

# SPRIDDA TANKAR KRING MATEMATIK- UNDERVISNING

Anders Tengstrand

copyright Anders Tengstrand

Detta är den sjätte och sista delen av mina texter om matematik. Denna gången handlar det om matematikundervisning och texten har titeln *Spridda tankar kring matematikundervisning*. Jag har förvisso undervisat i matematik under nästan hela mitt liv men aldrig ägnat själva matematikundervisningen någon systematisk studie. Tankarna är inspirerade av mina egna erfarenheter som lärare och elev, av diskussioner med kollegor och studenter samt inte minst av mina studier kring matematikens historia. I matematikdidaktiken brukar man försöka få svar på tre frågor Vad? Hur? Varför? Vilket område de tillämpas på varierar. Om man vill få svar på frågan varför vi använder och undervisar om ett matematiskt begrepp, ett matematiskt samband eller en matematisk teori är det för mig naturligt att gå tillbaka till historien. Hur började det egentligen? Visst finns det andra sätt att svara på en sådan fråga. Men för mig har det historiska perspektivet varit viktigt.

Jag sätter nu punkt för den här typen av texter och denna är alltså den sista. Idéerna sinar och orken börjar tryta. Den sista texten är betydligt mindre teknisk än de fem första och någon varning för svåra delar behöver inte utfärdas. Den är också betydligt mer personlig än de tidigare och därmed också mindre vederhäftig. De finns inga tekniskt svåra delar men det finns många delar som kan ifrågasättas. De tankar och synpunkter som redovisas kan jag inte bevisa. Jag har heller inga konkreta råd att ge till en matematiklärare. Varje lärare är en personlighet och måste utgå från det. I slutet av mitt yrkesliv blev jag tillfrågad av en professor i Linköping om jag kunde skriva ner några ord om hur man blir en bra lärare. Han skulle använda det i en intern tidskrift för någon fakultet eller liknande på Linköpings universitet. Jag blev naturligtvis smickrad och tänkte och tänkte och tänkte. Det jag kom fram till var att en god lärare måste kunna sitt ämne och vara intresserad av sina elever. Det är varken konkret eller originellt. Men jag kommer inte längre idag.

Den intresserade är välkommen att läsa mitt opus men behöver naturligtvis inte instämma i det jag skriver.

Växjö på midsommarafton 2026  
Anders Tengstrand



---

# Aritmetik

---

*Det är något fint och förståndigt med tal.  
De vet vad de vill och de gör vad de ska.  
Piet Hein (1905-96)*

*Den 9de. Upp klockan fyra och läste flitigt  
på min multiplikationstabell,  
som är det svåraste jag lärt mig inom aritmetiken.  
Ur Samuel Pepys (1633-1703) dagbok.  
Pepys var ordförande i den brittiska vetenskapsakademin*

För de flesta medborgare är matematik samma sak som räkning. Det är inte så konstigt. Den del av matematiken de använder är talen och de fyra räknesätten - den delen kallas aritmetik från grekiskans arithmetika som betyder räknekonst. Att behärska den grundläggande aritmetiken är en nödvändighet i dagens samhälle, men för de flesta är samband, som för en matematiker är fundamentala, som Pythagoras sats eller kvadrerings- och konjugatreglerna något som de aldrig kommer i kontakt med vare sig i yrkeslivet eller i vardagen. Och följaktligen glöms de bort. Vi som sysslar med matematik kan beklaga detta men vi lär nog få leva med det. Många förmodligen de flesta klarar sig bra ändå. Men grundläggande aritmetik måste alla behärska. Det är en form av medborgarkunskap.

Så har det inte alltid varit. I Babylonien och det forna Egypten utbildades räknemästare och de hade hög status. Det var först i och med

den ökande handeln som räknekonsten blev allt viktigare för allt fler. Boktryckarkonsten, som uppfanns på 1400-talet, medförde att utbildning kunde ske i större skala. Införandet av de hindu-arabiska siffrorna och de algoritmer som förknippas med dem innebar att räkningarna kunde kontrolleras på ett bättre sätt än när man använde abackusar - en slags kulramar. Men de var seglivade. Det tog tid innan räkning med algoritmer slog igenom helt i västerlandet. Det var Fibonacci (ca 1170-ca 1250) som i sin bok *Liber abacci* från 1202 introducerade vårt decimalsystem i Europa. Det var ett resultat av hans handelsresor i länderna kring Medelhavet. Den första räkneläran vi känner till är från 1478 och kallas *Trevisoarimetiken*. Den återfanns i Treviso i Italien och författaren är okänd. Den första svenska räkneläran är Ægidio Aurelius (?-1648) *Arithmetica Eller En Kort och Enfaldig Räknebok* från 1614.

Naturligtvis skiljer sig de tidiga läroböcker avsevärt från dagens. Om inte annat så har tryckerikonsten inneburit avsevärda förbättringar. Resonemangen och räkningarna kan åskådliggöras med bilder av hög kvalitet. Pedagogisk forskning om matematikundervisning har påverkat framställningen och språket är enklare. Men på många sätt har grunderna i framställningen bevarats. Olika begrepp, metoder och teorier introduceras och tillämpas på vardagliga problem. Det finns ett antal övningar där elever kan testa om de förstått texten och de finns svårare problem som utgör utmaningar. Det finns emellertid en läroboksförfattare som helt bryter det mönstret och det är Roberts Recorde (1510-58).

## Robert Recordes räkneläror

Robert Recorde föddes i Wales och fick möjligheter att studera medicin i Cambridge och Oxford. Så småningom flyttade han till London där han praktiserade som läkare. Han var också kontrollör vid myntverket i Bristol och var den förste i England att prägla mynt med hinduarabiska siffror i stället för romerska.

Parallellt med dessa verksamheter skrev Recorde läroböcker i aritmetik. De mest kända är *The Ground of Arts* från 1543 och *The Whetstone of Witte*<sup>1</sup> från 1557. Det som skiljer Recordes böcker från övriga räkneläror är att de är utformade som dialoger mellan lärare och elev. Har kanske Platons dialoger varit en inspirationskälla? Det är uppenbart att Recorde har haft erfarenheter som lärare. Dialogerna visar förtrogenhet med elevernas sätt att tänka och ger honom möjligheter att förklara och motivera de metoder han lär ur. Recorde låter eleven ställa frågor så att läraren får möjlighet att förtydliga och han låter eleven göra fel så

<sup>1</sup>Whetstone betyder ungefär slipsten och titeln anger att boken är en slipsten som ska skärpa tänkandet.

att läraren får möjlighet att rätta. I en dialog ur *The Ground of Arts* har läraren just övertygat eleven om nyttan med aritmetik och dialogen fortsätter på följande sätt:

Eleven: ... Nu ber jag er istället att ge mig del av denna förträffliga lärdom så att jag kan dra nytta av den.

Läraren: Jag är mycket glad över din begäran och ska genast gå till verket eftersom du är så ivrig att lära dig detta.

Eleven: Då lovar jag att underkasta mig er auktoritet och hålla allt vad ni säger för sant.

