätt att avgöra om en sammanhängande graf är en Eulergraf. Man kontrollerar helt enkelt att varje nod har ett jämnt gradtal. Det är betydligt svårare att avgöra om en graf är en Hamiltongraf. Det är NP-komplett problem.

En av de vanligaste typerna av problem som förkommer i tillämpningar är de som leder till linjär programmering. Ett givet inlärt uttryck skall maximeras eller minimeras under ett antal bivillkor som är linjära. Det löses oftast genom den s.k. simplexmetoden. Metoden är relativt enkel och den är oftast snabb. Men i vissa extrema fall exploderar tidsåtgången och antalet steg växer inte polynomiellt. Det händer mycket sällan men det kan hända. Är då inte linjär programmering av typen P? Simplexmetoden visar inte det. Men det kanske finns en annan algoritm som klarar att lösa problemet på rimlig tid. År 1984 konstruerade den indiska matematikern Narendra Karmarkar (1956-) en sådan. Linjär programmering är alltså ett problem av typ P. Men Karmarkars metod är mer komplex och tar i de allra flesta fall längre tid än simplexmetoden. Så standardmetoden är i praktiken oftast simplexmetoden. Nu har vi avlägsnat oss från grafteorin men det kan vara av intresse att veta något om komplexiteten hos ett av de vanligaste problemen som företag och organisationer använder datorer för att lösa. I nästa avsnitt återgår vi till huvudtemat.

Träd, planära grafer och ett partyproblem

När jag använder ett ord", sa Humpty Dumpty i nedlåtande ton,
"så betyder det precis vad jag vill att det ska betyda,
varken mer eller mindre".
"Frågan är", sa Alice, "om det är möjligt att låta ord betyda så många olika saker".
Ur Alice i Underlandet och bakom spegeln av Lewis Carroll (1832-98)

Träd

Som rubriken antyder kommer detta avsnitt att handla om träd. Vad är då ett träd i grafteorin? Vi gör följande definition

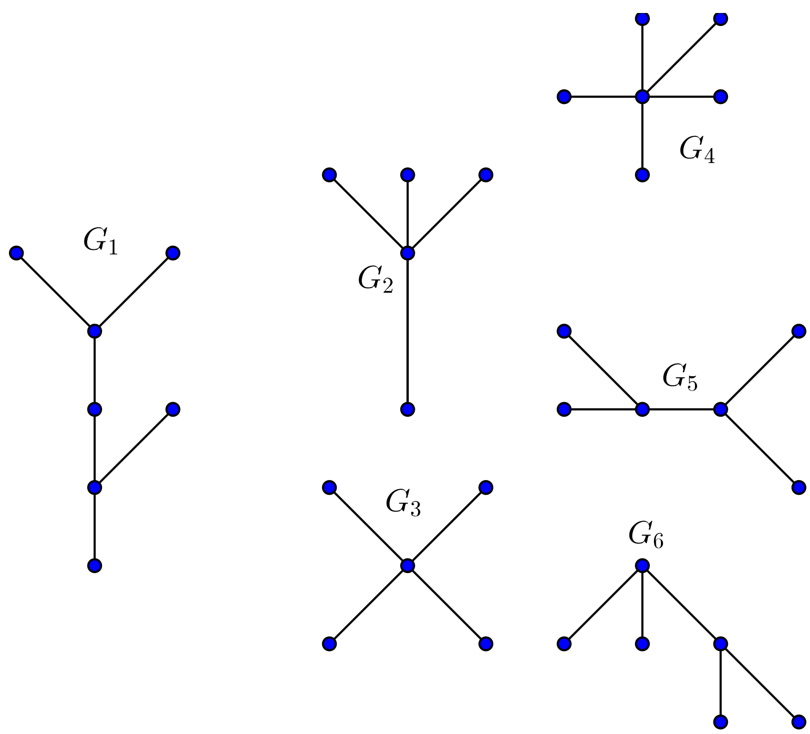
Ett träd är en sammanhängande graf som saknar cykler.

