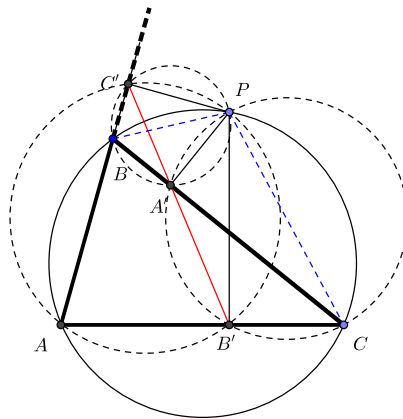


NÅGRA PRYDNADSSTENAR I KLASSISK GEOMETRI

Anders Tengstrand



copyright Anders Tengstrand

För att på gamla dagar fylla tillvaron med ett meningsfullt innehåll skrev jag texten *Fyra fundamentala teorem*. Den finns nu på min hemsida, www.anderstengstrand-funderingarkringmatematik.se, till allmänt beskådande och kan läsas av den som har lust och ork.

Skrivandet fyllde ett tomrum. Det var roligt och kändes meningsfullt. Men när det var klart var jag tillbaka till tiden före skapandet av *Fyra fundamentala teorem*. Jag behövde ett nytt projekt och det resulterade i denna lilla skrift som har fått namnet *Prydnadsstenar i klassisk geometri*. Den handlar om några resultat inom klassisk geometri, som kom till efter antiken under tiden 1600-1900. De ingår normalt inte i den grundläggande matematikutbildningen på högskolenivå och förmodligen mycket sällan på högre nivåer. Det handlar om punkter, räta linjer och cirklar, om punkter som ligger på samma räta linje eller på samma cirkel och om räta linjer och cirklar som går genom samma punkt. Som förut skriver jag med tanke på studenter som gått ut gymnasiet med ett visst antal kurser i matematik i bagaget. Ibland kan komplexiteten vara stor och det kan vara svårt att ta sig igenom delar av texten. Så var det för mig ibland. Men man kan hoppa över och gå vidare. De mest tekniska delarna är bevisen och de har markerats genom indragning av texten. De andra delarna kan nog vem som helst som är intresserad kunna ta del av. Som jag sagt tidigare: Läs så mycket du har lust och ork!

Jag vill passa på att tacka min dotter Lena som har läst igenom texten till *Fyra fundamentala teorem*, hittat fel och kommit med förslag på förändringar samt min dotterdotter Emma, som hjälpt mig att lägga ut texten på nätet.

Växjö 1 april 2026
Anders Tengstrand

Inledning

*Men strunt är strunt och snus är snus,
om ock i gyllne dosor,
och rosor i ett sprucket krus
är ändå alltid rosor*
Ur Idealism och realism av Gustaf Fröding (1860-1911)

Den klassiska geometrin med rötterna i antiken är en oundgänglig del av matematiken. Vi behöver kunna mäta längder, areor och volymer. Vi behöver en terminologi för geometriska objekt. Ord som kub, kvadrat, cirkel, sfär m.m. gör det lättare att med precision beskriva delar av verkligheten. Den typ av logiskt systembygge som Euklides *Elementa* introducerade för mer än tvåtusen år sedan måste en matematiker förstå och behärska. Ett matematiskt teorem är inte accepterat om det inte kan inordnas i ett sådant system. Basala satser om likformighet, om kongruens, om cirklar och om trianglar tillhör den matematiska allmänbildningen. För att inte tala om Pythagoras sats. Men en utveckling av den typen av matematik är knappast aktuell. I så fall handlar det om frågeställningar kring andra typer av geometrier. Men att bevisa nya satser om cirklar och trianglar i Euklides anda är knappast någon som ägnar sig åt idag. Den klassiska geometrin är klassisk och uttröskad. De resultat som man kom fram till under antiken är i högsta grad relevanta och användbara medan teorem som man därefter lyckades formulera och bevisa är kanske inte ens kända av aktiva matematiker.

Det finns satser inom klassisk geometri som kanske inte tillhör den basala matematiska kunskapsmassan men som visar på egenskaper och samband som är oväntade och som jag därför upplever som vackra. Men

de har knappast någon tillämpning. De är som prydnadsstenar som är vackra att titta på men som inte är användbara. Dess enda värde är dess inneboende skönhet. Några av dessa satser kommer jag att ta upp i denna lilla skrift. I förgrunden är tre av *Elementas* grundläggande begrepp, punkter, räta linjer och cirklar, och det handlar om hur flera räta linjer eller flera cirklar går genom samma punkt och om hur flera punkter ligger på samma räta linje eller på samma cirkel. De flesta av satserna formulerades och bevisades under 1600-, 1700- och 1800-talen.

Några basala egenskaper hos trianglar

Punkten är den minsta linjen.

*Alla linjer indelas i raka och krokiga. Den linje,
som hvarken är rak eller krokig kalla vi sned.*

En mycket krokig linje kallas cirkel.

En ovanligt rak linje kallas quadrat (= fyrlikning)

*Ur Falstaff Fakirs Hvar och en sin egen professor
av Axel Wallengren (1865-96)*

I den klassiska euklidiska geometrin är triangeln ett centralt begrepp. En anledning är att varje område som begränsas av räta linjer kan delas in i trianglar. Triangeln blir därför en naturlig byggsten i studiet av polygoner och i trianglar figurerar ofta följande fyra typer av räta linjer:

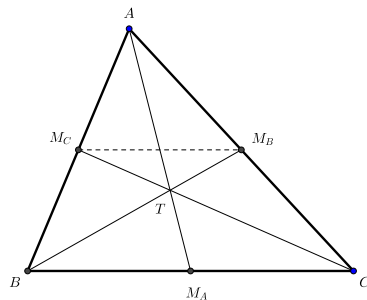
- medianer, som förenar ett hörn med motstående sidas mittpunkt,
- bisektriser som delar en av triangelns vinklar mitt itu,
- mittpunktsnormaler till triangelns sidor och
- höjder som går genom ett hörn och är vinkelrät mot motstående sida.