Läraren: Det är för mycket; ingen bör bli trodd i allt utan att framlägga sina skäl. Även om jag vill att min elev ska sätta tro till det jag säger, så gäller det endast när jag ger belägg för mina påståenden...

Den sista kommentaren visar Recordes syn på undervisning. Den får aldrig bli auktoritär.

Nästa exempel på Recordes framställningskonst är hämtat ut *The Whetstone of Witte* och handlar om kvadrattal.

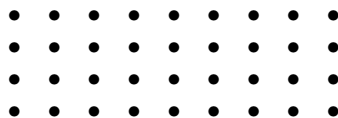
Läraren: Kvadrater är det tal som kan divideras med ett tal så att kvoten blir detta tal: det vill säga att ett kvadrattal är ett tal som fås genom att multiplicera ett tal med sig själv som att multiplicera 10 med sig själv ger 100. Talet 100 är ett kvadrattal eftersom 100 dividerat med 10 också är 10.

Eleven: Multiplicera 4 med 4. Det ger 16 och det är också ett kvadrattal av samma skäl.

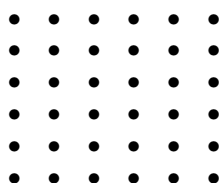
Läraren: Det är rätt.

Eleven: Om 9 multipliceras med 4 är inte det ett kvadrattal? Ser vi det tycks vi kunna göra alla tal till kvadrattal genom multiplikation.

Läraren: Tänk noga över, att ett kvadrattal bildar en kvadrat bland talen på samma sätt som en kvadrat gör det i Geometrin, alla sidor är lika stora. Om en sida är längre än den andra kallas den i Geometrin för en lång kvadrat. Om jag ritar den figur som svarar mot de tal du nämnde och låter en sida vara 4 och den andra 9 så får vi följande bild:



Vi ser en lång kvadrat. Ändå kan det heltal som uppkommer genom denna multiplikation verkligen vara ett kvadrattal som ser ut så här.



Men sidan eller roten är 6 och varken 9 eller 4.

Eleven: Nu förstår jag bättre genom figuren och exemplet. Och jag har också lärt mig vad en rot är på det sätt som ni förklarade det. Det är sidan i figuren som svara mot talet.

Recorder låter eleven ställa en fråga så att läraren får möjlighet till ytterligare förtydliganden samtidigt som han kan visa på analogierna mellan kvadrattal och geometriska kvadrater. På det sättet får läsaren andrum för eftertanke. Denna aspekt är kanske ofta förbisedd i läroböcker. Det är nödvändigt att vrida och vända på begreppen för att de ska sjunka in.

Att ge ut en lärobok i matematik i dialogform ter sig idag verklighetsfrämmande. Ett sådant läromedel blir förmodligen inte effektivt. Hade det fungerat så hade nog någon tagit upp idén och vidareutvecklat den. Men det finns tankar bakom framställningen som jag sympatiserar med och som man ibland kan glömma bort i matematikundervisning. För det första: Det är viktigt att få göra fel och att analysera vad felet består i. Begrepp och metoder måste diskuteras så att missuppfattningar kommer i dagen och kan rättas till. På så sätt fördjupas förståelsen och man ser nya dimensioner av de matematiska teorier man arbetar med. För det andra: Matematikundervisningen får inte bli auktoritär. Frågor måste få ställas. De är nödvändiga. Frågorna och svaren ökar elevens förståelse och de gör läraren medveten om vad som kan missuppfattas. Lärarens pedagogiska erfarenhet vidgas och hon eller han blir en bättre lärare. Nya tider innebär nya elever och nya frågor. Hela tiden måste läraren sätta sig in i nya tankebanor hos sina elever. En lärare kan aldrig slå sig till ro. För att travestera på Henrik Ibsen (1828-1906) "Att vara lärare är att hålla domedag över sig själv".

Robert Recordes pedagogiska idé när det gäller utformning av läroböcker slog alltså inte igenom. Den blev en parentes. Men de underliggande principerna om delaktighet och ifrågasättande finner jag i hög grad aktuella. Förhoppningsvis självklara. Men hur gick det för Robert Recorder? 1500-talet var en turbulent tid i Englands historia. I det allmänna

tumultet blev han anklagad för förtal och dömd till böter. Förmodligen kunde han inte betala dem och sattes i fängelse 1557 där han dog året därpå. En sak som inte dog med honom var likhetstecknet  $=$ . Det var han som införde det.

## Om stora tal

Talen är liksom orden abstrakta. Ordet "ros" är inte en ros. Det står för ett begrepp. På samma sätt är det med talen. Det tal vi kallar "tre" och som vi betecknar med 3 är ett abstrakt begrepp som de flesta av oss tar till oss i mycket unga år. Talen 1, 2, 3, ... betecknar antal och vi använder dem dagligen. För oss blir de i någon mening konkreta. De kallas också i matematiken för naturliga tal. Hela tiden ger vi namn åt allt större tal. Att kunna ange mycket stora tal anses av en del vara tecken på matematisk begåvning. För oss som arbetar med matematik känns detta märkligt. För några år sedan gästade jag en klass med nioåringar för att berätta om mitt arbete som matematiklärare. Deras första fråga var: "Hur långt kan du räkna?" För dem fanns det något mystiskt med de riktigt stora talen. De var inte riktigt verkliga. De vanliga talen var just vanliga. Det fanns inget spännande med dem. De var en del av deras verklighet och de använde dem dagligen. Kanske har vi alla en dunkel uppfattning om riktigt stora tal. Vi kan sätta namn på dem och beteckna dem. Men kan vi göra oss en konkret bild av dem? Kan vi göra oss en bild av ett tal som har hundra siffror? Det kan inte jag och jag tror inte jag är ensam. Men vi accepterar att de finns och vi räknar med dem.

Arkimedes (287-212 f.Kr.) var inne på den problematiken och i *Sand-räknaren* försöker han beräkna antalet sandkorn i universum. Hans mål var att visa att antalet är ändligt. Han stödde sig på de världsbilder som fanns och lyckades skriva upp en övre begränsning genom ett sinnrikt beteckningsystem. Men trots att antalet kan skrivas ner som symboler på ett papper är det svårt att göra sig en föreställning om storleken. Vi räknar med talen fast vi inte kan göra oss en konkret bild av hur stora de är.

Mycket i matematiken handlar just om att acceptera begrepp och arbeta med dem även om man inte kan göra sig en konkret bild av vad man sysslar med. Men många gånger har man behov av bilder och försöker därför göra bilder av det som är mycket abstrakt. I början ger bilderna upphov till begrepp men så småningom blir begreppen alltmer komplicerade och man försöker konstruera bilder för att illustrera begreppen. De blir ofta rätt naiva men kan trots det vara ett stöd för resonemang.

Nioåringarnas fråga "Hur långt kan du räkna?" bör nog tas på allvar. Den kan ge upphov till ett intressant samtal om matematik där lärare och elev i någon mening står på samma nivå. De har alla svårt att göra

sig bilder av mycket stora tal. Kanske kan en sådan diskussion bli ett välkommet avbrott i räknandet.