Vi använder ordet "träd" som är välkänt från andra sammanhang och grafen G_1 i figur 10 på nästa sida påminner onekligen lite om ett vanligt träd vilket också G_2 gör men knappast de övriga. Vi använder också ordet "träd" när vi vill beskriva olika hierarkier som t.ex. släktträd och då påminner de mer om G_6. Men i grafteorin är alltså ett träd helt enkelt en sammanhängande graf utan cykler och ett träd kan se ut på många sätt. Inspirerade av den första grafen där bilden liknar ett vanligt träd gör vi följande definitioner:

I ett träd kallas en nod med graden 1 för ett *löv* och kanten som ansluter till lövet kallas en *kvist*. Vidare kallar vi en graf vars sammanhängande komponenter alla är träd för en *skog*.

Vi noterar att

G_1 har 7 noder och 6 kanter $\quad$ G_2 har 5 noder och 4 kanter
G_3 har 5 noder och 4 kanter $\quad$ G_4 har 6 noder och 5 kanter
G_5 har 6 noder och 5 kanter $\quad$ G_6 har 6 noder och 5 kanter.



Figur 10: Sex olika grafer. Observera att graferna G_2 och G_3 är identiska. De är bara ritade på olika sätt. Detsamma gäller G_5 och G_6.

Vid närmare betraktande är G_2 och G_3 samma graf. Vi har bara ritat dem på olika sätt. Detsamma gäller G_5 och G_6. Grafen G_4 har liksom G_5 och G_6 6 noder och och 5 kanter men den är skild från dessa. Grafen G_4 har ju en nod av graden 5 och det har inte de båda andra.

Vi observerar också att i alla de sex träden är antalet noder lika med antalet kanter adderat med 1. Är det alltid så? Svaret är ja och det gäller också en slags omvändning. Vi visar följande sats.

> En sammanhängande graf med n noder och k kanter är ett träd om och endast om $n = k + 1$

Att ett träd har egenskapen att $n = k + 1$ förefaller mig naturligt med tanke på exemplen. Men att omvändningen gäller är för mig mer förvånande. Ett träd kan trots allt se ut på många sätt.

Vi bevisar påståendet genom induktion över antalet noder.

> Visa först att om G är ett träd med n noder och k kanter så är $n = k + 1$.
>
> Vi använder induktion över n och konstaterar att påståendet är sant för $n = 2$. För att en sammanhängande graf med 2 noder ska vara ett träd så måste det finnas en kant som förenar de båda noderna eftersom G är sammanhängande. Om det funnes fler kanter får vi automatiskt en cykel och ett träd innehåller inga cykler. Alltså måste $k = 1$.
>
> Antag nu att påståendet är sant för alla träd där antalet noder är mindre än n och visa att det är sant för ett träd G med n noder.
>
> Vi visar först att trädet G har minst ett löv.
> Låt A_1 vara en nod i G och betrakta alla vägar i G som börjar i A_1. Eftersom antalet sådana vägar är ändligt finns det en väg $p = A_1 v_1 \ldots v_{s-1} A_s$ från A_1 med maximalt antal kanter. Om A_s inte är ett löv så skulle det finnas ytterligare en kant v_s från A_s och vi har $A_s v_s A_{s+1}$. Noden A_{s+1} kan inte vara någon av de föregående eftersom G saknar cykler. Men om A_{s+1} skulle vara en ny nod är inte vägen p maximal. Alltså är A_s ett löv.
>
> Låt nu A vara ett löv i G och avlägsna från G noden A och den kant som ansluter till A. Vi får då en graf G' med $n - 1$ noder och $k - 1$ kanter. Den nya grafen G' är sammanhängande och kan inte innehålla någon cykel eftersom inte G gör det. Enligt induktionsantagandet är då $n - 1 = (k - 1) + 1$

d.v.s. $n = k + 1$.

Nu följer påståendet med hjälp av induktionsprincipen.

Vi visar nu att om G är en sammanhängande graf men n noder och k kanter där $n = k + 1$ så är G ett träd.

Vi visar först att till varje sammanhängande graf G finns ett träd T som har samma noder som G och där alla dess kanter också är kanter i G. Man kallar T för ett uppspännande träd till G.