I geometriska konstruktioner spelar de en stor roll och i konstruktionsprogrammet Geogebra finns speciella kommandon för dem. I varje triangel finns tre medianer, tre bisektriser, tre mittpunktsnormaler och

tre höjder. Att tre räta linjer skär varandra i samma punkt är naturligtvis relativt ovanligt men i de här fallen är det ett faktum. De tre medianernas skärningspunkt kallas triangelns tyngdpunkt, de tre bisektrisernas skärningspunkt är medelpunkt till den cirkel som tangerar alla triangelns tre sidor, de tre mittpunktsnormalerna är medelpunkt i den cirkel som går genom alla triangelns hörn och de tre höjdernas skärningspunkt kallas ofta triangelns ortocentrum.

Att tre räta linjer går genom en och samma punkt är som sagt ingen självklarhet och det skall bevisas. Bevisen är inte svåra men resonemangen kräver en viss ordning och reda. Man väljer ofta ut två räta linjer och visar att deras skärningspunkt har vissa egenskaper. Med hjälp av det kan man sedan visa att den tredje linjen går genom samma punkt.

Medianernas skärningspunkt



Figur 1:

Medianen BM_B skär medianen CM_C i punkten T .

Enligt parallelltransversalsatsens omvändning är $M_B M_C$ parallell med BC .

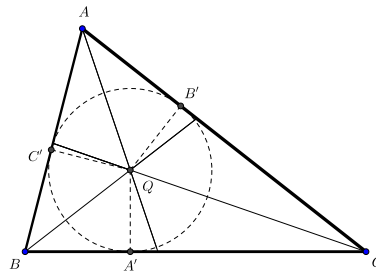
Triangelna ABC och $AM_C M_B$ är likformiga och $AM_C/AB = AM_B/AC = M_C M_B/BC = 1/2$

Vidare är triangelna $M_B T M_C$ och BTC är likformiga eftersom $\angle T M_C M_B = \angle T C B$ och $\angle T M_B M_C = \angle T B C$.

Då är $TM_B/BT = M_C M_B/BC = 1/2$. Medianen CM_C delar alltså medianen BM_B i förhållandet 1:2. På samma sätt inses att medianen AM_A delar medianen BM_B i förhållandet 1:2. Alltså måste de tre medianerna skära varandra i en och samma punkt.

Att medianernas skärningspunkt kallas triangelns tyngdpunkt är naturligt. Om vi utformar en triangel i ett homogent material så delar en median triangeln i två delar med lika stora areor och tyngdpunkten måste alltså ligga på en median och eftersom det finns tre medianer så ligger den på alla tre och är alltså identisk med medianernas skärningspunkt.

Bisektrisernas skärningspunkt



Figur 2:

Bisektriserna till vinklarna B och C skär varandra i punkten Q . Normalerna genom Q till sidorna AB , AC och BC skär respektive sidor i C' , B' respektive A' .

Triangeln $BA'Q$ är kongruent med triangeln $BC'Q$ eftersom

- $\angle A'BQ = \angle C'BQ$ då BQ är bisektris till $\triangle ABC$,
- $\angle QA'B$ och $\angle QC'B$ båda är räta och

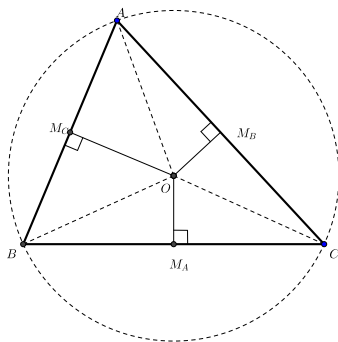
- sidan BQ är gemensam.
Alltså är $A'Q = C'Q$.
På samma sätt visas att triangelarna $CA'Q$ och $CB'Q$ är kongruenta och att därmed $A'Q = B'Q$.
Vi ska nu visa att AQ är bisektris till $\triangle BAC$
Betrakta därför triangelarna $AB'Q$ och $AC'Q$. De är kongruenta eftersom

- sidorna $B'Q$ och $C'Q$ är lika stora. De är ju båda lika med $A'Q$.
- sidan AQ är gemensam och
- $\angle AB'Q$ och $\angle AC'Q$ båda är räta.

Alltså är $\angle B'AQ = \angle C'AQ$ och därmed är AQ bisektris till $\triangle BAC$.
De tre bisektriserna skär alltså varandra i punkten Q .

Eftersom $QA' = QB' = QC'$ så ligger punkterna A' , B' och C' på en cirkel med Q som medelpunkt. Cirkeln tangerar triangelns sidor eftersom vinklarna mellan triangelns sidor AB , BC och AC är vinkelräta mot radierna QA' , QB' respektive QC' . Cirkeln är den i triangeln inskrivna cirkeln.

Mittpunktsnormalernas skärningspunkt



Figur 3:

Mittpunktsnormalerna till sidorna AB och AC skär varandra i punkten O . Punkterna M_C och M_B är mittpunkter på sidorna AB respektive AC .

Triangeln AOM_B och COM_B är kongruenta eftersom

- sidan OM_B är gemensam,
- sidorna AM_B och CM_B är lika stora, då M_B är mittpunkt på sidan AC , och
- $\sphericalangle OM_BA$ och $\sphericalangle OM_BC$ båda är räta.

Alltså är $AO = CO$.

På samma sätt visas att triangeln AOM_C och BOM_C är kongruenta och därmed att $AO = BO$.