## Automatisering

Vi lär oss tidigt räkna med de naturliga talen. Under de första skolåren lär vi oss de fyra räknesätten och algoritmer för dem. Addition och subtraktion är väl de enklaste. Multiplikation är mer komplicerad för att inte tala om division. Det finns mycket forskning kring hur barn tänker och arbetar med de fyra räknesätten. Jag kan mycket litet om den och har dessutom ingen erfarenhet av undervisning av yngre barn. Det är därför främmande för mig att komma med synpunkter inom detta område. Men en åsikt vill jag redovisa och det gäller vikten av automatisering.

Det handlar då ofta om multiplikationstabellen. Ska man kunna den utantill eller räcker det att man i någon mening förstår den. Min personliga åsikt är att det inte räcker med att förstå den utan att man bör nöta in den så att man kan den utantill. När man kommer till problemlösning där man behöver tänka i många steg är det viktigt att vissa saker fungerar automatiskt. Man behöver inte tänka på hur man ska utföra en addition eller en multiplikation och man får lättare för att känna igen mönster. För några år sedan utvärderade jag ett projekt som genomfördes vid ett antal grundskolor i Kungsbacka och som handlade om just automatisering och det gällde addition och multiplikation av heltal. Man engagerade bl.a. föräldrar för att förhöra sina barn. Projektet slog vad jag kommer ihåg väl ut. Naturligtvis kan man inte bara lära sig rabbla additions- och multiplikationstabeller. Genom att ställas inför problem där man måste använda de fyra räknesätten kan man nöta in tabellerna. Men förmodligen måste den verksamheten kombineras med någon form av råplugg. I projektet fick eleverna komma till tals genom en enkät där de bl.a. fick uttrycka vad de tyckte om projektet. En elev skrev: "Automatisering är mycket tråkigt – men väldigt nyttigt." Inläarning kan ibland vara tråkig men man får igen det senare då man får bättre verktyg när man ska lösa mer komplicerade matematiska problem. Jag erinrar mig ett citat från Ellen Key (1849-1926) : "Branta är stigarna till utkiksberget men lönen för mödan är stor"

## Rationella och reella tal

Förr eller senare måste eleverna inse att de naturliga talen inte räcker till. Vi behöver tal som beskriver delar av en enhet och inför bråktalet. Det görs i alla räkneläror från medeltiden till idag. Hur det görs har jag inga synpunkter på. Min erfarenhet är som jag sagt tidigare begränsad. Mycket tankearbete och mycket forskning har ägnats åt att förstå hur

man på bästa sätt inför de rationella talen och hur man lär sig räkna med dem. Det finns uppenbara svårigheter. Hur dividerar man t.ex. två bråktal med varandra? Jag vill inte försöka mig på att ge råd hur det ska läras ut men vill notera att det inte kan vara helt lätt. Det gör inte Piet Hein heller. Han säger ”En halv är, konstigt nog, två tredjedelar av tre fjärdedelar.”

En speciell ställning har de tal som kan framställas som decimalbråk. Vi kallar dem decimaltal. Det är dem eleven möter i vardagen och det är följaktligen de tal som eleverna blir riktigt förtrogna med. De allmänna bråken arbetar man med i skolkänken. Det måste finnas pedagogiska svårigheter att få elever att förstå och använda de olika räknelagarna för allmänna bråk och de svårigheterna har jag inga lösningar på. Som universitetslärare i matematik med intresse för matematikens historia vill jag emellertid göra några kommentarer.

- I det forna Egypten spelade de s.k. stambråken

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$$

en stor roll. Delar av en enhet uttrycktes som en summa av stambråk. Vi har t.ex. att

$$\frac{5}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}.$$

Kanske är stambråken de bråk man har enklast att ta till sig. Naturligtvis är det orimligt att gå över till att räkna med bråk som de gamla egyptierna gjorde men det kan vara värt att fundera över varför  $1/4$  verkar vara lättare att förstå än  $3/4$ .

- Det kan finnas en risk för att eleverna försöker att använda decimalbråk istället för bråktal av formen  $p/q$  där  $p$  och  $q$  är naturliga tal. De elektroniska räknare som finns i t.ex. mobiler inbjuder till det. Men att kunna utföra de fyra räknesätten på allmänna bråk är en förutsättning för dem som ska studera matematik på högre nivå där algebran är ett oundgängligt hjälpmedel.
- Varje bråk av formen  $p/q$  kan skrivas som ett decimalbråk där antalet decimaler kan vara oändligt och där decimalerna upprepas periodiskt. Enligt min mening bör de lärare som introducerar allmänna bråk känna till det och helst varför det är så.
- Det finns sträckor som inte kan mätas med rationella tal. Alla längder kan inte uttryckas på formen  $p/q$  där  $p$  och  $q$  är heltal. Exempel på sådana är  $\sqrt{2}$  och  $\pi$  som svarar mot diagonalen i en kvadrat med sidan 1 respektive omkretsen av cirkel med diametern 1. Det går

att bevisa att dessa tal inte är rationella. Dessa fakta måste varje lärare i matematik oberoende av stadium känna till. Naturligtvis kan man inte kräva att hon eller han kan bevisa det. Beviset för att  $\pi$  är irrationellt tillhör definitivt den högre skolan.

## Negativa tal

Negativa tal introduceras numera redan i grundskolan. På min tid var det först på gymnasiet man började räkna med dem. Visserligen använde man negativa tal för att ange t.ex. temperatur och förlust. Men man räknade inte systematiskt med dem.

Den stora svårigheten när det gäller räkning med negativa tal är multiplikation. Vad är t.ex.  $(-3) \cdot (-5)$ ? För många år sedan undervisade jag i realskolan och jag skulle förklara varför produkten är lika med 15 och inte  $-15$ . Jag tror att jag snärjde in mig i långa förklaringar som mynnade ut i att om de regler vi använder för att multiplicera in i parenteser skall gälla så måste vi sätta  $(-3) \cdot (-5) = 15$ . Förmodligen begrep jag vad jag talade om men jag var nog ensam om det. Det var för komplicerat för eleverna. Till slut sa jag. Lär er regeln minus gånger minus är lika med plus. Basta! När jag några decennier efter mina försök som lärare i ungdomsskolan började studera matematikens historia hittade jag Leonard Eulers (1707-83) *Algebra* från 1767 på nätet och började läsa den. Framställningen var klar och konkret och så kom jag till det avsnitt där Euler går igenom teckenreglerna vid multiplikation. Reglerna finns i punkterna 31-33 i kapitel 3 som har rubriken "Om produkter av enkla kvantiteter" och lyder som följer.

31. Hittills har vi bara betraktat positiva tal; och det kan inte råda något tvivel om att den produkt som uppkommer också är positiv:  $+a$  gånger  $+b$  måste ge  $+ab$ . Men vi måste var för sig undersöka vad produkterna  $+a$  gånger  $-b$  och  $-a$  gånger  $-b$  ska ge.