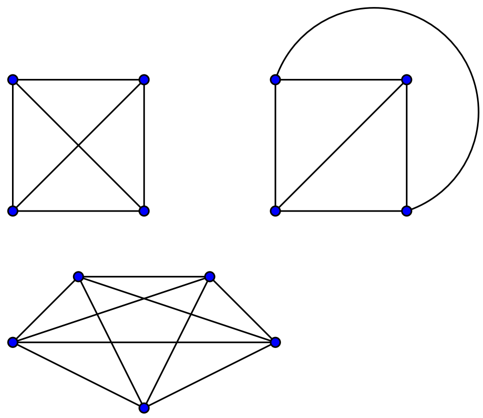
Om G saknar cykler så är G ett träd och $T = G$. Om inte så avlägsna en kant i en cykel. Vi får då en ny graf G' som fortfarande är sammanhängade och som har samma noder som G. Om G' saknar cykler så är G' ett träd och $G' = T$. Fortsätt på detta sättet till dess vi får en graf som är sammanhängande och som saknar cykler. Vi får då ett träd T som spänner upp G.

Grafen T har n noder och eftersom den är ett träd har den $n - 1$ kanter. Vårt träd T måste alltså vara identiskt med G. Påståendet är bevisat.

I beviset använde vi oss av att varje sammanhängande graf har ett uppspännande träd - ett träd som innehåller alla grafens noder. En graf kan ha många uppspännande träd. En viktad graf är en graf där varje kant tilldelas ett tal. I många tillämpningar kan det vara av stort intresse att hitta det träd som spänner upp grafen och där summan av vikterna är så liten som möjligt. Det kan gälla olika former av nätverk som kommunikationsnätverk, elektriska nätverk, kabelnät för TV eller vatten- och avloppssystem. Det har utarbetats olika algoritmer för att hitta den optimala lösningen.

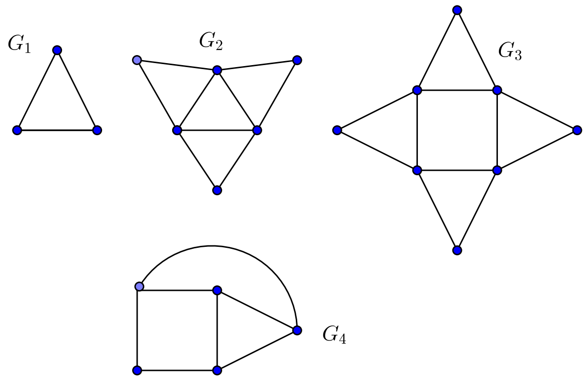
Planära grafer

I inledningen av föregående avsnitt visade vi att en graf kan avbildas i ett plan på olika sätt. Vi ska nu titta lite närmare på det och undersöka i vilken mån man kan representera en graf i planet så att inte två kanter skär varandra. Överst till vänster i figur 11 har vi en bild av fullständiga grafen med 4 noder. Två av kanterna skär varandra. Men samma graf illustreras också av bilden till höger och där skär inte några kanter varandra. Den undre bilden är en representation av den fullständiga grafen med 5 noder. Här skär många kanter varandra men är det möjligt att rita den så att inga kanter skär varandra? Det verkar svårare. Betydligt svårare.



Figur 11:

I fortsättningen ska alla grafer vara enkla grafer, vilket innebär att mellan två noder går högst en väg och att det inte finns några loopar d.v.s. kanter som börjar och slutar i samma punkt. Vi säger att en graf är *planär* om den är enkel och sammanhängande och om den kan representeras i ett plan så att inga kanter skär varandra. Vi ska ge ett villkor som planära grafer måste uppfylla. Rimligen bör en graf där antalet kanter är stort relativt antalet noder vara svår att representera utan att kanterna skär varandra. I figur 12 visas ett antal planära grafer.



Figur 12:

Graf	Noder	Kanter	Fält
G_1	3	3	2
G_2	6	9	5
G_3	8	12	6
G_4	5	7	4
Träd	n	$n-1$	1

I en planär graf kommer varje cykel att omsluta ett område som vi kallar ett *fält*. De planära graferna kommer alltså att dela in planet i fält. Ett av fälten är det område som ligger utanför grafen och som är obegränsat. Ett träd kommer alltså att generera endast ett fält eftersom det saknar cykler.

En analys av tabellen ger att om antalet noder, kanter och fält i grafen betecknas med n, k respektive f så är $n - k + f = 2$ för alla de fem graferna och detsamma gäller för den planära grafen i figur 11 där $n = 4, k = 6$ och $f = 4$.