Vi ska nu visa att OM_A är mittpunktsnormal till sidan BC där M_A är mittpunkten på sidan BC .

Betrakta nu triangeln BOM_A och COM_A . De är kongruenta eftersom

- sidorna BO och CO är lika stora då båda är lika med AO
- sidan M_AB är lika stor som sidan M_AC då M_A är mittpunkt på sidan BC
- sidan OM_A är gemensam.

Alltså är $\sphericalangle BM_AO = \sphericalangle CM_AO$ och då de tillsammans är 180° är båda lika med 90° . Alltså är OM_A mittpunktsnormal till BC .

Eftersom $OA = OB = OC$ ligger triangelns hörn A, B på C en cirkel med medelpunkt i O . Cirkeln kallas den till triangeln omskrivna cirkeln.

Höjdernas skärningspunkt

För att visa att triangelns höjder skär varandra i en och samma punkt använder vi en annan teknik. Genom att konstruera en ny triangel där den ursprungliga triangelns höjder är den nya triangelns mittpunktsnormaler kan vi använda oss av det vi nyss visat.

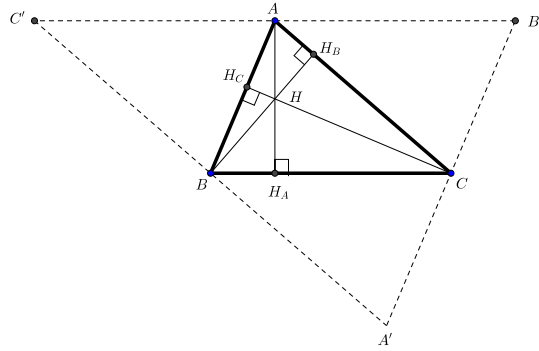
I figur 4 på nästa sida är $B'C'$ en rät linje genom A parallell med BC , $A'C'$ en rät linje genom B parallell med AC och $A'B'$ en rät linje genom C parallell med AB .

Fyrhörningen $ACA'B$ är en parallelogram och därför är $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BA'C$. På samma sätt inses att $\sphericalangle ABC = \sphericalangle AB'C$ och att $\sphericalangle BCA = \sphericalangle BC'A$.

Alltså är triangeln $A'B'C'$ likformig med triangeln ABC .

Vidare är $AC = A'B = BC'$. Alltså är B mittpunkt på $A'C'$.

På samma sätt inses att A och C är mittpunkter på $B'C'$ respektive $A'B'$. Höjderna AH_A, BH_B och CH_C är därför



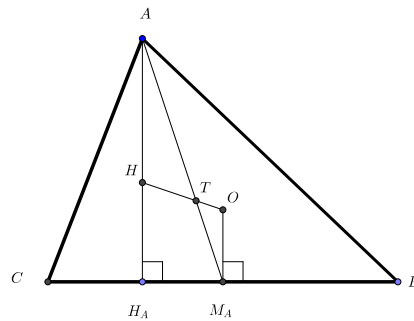
Figur 4:

mittpunktsnormaler till sidorna i triangeln $A'B'C'$ och enligt vad vi nyss visat skär de varandra i en och samma punkt.

Att en triangelns bisektriser respektive mittpunktsnormaler skär varandra i en punkt skär finns i den fjärde av *Elementas* tretton böcker. Satserna om medianernas och höjdernas skärningspunkter har jag inte kunnat hitta i *Elementa* men allt talar för att de var kända under antiken. I nästa avsnitt ska vi se hur 1700-talets störste matematiker Leonard Euler (1707-83) härleder egenskaper hos dem.

Eulers linje

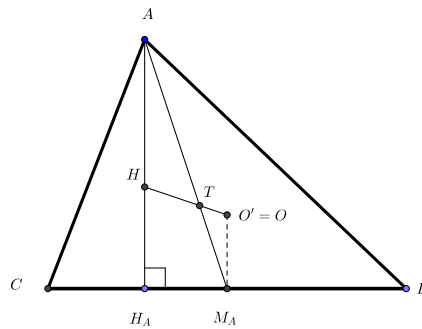
*Det sköna är evigt: Med fiken håg
Vi fiska dess guldsand ur tidens våg.
Ur Det eviga av Esaias Tegnér (1782-1846)*



Figur 5:

I en artikel *Solutio Facilis Problematum Qurumdam Geometricorum Difficiliorum* från 1767 visar Leonard Euler att i en godtycklig triangel ligger mittpunktsnormalernas skärningspunkt O , triangelns tyngdpunkt

T och höjdernas skärningspunkt H på samma räta linje. Man säger att de tre punkterna är collinjära. Översatt till svenska skulle titeln på artikeln vara *Enkla lösningar till några svåra geometriska problem*. Den är på över 20 sidor och innehåller mycket mer än detta bevis, men det är mig veterligen första gången beviset dyker upp i den matematiska litteraturen. Den räta linje OTH kallas Eulers linje. Om triangeln är liksidig är de tre punkterna identiska och om den är likbent är påståendet trivialt. Alla de tre punkterna ligger då på höjden mot basen. Men om alla tre sidorna är olika långa ligger de alltså på en och samma räta linje. Det är förvånande och vittnar om någon form av inneboende symmetri hos trianglar. Det är ett vackert samband inte minst med tanke på att man också kan visa att sträckan TH alltid är dubbelt så stor som sträckan OT . Vi ger ett bevis för påståendet.