32. Låt oss börja med att multiplicera  $-a$  med 3 eller  $+3$ . Nu, eftersom tecknet  $-a$  kan betraktas som som en skuld, är det uppenbart att om vi ökar en skuld tre gånger, så måste skulden bli tre gånger så stor, och följaktligen är den önskade produkten lika  $-3a$ . Så om vi multiplicerar  $-a$  med  $+b$  ska vi få  $-ba$  eller  $-ab$  som är samma sak. Alltså måste vi dra slutsatsen att om en positiv storhet multipliceras med en negativ storhet så blir produkten negativ, och det måste fastläggas som en regel att  $+$  gånger  $-$  är lika med  $-$  eller *minus*.

33. Det återstår att lösa fallet där  $-$  multipliceras med  $-$ ; eller, till exempel,  $-a$  med  $-b$ . Det är klart att med avseende på bokstäverna måste den bli  $ab$ ; men det är tveksamt om tecknet  $+$  eller  $-$  ska placeras framför; allt vi vet är att det måste vara något av dessa tecken. Nu påstår jag att tecknet inte kan vara  $-$ ; för  $-a$  gånger  $b$  ger  $-ab$  och  $-a$  gånger  $-b$  kan inte ge samma resultat som  $-a$  gånger  $b$ ; och därför måste det ge motsatt resultat det vill säga  $+ab$ ; följaktligen har vi följande regel:  $-$  gånger  $-$  ger  $+$  det vill säga samma sak som  $+$  gånger  $+$ .

Euler säger helt enkelt att produkten  $(-3) \cdot (-5)$  måste var antingen  $3 \cdot 5$  eller  $-(3 \cdot 5)$  och eftersom den inte kan vara samma sak som  $(-3) \cdot 5$  måste den vara  $3 \cdot 5$ . När jag läste Eulers framställning tyckte jag att resonemanget inte var särskilt matematiskt (vad man nu menar med det) men det var enkelt. Men mina elever hade nog köpt Eulers förklaring och Euler är ju faktiskt en av de största matematikern genom tiderna. Jag har vid studiet av matematikens historia tyckt mig se att de stora matematikernas framställning ibland är tydligare, klarare och mer konkret än den i de läromedel som används idag. Ibland är det så men inte alltid. Att försöka lära sig logaritmer på det sätt John Napier (1550-1617) en gång införde dem rekommenderas inte. Eulers framställning av samma begrepp i *Algebra* är däremot klar och tydlig.

## Räknemaskiner

Vårt decimalsystem med de fyra räknesätten introducerades i västerlandet på 1200-talet och det utvecklades algoritmer för addition, subtraktion, multiplikation och division. De har beskrivits och beskrivs i räkneläror sedan 1400-talet. Algoritmerna för addition och subtraktion är relativt enkla och har inte förändrats över tid. Men för multiplikation och division är de mer komplicerade och det finns olika varianter. Nu verkar man ha enats om vissa standardalgoritmer som lärs ut i skolorna.

I och med att det finns algoritmer som beskriver hur olika operationer stegvis skall utföras för att beräkna t.ex. en produkt ligger det nära till hands att skapa en maskin som gör arbetet. Att göra multiplikationer och divisioner av flersiffriga tal för hand är tidsödande och tråkigt och det blir ofta för att inte säga oftast fel. Räknemaskiner skapades redan på 1600-talet av t.ex. Pascal men i större skala började de tillverkas först under andra halvan av 1900-talet. Det var först då en räknemaskin blev var mans egendom. Det var då de elektroniska miniräknarna introducerades och naturligtvis påverkade och påverkar det matematikundervisningen.

I mitten av 1970-talet var jag på en konferens i Berkley, USA, som

handlade om matematikundervisning. Idag skulle vi kalla det matematikdidaktik. Jag besökte en föreläsning om räkning. Jag tror att föreläsaren kom från näringslivet och minns att han viftade med en miniräknare och sade ungefär: "Varför ska vi plåga våra elever med algoritmer när man kan köpa en sådan här för fem dollar?" Jag höll med honom. Självklart var det så. Men både han och jag hade fel. Räkning med algoritmer lärde eleverna att bli bekanta med talen. Och det var ingen ytlig bekantskap. Räklandet med papper och penna var ibland mödosamt men det arbetet ledde till att de fick vrida och vända på begreppen. De var tvungna att lära sig multiplikationstabellen och de fick verktyg att göra överslagsräkningar för att bedöma rimligheten i de resultat de kom fram till. Som universitetslärare i matematik blev jag ofta tillfrågad om hur jag såg på miniräknarens roll i matematikundervisningen. Eftersom diskussionen i första hand gällde låg- och mellanstadiet ville jag inte gärna uttala mig. Frågan låg utanför mitt kompetensområde men naturligtvis hade jag synpunkter och om jag från början var positiv till att låta räknaren sköta grovarbetet med algoritmräkning bytte jag efter några år åsikt och förespråkade en viss återgång till det gamla. Övningar på algoritmerna utan hjälp av räknedosa ökar förståelsen för talen och för vårt decimalsystem. Men jag torgförde aldrig mina synpunkter.

Naturligtvis skapar de elektroniska räknarna också möjligheter. Man kan nu i större utsträckning än förut tackla mer realistiska problem. De tal man arbetar med behöver inte vara tillrättalagda för att inte räkningarna ska bli outhärdliga. Jag minns själv från min skolgång hur jag led när jag skulle utföra divisioner av tre- och fyrsiffriga tal. Det ökade inte mitt då rätt låga intresse för matematik. Dividerar gör jag numera alltid med räknare. Om jag inte har en sådan till hands gör jag uppskattningar. Divisionsalgoritmen använder jag mycket sällan. Ett område som nu finns med i skollämnets matematik är statistik. Här menar jag att det är centralt att kunna arbeta med realistiska data och då blir miniräknare eller datorer viktiga hjälpmedel. Men känslan för talen, det som ofta kallas taluppfattning, måste finnas för att kontrollera resultatens rimlighet.