Det visar sig att detta samband gäller för alla sammanhängande planära grafer och brukar kallas för Eulers polyederformel. Den bevisades först 1639 av René Descartes (1596-1650) och återupptäcktes av Euler som publicerade sitt bevis 1751. De formulerade och bevisade sambandet för polyedrar. En polyeder kan klippas upp och avbildas på ett plan och genererar då en planär graf. Sambandet gäller emellertid för alla planära grafer och vi ska nu bevisa det.

> Om G är en planär graf med n noder, k kanter och f fält så gäller
> $$n - k + f = 2.$$

> Observera först att om G är planär så är den sammanhängande och enkel. Vidare sätter vi $e_G = n - k + f$.
>
> Om G saknar cykler så är G ett träd och då är $k = n - 1$ och $f = 1$ och $e_G = n - (n-1) + 1 = 2$.
>
> Om G har en cykel så avlägsnar vi en kant i cykeln och får en ny graf G_1 med samma antal noder men där både antalet kanter och antalet fält minskar med 1. Det betyder att $e_{G_1} = e_G$.
>
> Om G_1 saknar cykler så är G' ett träd och $e_G = e_{G_1} = 2$.
>
> Om G_1 har en cykel avlägsnar vi en kant i den o.s.v. Vi kan upprepa förfarandet till dess vi får ett träd G_s och då $e_G = e_{G_1} = \ldots = e_{G_s} = 2$ följer satsen.

Varje cykel genererar ett fält och varje kant begränsar två fält. Eftersom varje cykel innehåller minst 3 kanter måste $3f \leq 2k$. Vi kombinerar detta samband med Eulers polyederformel och får

$$n = 2 + k - f \geq 2 + k - \frac{2k}{3} = 2 + \frac{k}{3}$$

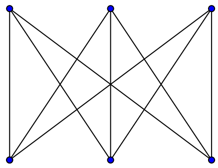
eller

$$3n \geq 6 + k.$$

I en planär graf måste antalet noder n och antalet kanter k uppfylla olikheten $3n \geq 6 + k$. De planära grafer vi studerat uppfyller naturligtvis detta villkor och den skeptiske kan lätt kontrollera det. Men hur är det med den fullständiga grafen med fem noder som vi ritat upp i figur 11? Här är $n = 5$ och $k = 10$ som inte satisfierar olikheten. Alltså är den grafen inte planär.

En annan graf som inte är planär visas i figur 13. Den brukar kallas den bipartita grafen av ordningen 3 och betecknas med $K_{3,3}$.[1] För den

[1] En bipartit graf delar upp noderna i två delmängder. Varje nod i den ena delen förenas med varje nod i den andra och grafen har inga andra kanter. Den bipartita grafen $K_{n.m}$ har $n + m$ noder och delas in i en del med n noder och en del del med m noder. Varje nod i den ena delen förenas fmed en nod i den andra. Inga andra kanter förekommer.



Figur 13:

är $n = 6$ och $k = 9$ som faktiskt uppfyller olikheten $3n \geq 6 + k$ och den skulle kunna vara planär. Men i $K_{3,3}$ har den kortaste cykeln 4 kanter. Om $K_{3,3}$ vore planär så skulle $4f \leq 2k$ d.v.s. $2f \leq k$ vilket ger att

$$n = 2 + k - f \geq 2 + k - \frac{k}{2} \text{ eller } 2n \geq 4 + k$$

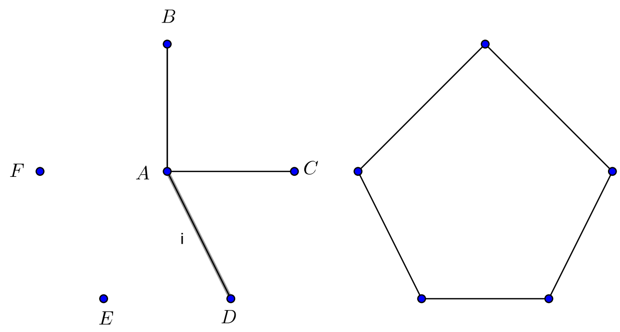
och det villkoret uppfyller inte $K_{3,3}$.

Det visar sig att en enkel sammanhängande graf är icke-planär om och endast om den har en delgraf som är den fullständiga grafen med 5 noder eller den bipartita grafen av ordningen 3. En graf G' är en delgraf till en graf G om varje nod och varje kant i G' också är nod respektive kant i G.