Figur 6:

Drag en rät linje genom H och T och låt O' vara en punkt på den räta linjen HT sådan att H och O' ligger på var sin sida om medianen AM_A och så att TH är lika med $2TO'$. Sammanbind O' med M_A . Då är triangeln AHT likformig med triangeln $M_AO'T$ eftersom

$$- \angle ATH = \angle M_ATO'$$

$$- O'T/TH = 1/2 = AT/TM_A.$$

Då är $\angle TAH = \angle TM_AO'$. Det medför att $O'M_A$ är parallell

med AH och eftersom AH är vinkelrät mot BC så är också $O'M_A$ det. Alltså är $O'M_A$ mittpunktsnormal till sidan BC . På samma sätt kan man visa att $O'M_B$ och $O'M_C$ är mittpunktsnormaler till sidorna AC respektive AB . Alltså är $O' = O$.

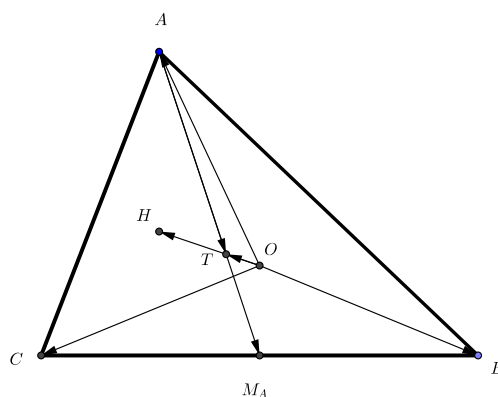
Av beviset följer också att $OT/TH = 1/2$.

Eulerlinjen återkommer i många sammanhang i en mer avancerad triangelgeometri där man bl.a. studerar collinjaritet. Vi ska ge ett enkelt men vackert samband. Det handlar om vektorer och ser ut på följande sätt:

$$\vec{OH} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$$

och här följer ett bevis.

$$\vec{OH} = 3\vec{OT} = \vec{OT} + \vec{OT} + \vec{OT} = (\vec{OA} + \vec{AT}) + (\vec{OB} + \vec{BT}) + (\vec{OC} + \vec{CT}).$$



Figur 7:

Men

$$\vec{AT} = \frac{2}{3}\vec{AM_A}$$

och

$$\vec{AM_A} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$$

varför

$$\vec{AT} = \frac{1}{3}(\vec{AB} + \vec{AC}).$$

På samma sätt visas att

$$\overrightarrow{BT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}) \text{ och } \overrightarrow{CT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA})$$

och vi får att

$$\overrightarrow{AT} + \overrightarrow{BT} + \overrightarrow{CT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CA}) = 0$$

eftersom

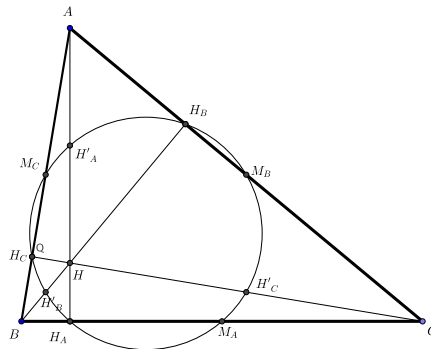
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = 0, \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} = 0 \text{ och } \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AC} = 0.$$

Alltså har vi att

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

Niopunktscirkeln

*Det var det jävligaste!
Det hade jag ingen aaaaaning om!
Ur Svenska ords revy Under dubbelgöken från 1979/80.
Hasse Alfredson (1931-2017) och Tage Danielsson (1928-85)*



Figur 8:

Genom tre punkter som inte ligger på samma räta linje går precis en cirkel. Det är en central sats i Euklides *Elementa*. Det är därför åtminstone för mig mycket förvånande att i en triangel ABC ligger de

tre sidornas mittpunkter, M_A, M_B och M_C , och de tre höjderna fotpunkter, H_A, H_B och H_C , alltid på en och på samma cirkel. Det visar sig dessutom att punkterna H'_A, H'_B och H'_C , som är mittpunkter på AH_A, BH_B respektive CH_C också ligger på denna cirkel. Totalt ligger alltså nio väldefinierade punkter i en triangel på en och samma cirkel.

Cirkeln kallas ibland för Eulercirkel och ibland för Feuerbachs cirkel. Euler visade i *Enkla lösningar till några svåra geometriska problem* att de sex förstnämnda punkterna alltid ligger på samma cirkel. I en artikel *Eigenschaften einiger merkwürdigen Punkten des geradlinigen Dreiecks und mehrerer durch sie bestimmten Linien und Figuren* från 1822 visade Karl William Feuerbach (1800-34) att alla de nio nämnda punkterna ligger på samma cirkel. Han visade dessutom att cirkeln tangerar den i triangeln inskrivna cirkeln. Redan året innan hade emellertid de franska matematikerna Jean-Victor Poncelet (1788-1867) och Charles Julien Brianchon (1783-1864) visat satsen om niopunktscirkeln. Det var en biprodukt i ett arbete om hyperbler. Artikeln visar på det intresse för klassisk och projektiv geometri som utvecklades i Frankrike i början av 1800-talet i samband med matematikens tillämpningar inom krigsindustrin.

Vi ger till slut ett bevis för påståendet att de nio punkterna ligger på en och samma cirkel och hänvisar till figur 4 på nästa sida. Den är komplicerad med många sträckor och det krävs koncentration för ta sig igenom beviset.

Vi betraktar först fyrhörningen $M_A M_C H'_A H'_C$. Den är rödfärgad i figuren. Vi visar att den i själva verket är en parallelogram.

Vi visar först att $M_A M_C$ är parallell med $H'_A H'_C$.

Eftersom M_C och M_A är mittpunkter på AB respektive BC så är $M_A M_C$ parallell med AC .

Vidare är H'_A och H'_C mittpunkter på AH respektive CH . Då är $H'_A H'_C$ också parallell AC .

Alltså är $M_A M_C$ parallell med $H'_A H'_C$.