---

# Algebra

---

*Aritmetik! Algebra! Geometri! Storslagen treenighet! Lysande triangel!  
Den som inte har känt er är utan förnuft.  
Isidore Ducasse, Comte de Lautréamont, fransk poet (1846-1870)*

*Algebran är generös; den ger ofta mer än det vi frågar efter.  
Jean le Rond d'Alembert (1717-83)*

Under mina år som matematiklärare på högskolenivå har jag gång på gång noterat att de som inte behärskar algebran från gymnasiet får betydande svårigheter att följa undervisningen. Att relativt obehindrat kunna tolka och räkna med algebraiska uttryck är en förutsättning för matematikstudier på högskolenivå. På högskolan hinner man inte repetera och öva den grundläggande algebran. Den tar tid att lära sig och vänja sig vid. Historiskt tog det också förvånansvärt lång tid innan den slog igenom och blev det effektiva hjälpmedel som den är. På lertavlor från det gamla Babylonien löser man andragradsekvationer men utan att använda symboler för det obekanta och utan symboler för de vanliga räknesätten och för likhetstecknet. Det blir svårläst och omständligt och metoden beskrivs med konkreta exempel. Man ger inget generellt resonemang. I Euklides *Elementa* kan man hitta lösningen till andragradsekvationen men i geometrisk form. Resonemanget är allmängiltigt men det är svårt att genomskåda. En av de viktigaste verken i matematikens historia är Al Khwarizmis (ca 780- ca 850) verk *Hisab al-jabr w'al muqa-*

*balah.* Al Khwarizmi var lärare vid Visdomens hus i Bagdad och hade fått i uppdrag av kalifen att skriva en bok om matematik som skulle hjälpa yrkesmän av olika kategorier och resultatet blev alltså nämnda verk som kan översättas med "Kortfattad bok om beräkning med hjälp av komplettering och balansering." Ordet algebra kommer från al-jabr och i fortsättningen kallar jag för enkelhets skull Al Khwarizmis verk för *Al-jabr*. I *Al-jabr* visar Al Khwarizmi hur man löser ekvationer av första och andra graden. Vi ger ett exempel på hur han beskriver lösningen till en andragradsekvation. Ekvationen formuleras på följande sätt:

Kvadrat och 21 enheter är lika med 10 rötter.

Lösningen beskrivs på följande sätt:

Tag halva antalet rötter; hälften är fem. Multiplicera det med sig själv; produkten är tjugofem. Subtrahera därifrån tjugott som är anknuten till kvadraten; skillnaden är fyra. Bestäm dess rot; den är två. Subtrahera detta från hälften av antalet rötter; skillnaden är tre. Detta är den sökta roten och kvadraten är nio. Du kan också addera hälften av antalet rötter; summan är sju. Detta är också den sökta roten av kvadraten och kvadraten själv är fyrtionio.

Med hjälp av symbolisk algebra skriver vi ekvationen

$$x^2 + 21 = 10x$$

och lösningen

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 21} = 5 \pm 2.$$

Man kan fråga sig hur Al Khwarizmi har kommit fram till lösningen? Han hänvisar till en geometrisk figur som kan ha inspirerats av *Elementa*. Men det är inte det jag vill fästa uppmärksamheten på här. Det är själva sättet att uttrycka sig på. Det är uppenbart att Al Khwarizmis ordrika beskrivning av ekvationen och dess lösningar känns omständlig. Med den symboliska algebran blir framställningen kortare och mer överblickbar. Utvecklingen av matematiken försvåras av tungrodda framställningar. Räkning med symboler gör det enklare. Men då måste man först bekanta sig med dem och lära sig räkna med dem. Och det kan tid. Men när man väl lärt sig det är vinsten stor.

Det tog som jag tidigare sagt lång tid innan den symboliska algebran slog igenom. I sitt verk *Ars magna* från 1545 visar den italienske läkaren och matematikern Girolamo Cardano (1501-76) hur man löste tredje- och fjärdegradsekvationer. Skillnaden mellan hans framställning och Al

Khwarizmis framställning är inte stor. Visserligen använder han förkortningar så beskrivningarna blir kortare, men han räknar aldrig med dem. Ekvationen

$$3x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 10x = 50$$

skriver Cardano på följande sätt:

3qdd. p: 5cub p. 6qd. m: 10 pos æqualia 50.

Det definitiva genombrottet av den symboliska algebran kom med René Descartes (1596-1650) *La Géométrie* från 1637. I den kan vi känna igen oss. Den symboliska algebran var grunden för en stark utveckling av matematiken. Den var bl.a. en förutsättning för differential - och integralkalkylen. Beteckningssystemet förbättrades successivt och till det bidrog inte minst Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716), som var intresserad av semiotik. Under 1700-talet skedde en dramatisk utveckling av den del av matematiken som kallas Analys och den store mästaren var Leonard Euler vars algebraiska fingerfärdighet och matematiska intuition var enastående. Det var också Euler som skrev den epokgörande lärobok i algebra som vi diskuterade i avsnittet om aritmetik.

Som universitetslärare i matematik har jag, som jag tidigare sagt, upplevt att det är ett oundgängligt krav att studenter som ska läsa matematik på högskolenivå behärskar den symboliska algebran. De måste kunna tolka och ställa upp formler. De måste kunna göra förenklingar och omskrivningar. De måste kunna lösa ekvationer och enkla ekvations-system. Detta krävs inte bara inom utbildningar som inriktar sig mot teknik och naturvetenskap. Även inom ekonomi och samhällsvetenskap krävs ofta algebraiska baskunskaper.

Om man följer historien tycker jag mig se tre faser när det gäller algebrans utveckling och jag menar att de bör tas hänsyn till också i dagens undervisning.

- Algebran är från början kopplad till ekvationslösning som i Al Khwarizmis *Al jabr* och i Cardanos *Ars magna*. För mig verkar det vara en lämplig ingång till bokstavsräkning. Eleven vill bestämma ett tal som har vissa egenskaper och det är då naturligt beteckna den obekanta med en bokstav, skriva upp villkoren för att sedan genom diverse manipulationer bestämma den obekanta. Den obekanta är förvisso obekant men man vet att det är ett tal och det gör det mer konkret än att bara skriva upp ett algebraiskt samband som ska gälla för en mängd av tal. I arbetet med ekvationer lär eleven sig också att respektera likhetstecknet.

- Det verk som betecknas som den symboliska algebrans genombrott heter *La Géométrie*<sup>2</sup>. Ordet algebra finns inte i titeln, men det är för att formulera geometriska samband som Descartes utvecklar sin algebra. Geometrin har många pedagogiska förtjänster. Eleven kan rita figurer och får därigenom en bild av de storheter hon eller han räknar med. Att koppla samman introduktionen av symbolisk algebra med formulering av geometriska samband och enkel geometrisk problemlösning kan vara ett sätt att göra den symboliska algebran levande.
- Medan Descartes utvecklar algebran för att bättre förstå geometrin så kopplar Euler i sin *Algebra* samman algebran med aritmetiken. Han introducerar räkning med symboler i början av boken på följande sätt:

... och vi måste bara nämna att i Algebra, representerar vi talen med bokstäver  $a, b, c, d$  etc. för att generalisera dem. Alltså betyder uttrycket  $a + b$  summan av två tal, som uttrycks genom  $a$  och  $b$ , och dessa tal kan vara antingen mycket stora eller mycket små. På samma sätt betyder  $f + m + b + x$  summan av de tal som representeras av dessa fyra bokstäver.

Kanske behöver inte introduktionen till räkning med symboler vara svårare än så. Att sedan kunna skriva upp samband och att kunna formulera mönster hos följderna av tal i algebraisk form är den tredje fasen i förmågan att behärska algebran.

På samma sätt som man i aritmetiken behöver öva för bli bekant med talen måste man öva för att behärska räkning med symboler. Och som jag tidigare sagt måste man kunna addera, subtrahera, multiplicera och dividera bråktal för att kunna utföra dessa operationer i algebran.