Ett partyproblem

Runt ett bord sitter sex personer. Var och en av dem kanske känner någon eller några av de andra och vi antar att det i så fall är ömsesidigt. Om A känner B så känner B A. Finns det grupper där alla i gruppen känner varandra? Extremfallen är att alla känner alla eller det motsatta att ingen av våra personer känner någon av de övriga. Situationen kan åskådliggöras med en graf med sex noder och om två personer känner varandra så har vi en kant mellan motsvarande noder. Jag påstår att det under alla förhållanden alltid finns en grupp på tre personer där alla känner alla eller så finns det en grupp på tre personer där ingen känner någon av de övriga.

Till vänster i figur 14 har jag ritat de sex noderna till grafen som ska åskådliggöra relationerna. Fixera en person eller nod A. Han måste antingen känna eller inte känna tre av de övriga. Antag att han känner



Figur 14:

B, C och D. Om två av B, C och D känner varandra har vi hittat en grupp på tre där alla känner alla. Om inte så utgör B, C och D en grupp där ingen känner någon av de övriga. Om nu A inte känner tre av de övriga kan man göra samma resonemang men byta ut ”känner” mot ”inte känner”.

Om vi istället för ett sällskap på sex personer betraktar ett med fem personer så kan vi inte dra samma slutsats. I grafen till höger känner varje person två av de övriga men inte fler. Det första ledet i vårt resonemang håller inte. Vi kan inte säkert veta att A ”känner” eller ”känner inte” tre personer. Tre måste bytas mot två och då spricker resonemanget.

En engelsk filosof, ekonom och matematiker Frank Plumpton Ramsay (1903-30) generaliserade problemet. Om m och n är naturliga tal finns det då ett minsta heltal $R(m, n)$ sådant att varje enkel graf med $R(m, n)$ noder antingen har en delgraf med m noder som är fullständig eller en med n noder som är totalt osammanhängande? En graf kallas totalt osammanhängande om den inte har några kanter. Ramsay visade själv att ett sådant tal alltid existerar och det kallas Ramsaytal. Tydligen är

$R(3,3) = 6$. Flera uppskattningar har gjorts och 1995 publicerade Brendan D. McKay (1951-) och Stanislaw P.Radzizszowski (1953-) i *Journal of Graph Theory* en artikel med titeln $R(4,5) = 25$.

Ett problem som har en enkel formulering och en elegant lösning, som det åtminstone för mig tog en tid att hitta, kan genom en relativt naturlig generalisering bli ett svårt problem som utmanar specialister inom grafteori.

Fyrfärgsproblemet

I ett hus i en liten stad bodde tre systrar:
Tant Grön, Tant Brun och Tant Gredelin.
De hade en hund som hette lille Prick.
I staden bodde också herr Blå.
Elsa Beskow (1874-1953)

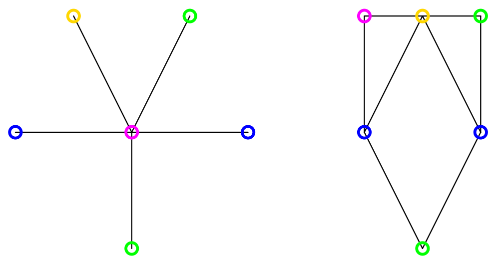
En brittisk botaniker Francis Guthrie (1831-99) arbetade med att färglägga Englands grevskap och försökte göra det så att två grevskap som ligger intill varandra inte får samma färg. Han upptäckte att det alltid räckte med fyra färger och frågade sig om det är så generellt. Francis vidarebefordrade frågan till sin bror Frederick (1833-86) som studerade matematik och han gav problemet till sin lärare Augustus de Morgan (1806-71) som i sin tur vidarebefordrade det till William Rowan Hamilton. de Morgan och Hamilton var två av den tidens främsta brittiska matematiker men det verkar inte som någon av dessa gjorde några allvarliga försök att lösa problemet.

Flera matematiker antog emellertid utmaningen och 1879 ansåg sig engelsmannen Alfred Kempe (1849-1922) sig ha visat Guthries förmodan och publicerade beviset i en artikel *On the Geographical Problem of the Four Colours* och året efter gav Peter Guthrie Tait (1831-1901) ut ännu ett bevis. Elva år senare hittade emellertid Percy Heawood (1861-1955) ett fel i Kempes bevis men visade att fem färger räcker. Den danske matematikern Julius Petersen (1839-1910) visade 1991 att också Taits bevis var felaktigt.