Vi visar nu att $M_C H'_A$ är parallell med $M_A H'_C$.

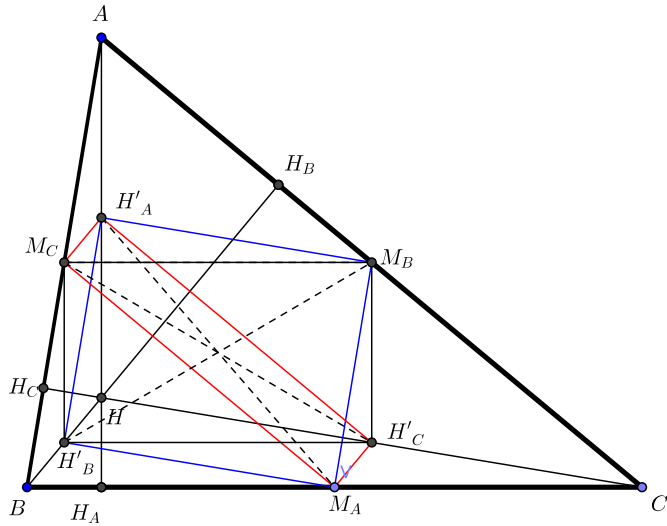
$M_C H'_A$ är parallell med $H'_B H$ eftersom H'_A är mittpunkt på AH och M_C är mittpunkt på AB .

Nu är $H'_C M_A$ också parallell med $H'_B H$ eftersom M_A är mittpunkt på BC och H'_C är mittpunkt på CH .

Alltså är $M_C H'_A$ är parallell med $M_A H'_C$.

Vi har visat att $M_A M_C H'_A H'_C$ är en parallelogram.

Diagonalerna $H'_A M_A$ och $H'_C M_C$ skär varandra i en punkt P och då är $M_A P = M_C P = H'_A P = H'_C P$.



Figur 9:

På samma sätt kan man visa att fyrhörningarna $M_B M_A H'_B H'_A$ och $M_C M_B H'_C H'_B$ är parallelogrammer. Sträckan $H'_A M_A$ är diagonal i både $M_A M_C H'_A H'_C$ och $M_B M_A H'_B H'_A$. Då måste P vara mittpunkt också på diagonalen $H'_B M_B$. Alltså är $M_B P = M_A P = H'_B P = H'_A P$. Vi har visat att punkterna $M_A, M_B, M_C, H'_A, H'_B$ och H'_C alla har samma avstånd till punkten P och de ligger alltså på en och samma cirkel med medelpunkt i P . Vidare är P mittpunkt på sträckorna $M_A H'_A, M_B H'_B$ och $M_C H'_C$ som alltså är diametrar till cirkeln. Eftersom vinklarna vid H_A, H_B och H'_C är räta så ligger också dess punkter på cirkeln.

Fermatpunkten

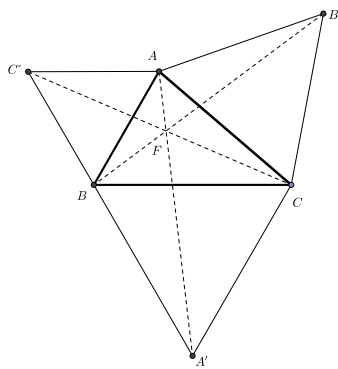
*Kom ihåg att det vackraste i världen också är det onyttigaste –
påfåglar t.ex. och liljor.*

John Ruskin (1819-1900)

Man vet aldrig när ett snöre kan komma till användning.

Medan man funderar på det kan man sätta sig ner och vila lite.

Ur Nalle Puh av A.A.Milne (1882-1956).



Figur 10:

I figur 10 har vi på varje sida i en triangel ABC ritat upp liksidiga trianglar $BA'C'$, $CB'A$ och $AC'B$. Det visar sig att de tre rätta linjerna AA' , BB' och CC' skär varandra i en punkt som i figuren är betecknad

med F . Punkten kallas Fermatpunkten efter den franske matematiker Pierre de Fermat (1607-65). Det är förmodligen han som har "hittat" den. Fermat var inte matematiker till yrket. Han var jurist och hade matematiken som hobby. Han publicerade mycket litet och de resultat han kom fram till förmedlades oftast genom brev till professionella matematiker. Många av hans resultat var epokgörande. Han skisserade metoder som förbådade differential- och integralkalkylen. Hans korrespondens med Blaise Pascal (1623-62) om sannolikheteorin är berömd och han var den tidens störste talteoretiker. Han formulerade den hypotes som blev känd under namnet Fermats gåta, som säger att det inte finns positiva heltal x, y och z så att $x^n + y^n = z^n$ om $n \geq 3$. Han tyckte sig ha bevisat hypotesen men beviset var förmodligen inte fullständigt. Ett sådant lät vänta på sig till 1995. Han var för övrigt sparsam när det gällde bevis. Punkten som avsnittet handlar om har alltså fått hans namn. Jag kan inte hitta någon skriftlig dokumentation som vidimerar att det var han som först observerade den. Punkten kallas ibland också Torricellis punkt och en avancerad gissning är att Fermat brevledes förmedlat sin observation till den italienska matematikern Evangelista Toricelli (1608-47) som sedan gjorde den känd.

Ett bevis

Vårt bevis för att de tre räta linjerna AA' , BB' och CC' skär varandra i samma punkt handlar mycket om cirklar och vinklar och vi hänvisar i resonemangen till figur 11 på nästa sida.

Triangelarna ACB' och ABC' är liksidiga och deras omskrivna cirklar (röda i figur 11) skär varandra i punkten F och vi ska först visa att F ligger på de båda räta linjerna BB' och CC' .