---

<sup>2</sup>Den analytiska geometrin där man beskriver t.ex. räta linjer och cirklar med ekvationer i ett koordinatsystem kopplas ofta samman med Descartes eller Cartesius. Koordinatsystem kallas ju ofta cartesiska. I *La Géométrie* finns inga koordinatsystem. Descartes geometri är syntetisk men han uttrycker samband mellan längder med hjälp av symboler. Koordinatsystemet infördes senare av en av hans elever.

---

# Problemlösning

---

*Ett tydligt formulerat problem är till hälften löst.  
Charles Franklin Kettering,  
uppfinnare och entreprenör, (1876-1958)*

*Varje problem som jag löste blev en regel,  
som sedan användes till att lösa andra problem.  
Réné Descartes (1596-1650)*

Matematik definieras enligt *Nationalencyklopedin* som "vetenskapen för att lösa problem kring beräkningar av olika slag samt metoder för detta". Problemlösning är central inom matematiken. Svåra problem har utmanat stora matematiker och i arbetet med att lösa dem har begrepp införts, metoder skapats och teorier utvecklats som har haft bäring på det aktuella problemet men som samtidigt visat sig vara viktiga verktyg för att lösa andra problem ofta helt skilda från det ursprungliga. Så har ämnet matematikämnet utvecklats och delar av det har blivit oundgänglig medborgarkunskap, andra delar har blivit effektiva verktyg för specialister av olika slag.

På samma sätt som problemlösning är central för utveckling av ny matematik anser jag att den bör vara central för undervisningen i matematik på alla stadier. Nya begrepp och metoder bör motiveras av problem som måste lösas. Man kan sedan formulera nya problem inom den teorin man har presenterat. De kan vara av olika svårighetsgrad. Genom enkla problem kan man kontrollera förståelsen för centrala begrepp och

samband. Svårare problem blir utmaningar för eleverna. Ofta hittar de inte genast lösningen, de får pröva sig fram, de misslyckas och upptäcker att något har undgått dem. De får stöta och blöta det de lärt sig och på det viset djupnar kunskaperna. Efter att ha löst ett svårt problem kan de känna en stor tillfredsställelse. Ibland kan de få en euforisk känsla. För många år sedan gav jag mina elever mycket svåra geometriska problem som de skulle lösa tillsammans i grupper. En av eleverna sade att när hon till slut såg lösningen var hon tvungen att ställa sig på bordet och skrika ut sin glädje.

Mycket forskning har gjorts om matematisk problemlösning. Några stora matematiker som Henri Poincaré (1854-1912), Jacques Hadamard (1865-1963) och Hermann Weyl (1885-1955) har genom introspektion försökt analysera de processer som styr avancerad problemlösning och utvecklingen av ny matematik. Hadamard betonar i boken *The Psychology of Intention in the Mathematical Field* intuitionens och det omedvetnas roll vid skapande verksamhet. Det finns en stor mängd artiklar om hur elever i skolan och på universitet arbetar med problemlösning.

Den person som jag i första hand förknippar med problemlösning i matematik är George Polya (1887-1983). Han föddes i Budapest och studerade juridik och språk innan han gav sig på matematik. Han var aktiv inom många områden inom matematiken men det är framför allt hans böcker om problemlösning som gjort honom känd. Tillsammans med Gabor Szegő (1895-1985) gav han 1925 ut en problemsamling i två delar, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis*. Det unika med den var att problemen inte var strukturerade efter ämnesområde utan efter metod. Problemen låg på en relativt avancerad nivå och riktade sig till en liten krets av studenter. Han gav sedan ut fler böcker om problemlösning där anslaget var bredare. Den mest kända är *How to solve it?* från 1945. Den har använts och används fortfarande inom lärarutbildningen. Den grundläggande strategin som Polya förordar kan användas i matematikundervisning på alla nivåer och även på problemlösning utanför matematiken. Polya delar upp problemlösningsprocessen i fyra faser.

1. Orientering. Rita en figur. Kontrollera problemställningen. Finns det tillräckligt med data för att lösa problemet? Kan det finnas mer än en lösning?
2. Gör en plan. Sök efter olika angreppsmetoder. Vilka satser kan vara relevanta? Har jag sett liknande problem?
3. Genomför planen. Om det visar sig att den leder till alltför komplicerade räkningar, som det kan vara svårt att genomföra, så kan det vara lämpligt att revidera den.

4. Kontrollera resultatet. Är det rimligt? Ibland t.ex. vid konstruktionsproblem krävs bevis för att den lösning man kommit fram till verkligen är de sökta.

Planen är relativt allmänt hållen. Det är dess styrka. Den kan användas på alla nivåer. Naturligtvis måste man ibland backa. Jag kanske har svårt att hitta en plan i fas 2 och behöver gå tillbaka till fas 1 för att kontrollera att jag förstått problemet. Kanske verkar resultatet orimligt. Då får jag börja om från början.

Jag skulle vilja lägga till en punkt, som möjligen kan vara en del av den fjärde nämligen:

Skriv rent lösningen så att räkningar och resonemang blir klara och tydliga. Då kan eventuella luckor i resonemangen, eventuella felslut och felräkningar upptäckas.

Vi ska ge ett exempel på hur man med framgång kan följa Polyas plan.

I en likbent triangel med sidorna 5 cm, 5 cm och 4 cm skär höjderna mot de lika långa sidorna dessa i  $P$  och  $Q$ . Bestäm sträckan  $PQ$ .

Vi ritar först en figur och kallar triangelns hörn för  $A, B$  och  $C$ . Se figur 1. De lika långa sidorna är  $AB$  och  $AC$ .

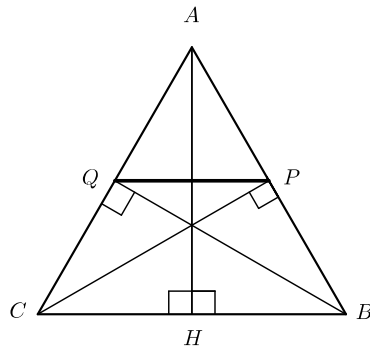
För att göra upp en plan resonerar vi på följande sätt:

Av symmetriskäl är  $PQ$  parallell med  $BC$ . Om vi kan beräkna  $AP$  så kan vi bestämma  $PQ$  eftersom de båda triangelarna  $ABC$  och  $APQ$  likformiga. Men om vi kan bestämma höjden  $CP$ , så kan vi bestämma  $AP$  med hjälp av Pythagoras sats. Men vi kan beräkna triangelns area eftersom vi kan beräkna höjden  $AH$  mot  $BC$  genom Pythagoras sats. Om vi känner triangelns area kan vi bestämma höjden  $CP$  eftersom vi känner basen  $AB$ .

Planen är att i ordning beräkna höjden  $AH$ , triangelns area, höjden  $CP$ , sträckan  $AP$  och slutligen sträckan  $PQ$  med likformighet.

$$AH = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}.$$

$$\text{Triangelns area} = \frac{4 \cdot \sqrt{21}}{2} = 2 \cdot \sqrt{21}.$$



**Figur 1:**

Om vi betecknar höjden  $CP = h$  så är

$$\frac{5h}{2} = 2\sqrt{21}$$

vilket ger  $h = \frac{4\sqrt{21}}{5}$ .