Figur 15: USA:s delstater färglagda med fyra färger

Det dröjde ända till 1976 som Guthries förmodan kunde bevisas och det var Kenneth Appel (1932-2013) och Wolfgang Haken (1928-2022) båda verksamma vid University of Illinois som visade att det räckte med fyra färger för att färglägga en karta så att två intill varandra liggande stater inte får samma färg. De kunde visa att om det fanns ett motexempel så skulle det finnas bland 1 936 olika konfigurationer och använde en dator för att genomföra kontrollerna och för det arbetet behövde datorn 1 000 timmar. Beviset har sedan förenklats men fortfarande krävs en dator för att undersöka över 600 möjligheter. Antalet möjligheter har minskat och datorerna har blivit kraftfullare men man har ännu inget bevis som inte kräver datorer. Beviset är kontroversiellt. Komplexiteten är stor och det är svårt att få någon överblick. Beviset underlättar inte förståelsen för satsen. Det är ett bevis för att Guthries förmodan är sann men knappast en förklaring varför den är det.

Fyrfärgsproblemet kan översättas till ett problem om grafer. De olika staterna svarar mot noderna i en graf och om två stater gränsar till varandra har man en kant mellan motsvarande noder. Den graf man får är planär och frågan är om man kan färglägga noderna så att två noder som har en kant mellan sig aldrig har samma färg. Naturligtvis kan vi inte behandla fyrfärgsproblemet. Jag har visserligen hört Appel föreläsa om det men jag begrep inte mycket om ens något. Men beviset av femfärgsproblemet är inte omöjligt att förstå.



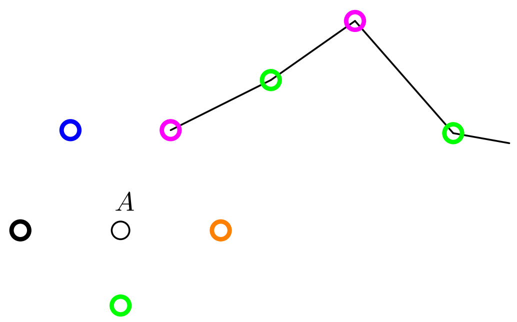
Figur 16: Två grafer färglagda med fyra färger

Femfärgsproblemet

I beviset för femfärgsproblemet använder vi induktion över antalet noder. Vi kommer i det kritiska fallet använda oss av s.k. Kempevägar, där noderna har två färger och där varannan nod har den ena färgen och varannan har den andra. Den typen av vägar är uppkallad efter Alfred Kempe vars bevis visserligen var felaktigt men som trots det innehöll många fruktbara idéer.

> Varje planär graf kan med hjälp av fem färger färgläggas så att två angränsande noder aldrig har samma färg.

> Vi visar påståendet med hjälp av induktion över antalet noder.
>
> Uppenbarligen är påståendet sant om antalet noder är 1,2,3,4 eller 5.
>
> Antag att påståendet är sant om antalet noder är $n-1$ och visa att det i så fall är sant då antalet noder är n.
>
> Låt G vara en graf med n noder och k kanter.
>
> Antag att varje nod hade ett gradtal som var större än eller lika med 6. Eftersom varje kant angör två noder så medför det att antalet kanter är större än eller lika med $3n$. Men det är omöjligt eftersom i en planär graf måste $3n \geq 6 + k$.



Figur 17:

Grafen G måste alltså ha minst en nod vars grad är mindre än eller lika med 5.