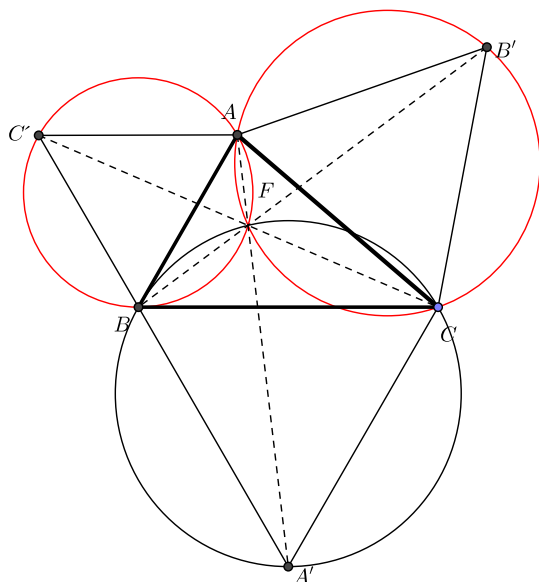
Vi har att $\sphericalangle AFB' = \sphericalangle ACB' = 60^\circ$ eftersom de är periferivinklar på samma båge i cirkeln genom A, C och B' .

På samma sätt ser vi att $\sphericalangle B'FC = \sphericalangle B'AC = 60^\circ$.

Genom att istället betrakta cirkeln genom A, B och C' får vi att

$$\sphericalangle AFC' = \sphericalangle ABC' = 60^\circ.$$

Alltså är $\sphericalangle BFB' = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ och alltså ligger punkten F på den räta linjen BB' . På samma sätt ser vi att



Figur 11:

$\angle CFC' = 180^\circ$ och alltså ligger F också på den räta linjen CC' .

Vi låter nu A' vara den punkt på cirkeln genom B, C och F för vilken $BA' = CA'$ och visar att triangeln $BA'C$ är liksidig och att punkten F ligger på den räta linjen AA' .

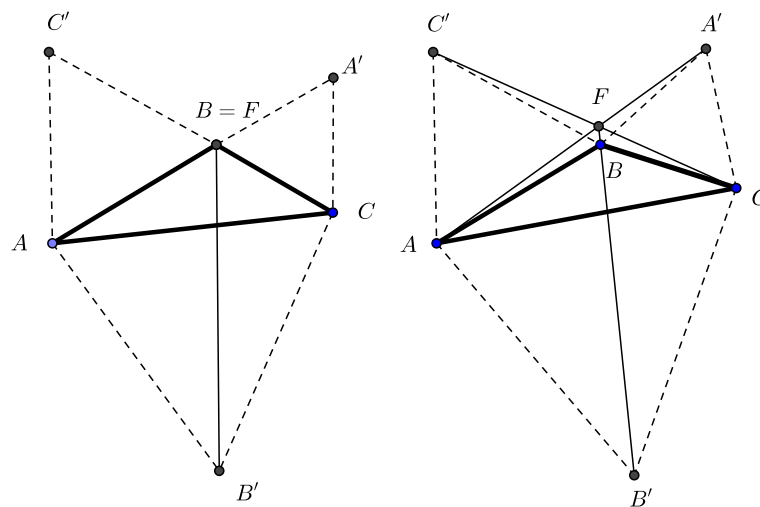
Men $\angle BFA = 120^\circ$ och $\angle AFC = 120^\circ$.

Då är $\angle BFC = 360^\circ - 120^\circ - 120^\circ = 120^\circ$.

Eftersom fyrhörningen $BFCA'$ är inskriven i en cirkel är $\angle BA'C = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ och det medför att triangeln $BA'C$ är liksidig.

Vidare är $\angle AFA' = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ$ vilket innebär att punkten F ligger på den räta linjen AA' . Nu har vi visat att skärningspunkten mellan de tre räta linjerna AA', BB' och CC' skär varandra i en och samma punkt F om $BA'C, CB'A$ och $AC'B$ liksidiga trianglar.

I de figurer vi ritat har Fermatpunkterna legat inuti respektive trianglar. Det är inte alltid fallet. Om en av triangelns vinklar är större än 120° kommer den att ligga utanför och om en vinkel är 120° kommer Fermatpunkten att sammanfalla med ett av triangelns hörn. Vi har åskådliggjort detta i figur 12.



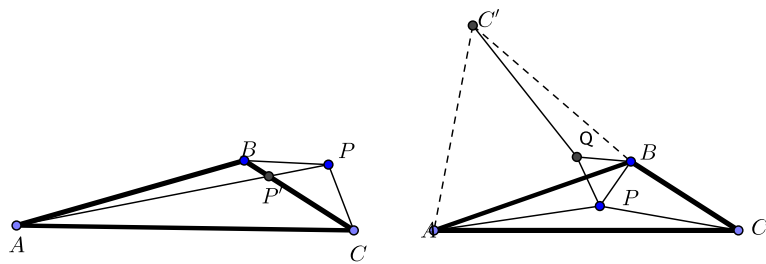
Figur 12: I den vänstra figuren är vinkeln ABC lika med 120° . Då kommer punkterna A, B och A' ligga på samma räta linje eftersom vinkeln $ABA' = 180^\circ$ och Fermatpunkten F sammanfaller med hörnet B . I figuren till höger är vinkeln ABC större än 120° och Fermat punkten ligger utanför triangeln.

Ett optimeringsproblem

Ett naturligt problem är följande: Givet en triangel ABC . Bestäm en punkt P sådan att summan av avstånden till triangelns hörn är så liten som möjligt.