Vi beräknar nu  $AP$  med Pythagoras sats och får

$$AP = \sqrt{5^2 - h^2} = \sqrt{25 - \frac{16 \cdot 21}{25}} = \sqrt{\frac{289}{25}} = \frac{17}{5}.$$

Till slut kan vi bestämma den sökta sträckan genom likformighet. Eftersom trianglarna  $APQ$  och  $ABC$  är likformiga har vi att

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{AP}{AB}$$

d.v.s.

$$\frac{PQ}{4} = \frac{17/5}{5}$$

vilket ger

$$PQ = \frac{68}{25} = 2.72.$$

Resultatet är rimligt. Sträckan  $PQ$  måste vara mindre än 4 cm eftersom  $BC$  har längden 4 cm. Eftersom  $AP$  är större än halva  $AB$  måste  $PQ$  vara större än halva  $BC$  d.v.s. längden av sträckan  $PQ$  är större än 2 cm.

Planen fungerade men kanske finns det en enklare lösning. Vi arbetade i lösningen med kvadratrötter men de finns inte med i slutresultatet.

Om vi studerar figuren finner vi att triangelarna  $AHB$  och  $CPB$  är likformiga. De är ju båda rätvinkliga och har en gemensam vinkel. Om vi kallar  $BP$  för  $y$  så får vi

$$\frac{y}{2} = \frac{4}{5}$$

vilket ger  $y = \frac{8}{5}$  och sträckan  $AP$  har längden  $5 - \frac{8}{5} = \frac{17}{5}$  cm och vi kan nu fortsätta som förut.

Uppenbarligen är denna lösning enklare. Men jag brukade ge mina elever rådet att fortsätta med den plan de startat med och inte försöka fundera ut den enklaste lösningen. Förenkla kan man göra i efterhand.

Polyas plan fungerar kanske inte alltid men det kan vara bra att börja med den. Många tycker den är alltför allmänt hållen men det är också dess styrka. Den har skapats efter omfattande arbeten med problemlösning och funderingar kring problemlösningsprocessen. Polya var en hängiven matematiker och pedagog. Det första stycket i förordet till första upplagan av *How to solve it?* får avsluta vårt avsnitt om problemlösning.

En stor upptäckt löser ett stort problem men det är ett korn av varje problem. Ditt problem kan vara blygsamt; men om det utmanar din nyfikenhet och sätter igång din uppfinningsriktighet, och om du löser det med dina egna metoder, kan du erfara spänningen och njuta av upptäckstens triumf. Sådana erfarenheter i en mottaglig ålder kan skapa smak för intellektuellt arbete och ge avtryck på tänkande och personlighet som varar livet ut.



---

# Matematik – lust och skräck, fantasi och stringens

---

*Det fanns en stig som ledde över ett fält till New Southgate, och jag brukade gå dit ensam för att se solnedgången och fundera på självmord. Jag begick dock inte självmord eftersom jag ville lära mig mer om matematik.  
Bertrand Russel (1872-1970)*

*Hör jag ordet matematik så förknippar jag det bara med mörker, oförklarliga siffror och krumelurer som bara snurrade runt i mitt huvud och sen ut igen  
Okänd elev i en svensk skola*

*Vad har väl klokhets och eftertanke i sina påsar, som ej fantasin först funnit.  
Ur Patrasket av Hjalmar Bergman (1883-1931)*

*Matematiken utgör en sträng ram som inte släpper igenom lösa förmodanden. Sådana kan mycket sällan ge upphov till meningsfull matematik.  
Lars Gårding (1919-2014)*

## Lust och skräck

Matematiken har tagit en stor plats i mitt liv. Från och med mitt femtonde år var mitt intresse stort men det var det inte från början. Jag har inget minne av matematikundervisningen från mina första skolor. Det betyder antagligen att den fungerade men att jag inte tog så stor notis om den. Matematiklektionerna i de första åren i realskolan minns jag. De var oändligt tråkiga. Vi lämnades att räkna individuellt och jag kunde inte koncentrera mig och räknade oftast fel. Jag höll ögonen på klockan som fanns på väggen för att se hur långt det var kvar till rast. Men inställningen ändrades när geometrin kom in i bilden med Euklides *Elementa* i en för skolan tillrättalagd form. Det var bevisen som tilltalade mig. Man kunde visa satser genom rent logiska resonemang. Man behövde inte räkna och det fanns därför inte några möjligheter att räkna fel. Intresset delades inte av alla av mina klasskamrater. Inte ens av de som var duktiga i matematik. Jag fick förklara för dem och det ökade mitt självförtroende. Jag njöt av det och min inställning till matematik förändrades. Jag ville nu också visa att jag kunde behärska de andra delarna av matematikämnet som ingick i realskolans kurs: procenträkning, reguladetri, ekvationslösning och algebraiska förenklingar. När jag sedan började på gymnasiet blev matematik inte bara ett skolämne utan också något av en hobby. En stor del av min fritid ägnade jag åt att lösa problem. Jag fick förklara matematiska sammanhang för mina klasskamrater och jag började så småningom ge privatlektioner mot betalning. På universitetet var sedan matematik mitt huvudämne. Jag läste pliktskyldigast fysik eftersom det krävdes för examen. Mot slutet av 1950-talet ökade antalet nybörjare vid universiteten drastiskt och det behövdes nya lärare. Det var då som jag vårterminen 1958 anställdes som assistent vid matematiska institutionen i Lund och sedan dess arbetade jag som universitetslärare i matematik ända fram till min pensionering 2002 med avbrott 1961-64 då jag var lärare vid Högre allmänna läroverket i Trollhättan.

Matematiken har präglat mitt yrkesverksamma liv och det har varit ett privilegium. Jag har tyckt om att lösa problem. Det har varit spännande att lära sig nya teorier och att ge matematiken logisk struktur. Att undervisa har varit roligt. Jag har tyckt om att föreläsa. Det har tilltalat exhibitionisten i mig. När man i dialog med eleverna i seminarier eller vid enskilda frågestunder ser hur de börjar inse sammanhangen är det högtidsstunder. Man kan se i ögonen och på kroppsspråket att de har förstått.

Mina upplevelser av matematikämnet är sedan 15-årsåldern alltså lustfyllda. Man blir lätt panegyrisk. Men naturligtvis har det också funnits dalar - problem som jag inte kunnat lösa, usla föreläsningar, dåligt

ledda seminarier och tentor som visat att jag har misslyckats i min undervisning. Men i det stora hela har jag haft stor glädje av att få ägna mig åt matematik i min yrkesverksamhet. Jag tror att många av mina kollegor känner samma sak.

Men alla elever har inte samma positiva känslor för matematik. En del tycker ämnet är tråkigt och så kommer det nog alltid att vara. De lär sig ändå de elementa som de behöver. Alla kommer inte att älska matematik även om vi lärare gör vårt bästa för skapa lust till att lära matematik. Det arbetet måste vi naturligtvis fortsätta med.