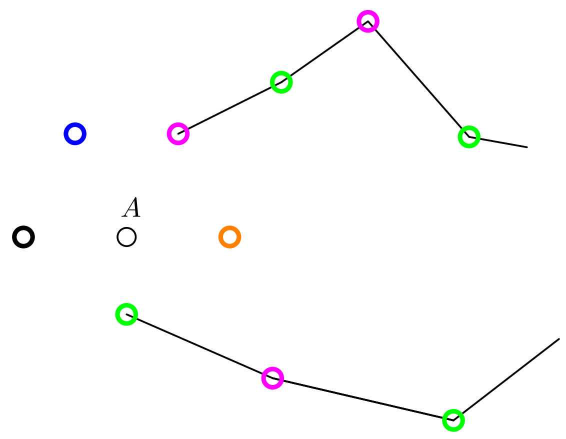
Antag att G har en nod A vars grad är mindre än eller lika med 4.
Tag bort den noden. Vi får då en graf med $n-1$ noder och enligt induktionsantagandet kan den färgläggas med fem färger utan att två intilliggande noder har samma färg. Lägg tillbaka noden A. Den angränsar till högst 4 noder och alltså finns det en färg över till A. I detta fallet kan alltså G färgläggas med fem färger utan att angränsande noder har samma färg.

Antag nu att varje nod i G har graden 5.

Tag som förut bort en nod A. Enligt induktionsantagandet kan den nya grafen färgläggas med fem färger utan att två angränsande noder har samma färg.

Om de fem noder som gränsar till A endast har fyra färger eller mindre kan vi lägga tillbaka A och ge den en av de övriga färgerna och påståendet följer.

Antag nu att de fem noderna alla har olika färger: grön, brun, gredelin, blått och svart. Det är det kritiska fallet.



Figur 18:

Vi studerar den delgraf G' till G som består av de gröna och gredelina noderna. Se figur 17.
Den behöver inte vara sammanhängande. Antag att den gröna och den gredelina noden som gränsar till A inte ligger i samma komponent. Då kan vi byta färg i den komponent som hör till den gredelina noden så att varje gredelin nod blir grön och varje grön nod blir gredelin utan att det göra våld på kravet på att två intilliggande noder har olika färg. Efter färgbytet har noderna som angör A färgerna grön, blå, svart, grön och brun. Vi kan alltså ge A färgen gredelin.

Antag till sist att både den gredelina och den gröna noden som ansluter till A ligger i samma sammanhängande komponent i G'. Se figur 18.
Bilda den delgraf G'' till G som innehåller de bruna och svarta noderna. Då kan inte den bruna och den svarta noden ligga i samma sammanhängande komponent i G''. Eftersom G är planär måste en Kempeväg från den bruna till den svarta noden innehålla någon nod ur en väg mellan den gredelina och gröna noden vilket den inte får. Eftersom den bruna och den

svarta noden som gränsar till A ligger i olika komponenter i G'' kan vi byta färger på noderna i den komponent som tillhör den bruna noden. De noder som gränsar till A har nu färgerna grön, blå, gredelin, blå och svart. Vi kan färga noden A brun och få en graf där två intilliggande grafer aldrig har samma färg.

Induktionsprincipen medför nu att varje planär graf kan färgläggas med fem färger utan att två intilliggande noder har samma färg.

Fyrfärgsproblemet är ett klassiskt problem. Det formulerades inte av matematiker utan av en botanist som arbetade med att rita kartor. Det förmedlades tidigt till de Morgan och Hamilton några av den tidens mest framstående matematiker inom områden där problemet hör hemma. Det bör även varit känt av den brittiske matematikern Artur Cayley som måste betraktas som en av grafteoriens pionjärer. Det verkar emellertid som dessa specialister inte ägnade problemet något större intresse. Man kan fråga sig varför. Ansåg de att problemet visserligen var utmanande men att det inte förde matematiken framåt? De såg det som en återvändsgränd som inte ledde vidare utan bara tog tid som kunde användas på bättre sätt. År 1900 formulerade David Hilbert (1862-1943) ett antal problem som skulle vara betydelsefulla för matematikens utveckling. Fyrfärgsproblemet finns inte med bland dem. Men lösningen som kom 1976 var principiellt omtvistad och intressant. Efter ett i och för sig imponerande förarbete lämnade man över problemet till en dator. Det är väl inte AI men för tankarna ditåt. Ska vi kalla det för bevis? Det visar att påståendet att varje karta kan färgläggas med fyra färger så att inte två intilliggande stater har samma färg är sant men kan vi genom beviset se varför det är sant? Ökar det vår kunskap om matematiska system och strukturer? Inte självklart. Är det något vi kommer att se mer av i framtiden med utvecklingen av AI? Förmodligen. Kanske får vi i framtiden skilja mellan två olika former av bevis. De som bevisar och förklarar och de som bara bevisar men är så komplexa att de inte förklarar.