Det var förmodligen det problemet som ledde Fermat till konstruktionen av den punkt som fått hans namn. Det är nämligen just Fermatpunkten F som är lösningen till problemet i det fall då alla triangelns

vinklar är mindre än 120° . Om en av vinklarna är större än 120° kan inte Fermatpunkten lösa problemet eftersom den då ligger utanför triangeln. Om $PA + PB + PC$ skall vara så liten som möjligt så måste P ligga inuti triangeln ABC . Om $\angle C$ är den vinkel som är större än eller lika med 120° så minimerar punkten $P = B$ summan $PA + PB + PC$. Det följer av figur 13 med bildtext.

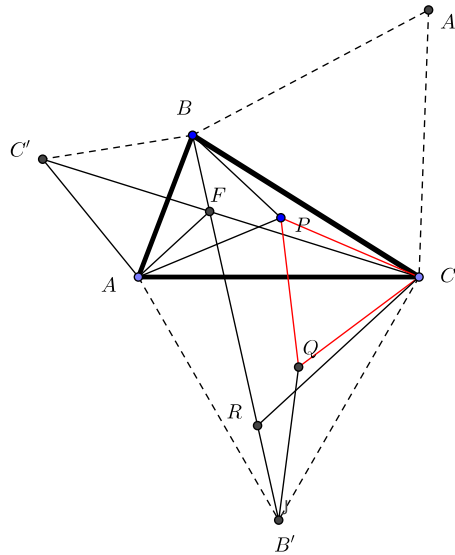


Figur 13: Om punkten P ligger utanför triangeln ABC så måste minst en av sträckorna PA, PB och PC skära en sida i triangeln. I figuren till vänster skär PA sidan BC i P' . Uppenbarligen är $P'A + P'B + P'C < PA + PB + PC$ och P kan inte vara den punkt som minimerar summan av avstånden till triangelns hörn. I figuren till höger är $\angle C$ större än eller lika med 120° och P är en punkt inuti triangeln. Konstruera en punkt Q sådan att triangeln BPQ är liksidig. Om triangeln BPA roteras 60° kring punkten B blir bilden triangeln BQC' och alltså är dessa båda trianglar kongruenta. Då är $PA = QC'$ och $PA + PB + PC = QC' + QP + PC$. Men $PB + PC \geq BC$ och $PQ + QC' \geq BC' = BA$. Alltså är $PA + PB + PC \geq BC + BA$ och B är den punkt som minimerar summan av avstånden till triangelns hörn.

Vi antar nu att alla vinklarna i triangeln är mindre än 120° och visar att då är den sökta punkten Fermatpunkten. Vi hänvisar till figur 14.

Låt alltså P vara en punkt inuti triangeln ABC . Konstruera en liksidig triangel CPQ . Om vi gör en rotation 60° kring punkten C avbildas CPA på triangeln CQB' . Alltså är $PA = QB'$ och

$$PA + PB + PC = QB' + PB + PQ$$



Figur 14:

eftersom $PC = PQ$ Antag nu att F är Fermatpunkten. Då är vinkeln $CFB' = 60^\circ$ och vi kan välja punkten R på BB' så att triangeln CFR är liksidig.

Triangeln CFA avbildas på triangeln CRB' om den roteras 60° kring punkten C och alltså är $FA = RB'$.

Sammanfattningsvis har vi att

$$PA + PB + PC = BP + PQ + QB' \geq BB'$$

Men

$$BB' = BF + FR + RB' = FB + FC + FA$$

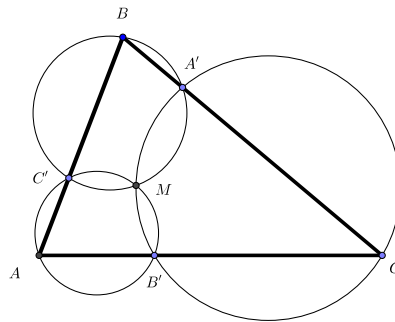
eftersom $FR = FC$ och $RB' = FA$. Alltså minimerar F summan av avstånden till triangelns tre hörn.

Kanske har Fermatpunkten trots allt en viss tillämpning. Vi ger ett litet exempel. Invånarna i tre hus, som ligger i en triangel, kommer överens om att lägga ett förråd så att summan av de tre avstånden från husen

till förrådet blir så liten som möjligt. Det kan vara en rimlig strategi om besöken fördelas lika mellan de tre husen. Då skall alltså förrådet placeras i Fermatpunkten till triangeln med hörnen i de tre husen. Om nu inte triangeln har en vinkel som är större än eller lika med 120° . Då ska det placeras i ett av husen. Det är onekligen en form av tillämpning. Men om man jämför upptäckten av Fermatpunkten med andra bidrag av Fermat som t.ex. metoder som förebådar differentialkalkylen och grundläggande tankar om sannolikhetsbegreppet väger den litet lätt.

Miquelpunkten

*Voffor är det på detta viset?
Rumpnissarnas undran ur Ronja Rövardotter.
Astrid Lindgren (1907-2002)*



Figur 15:

I triangeln ABC är A' , B' och C' punkter på sidorna BC , CA respektive AB . De kan väljas godtyckligt på respektive sidor. En välkänd sats

säger att genom tre punkter som inte ligger i rät linje går precis en cirkel och vi konstruerar tre cirklar: En genom A, B' och C' , en genom B, C' och A' samt en genom C, A' och B' . Då upptäcker vi att dessa tre cirklar alltid har en gemensam skärningspunkt - hur vi än väljer punkterna A', B' och C' . Det känns märkligt - åtminstone för mig.