Mycket allvarigare är det att många känner skräck inför ämnet. Jag finner det märkligt att många i andra avseenden mycket begåvade personer har svårt att tillämpa de fyra räknesätten. Delar av matematiken är vad jag kallar medborgarkunskap. Man måste behärska de basala delarna av ämnet för att fungera i samhället. Därför är det ytterst viktigt att försöka att komma till rätta med det som kallas matematikskräck. Själv har jag så gott som hela mitt liv undervisat studenter som själva valt ämnet och jag har därför inga realistiska idéer om hur man kan tackla problemet. Men jag har haft kollegor inom lärarutbildningen som ägnat mycket av tid och kraft att försöka göra matematiken begriplig för dem för vilka ämnet är ogripbart och abstrakt även på mycket elementär nivå. Man försöker konkretisera på olika sätt. Man försöker knyta an till vardagen. Olika laborativa hjälpmedel har utformats. Matematikskräcken är också föremål för en omfattande matematikdidaktisk forskning. I Sverige har vi under de senaste trettio åren byggt upp en relativt stor forskningsverksamhet i matematikdidaktik med professorer och doktorander. Vi har ett *Nationellt centrum för matematikutbildning* med en omfattande fortbildningsverksamhet. Tidskriften *Nämnan* sammanställer och sprider forskningsresultat, pedagogiska försök och tankar om matematikundervisning. Vartannat år samlas matematiklärare från alla stadier i Matematikbiennalen. Det är viktigt att dessa initiativ får fortsätta att utvecklas. De ger lärarna nya impulser och möjligheter att förändra sin undervisning samtidigt som de alltid måste utgå från sina egna erfarenheter. En del av den forskning och fortbildning som byggs upp bör ägnas åt att minska och helst utrota matematikskräcken.

## Fantasi och stringens

Jag började denna texten med att påstå att för de flesta är matematik detsamma som räkning. Man lär sig metoder och räkneregler som man sedan kan använda i vardagen. Det verkar inte ha mycket med fantasi att göra. Men matematiken är en abstrakt vetenskap. Våra tal är abstrakta begrepp som det tagit årtusenden att utveckla. Inte minst viktigt har det varit att hitta ett lämpliga beteckningar. För det krävdes fantasi. De

matematiska begrepp och teorier som utvecklats är från början fantasifoster. I sitt stora verk *Ars magna* från 1548 visar italienaren Girolamo Cardano (1501-76) hur man löser ekvationer av andra, tredje och fjärde graden. Han börjar räkna med negativa tal fast han inte riktigt förstår vad de betyder. Än värre blir det när han räknar med kvadratroten ur negativa tal. Han konstaterar att lösningarna till problemet "Bestäm två tal vars summa är lika med 10 och vars produkt är 40" är  $5 + \sqrt{-15}$  och  $5 - \sqrt{-15}$  och räknar med dem trots "den intellektuella plåga det innebär." De finns ju bara i hans tankevärld och har inte någon motsvarighet i en konkret verklighet. Trettio år senare publicerade Cardanos landsman Rafael Bombelli (1526-72) verket *L'algebra opera* där han utan betänkligheter räknar med det vi idag kallar komplexa tal. Bombelli var ingenjör och hade arbetat med praktiska projekt som restaurering av våtmarker. Han hade studerat *Ars magna* och funnit att det ibland var praktiskt att räkna med tal vars kvadrat är lika med  $-1$ . Varför då inte använda sig av det även om talen bara är en produkt av fantasin? De komplexa talen har visat sig vara effektiva verktyg inom många tillämpningar av matematiken inte minst inom fysiken. Fantasifostren har blivit praktiska hjälpmedel. Exempelen kan mångfaldigas. Skapandet av de icke-euklidiska geometrin är ett slående exempel. En av upphovsmännen Janos Bolyai (1802-60) formulerade sig på följande sätt: "Ur ingenting har jag skapat en helt ny värld." I själva verket är all matematik en produkt av vår fantasi. Den finns bara i vår tankevärld. Men den är ett effektivt hjälpmedel.

Men det är inte bara när ny matematik skapas som det krävs fantasi. Det krävs också fantasi för att tillgodogöra sig nya begrepp och nya teorier. Problemlösning är ett centralt moment i matematiken som kräver fantasi. De problem som elever möter kan vara av olika svårighetsgrad. Några är rena rutinproblem som testar om eleven har förstått ett begrepp. Men de mer utmanande problemen kräver ofta att man hittar nya vägar. Olika lösningsmetoder testas och förkastas. Man vrider och vänder på problemen. Några gränser finns inte. Fantasin kan flöda fritt. Till sist hittar man förhoppningsvis en idé som fungerar.

När man väl tror sig ha hittat en lösning, bildat ett begrepp eller formulerat ett samband så kräver matematiken att det inordnas i ett logiskt system. Begrepp måste ges skarpa definitioner och satser måste bevisas. I sekler var Euklides *Elementa* lärobok i många skolor i Europa. På det sättet skulle eleverna lära sig vikten av tydlighet och logisk stringens inte bara i matematik utan i allmänhet. Det kan ha varit så för vissa elever. De som tyckte om att se en matematisk teori byggas upp utifrån några enkla oomstridda fakta. Mina erfarenheter som lärare på realskolan i Trollhättan är att dessa elever finns men att de är re-

lativt få och för de andra är verksamheten meningslös. En del lär sig satser och bevis utantill medan andra helt enkelt inte bryr sig. Under de skolreformer som genomfördes under 1960-talet försvann Euklides från kursplanerna i skolan. Förmodligen var det rimligt men kanske gick man för långt. Geometrin är trots allt ett mycket lämpligt område för att visa hur man kan formulera definitioner och hur man bevisar satser. Satsen om vinkelsumman i en triangel och Pythagoras sats måste enligt mening ingå i grundskolans matematikkurser och de kräver bevis. De kan vara modeller för hur stringenta resonemang kan föras.

Även problemlösning kräver strikt logiska resonemang. När man ibland efter många försök äntligen hittat en lösning måste den redovisas på ett logiskt oantastligt sätt. Då kan eventuella felslut eller luckor i det logiska resonemanget komma i dagern. Felaktigheter kan rättas till och argumenteringen kan skärpas. Matematik är förvisso inte bara räkning. Men det är inte heller bara problemlösning. Man måste också kunna redogöra för sina tankar. Esaias Tegnér (1782-1845) sade i sitt tal vid magisterpromotionen i Lund 1820: "Vad du ej kan säga vet du ej. . . . det dunkelt sagda är det dunkelt tänkta." De matematiska samband man tycker sig se i fantasin är ofta något som man anar dunkelt men för att dessa ska bli matematiska sanningar krävs att de ingår i ett sammanhang med tydliga definitioner och stringenta resonemang.

Matematiken har ett janusansikte - den ena sidan är öppen, generös och mottaglig för nya idéer, den andra är barsk och kräver ordning och reda.