Punkten kallas Miquelpunkten efter Auguste Miquel (1816-51) som var fransman. Han publicerade ett bevis 1838 i en mycket kortlivad tidskrift *La Géométrie*. En utökad version publicerades samma år i den kända *Journal de mathématiques pures et appliquées*. Miquel avlade examen vid gymnasiet i Toulouse och förberedde sig därefter för antagningen till l'Ecole des normale supérieure i Paris. Det var då han publicerade den aktuella artikeln. Han bidrog i flera år med flera resultat inom geometrin och de handlade nästan alltid om skärningar mellan cirklar och mellan sfärer. Miquel arbetade efter studierna som lärare i Vigan och blev uppsagd 1849 på grund av sina politiska åsikter. Han dog 1851 endast 35 år gammal.

Beviset är inte så komplicerat. Det stöder sig på en fundamental sats ur Euklides *Elementa* som säger följande:

Om en fyrhörning är inskriven i en cirkel så är summan av motstående vinklar 180° och omvänt: Om summan av motstående vinklar i en fyrhörning är 180° så är fyrhörningen inskriven i en cirkel d.v.s. hörnen ligger på periferin till en cirkel.

Vi bevisar nu Miquelpunktens existens och i beviset hänvisar vi till figur 16.

I triangeln ABC är vinklarna vid A, B och C lika med α, β respektive γ . Konstruera först då båda cirklarna genom A, B' och C' respektive B, C' och A' . De är röda i figuren. De skär varandra i punkten M .

Konstruera sträckorna MA', MB' och MC' . De är streckade i figuren.

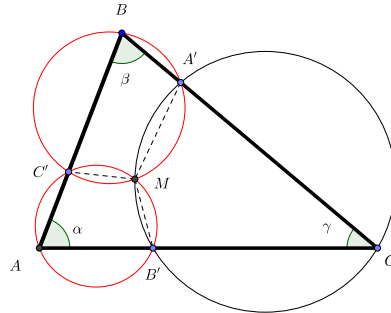
Fyrhörningen $BC'MA'$ är inskriven i en cirkel och alltså är $\angle C'MA' = 180^\circ - \beta$ och

fyrhörningen $AB'MC'$ är också inskriven i en cirkel och alltså är $\angle C'MB' = 180^\circ - \alpha$.

Då är $\angle A'MB' = 360^\circ - (180^\circ - \alpha) - (180^\circ - \beta) = \alpha + \beta$.

Betrakta nu fyrhörningen $B'MA'C$.

Eftersom vinkelsumman i en triangel är 180° så är $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ och summan av de båda motstående vinklarna $B'MA'$

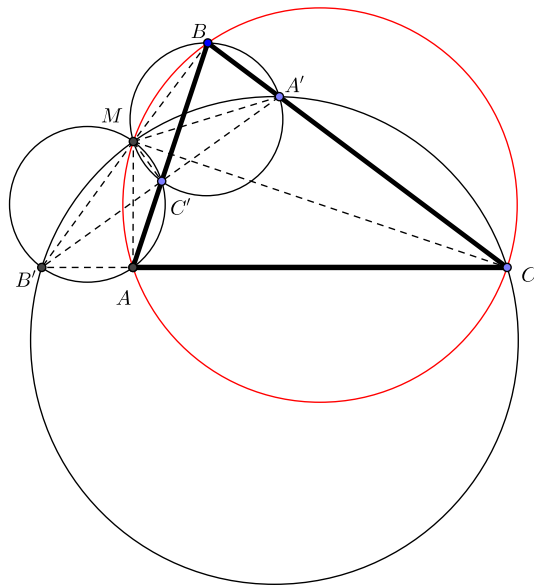


Figur 16:

och $B'CA'$ i fyrhörningen $B'MA'C'$ är lika med 180° . Summan av de båda övriga vinklarna är då också 180° eftersom vinkelsumman i en fyrhörning är 360° . Fyrhörningen $B'MA'C'$ är därför inskriven i en cirkel och alltså går cirkeln genom C, A' och B' genom M .

Vi har hittills antagit att punkterna A', B' och C' ligger på sidorna BC, CA respektive CA och att ingen dem ligger på respektive sidas förlängning. Påståendet gäller även då men bevisen måste modifieras. Ett speciellt fall har vi då A', B' och C' ligger på samma räta linje. Då ligger nämligen Miquelpunkten M också på den kring triangeln omskrivna cirkeln. Ett bevis för det finns i figur 17 med bildtext.

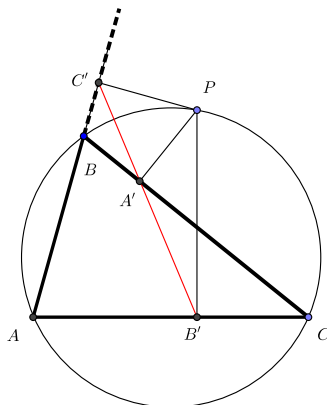
Ytterligare slutsatser kan dras och figurerna blir alltmer komplicerade och resonemangen allt svårare att följa. Bevisen är vattentäta och visar att de antaganden man gör genom att rita upp ett antal fall är korrekta. Men förstår man varför de stämmer? Vilket är det avgörande argumentet? Jag tror det jag ser och litat på resonemangen men jag har ändå ingen bild av varför det stämmer. Resultatet förvånar mig. De är oväntade och svåra att förstå och kanske just därför upplever jag dem som vackra.



Figur 17: Målet är att visa att $\sphericalangle AMB$ är lika med $180 - \gamma$. Då är fyrhörningen $AMBC$ inskriven i en cirkel som är den kring triangeln omskrivna cirkeln. Vi observerar att vinkeln $\sphericalangle A'MB' = 180^\circ - \gamma$. Av den sats som säger att periferivinklar på samma båge är lika stora följer att vinkeln $\sphericalangle AMB' = \sphericalangle AC'B'$ samt att $\sphericalangle BC'A' = \sphericalangle BMA'$. Vidare är $\sphericalangle AC'B' = \sphericalangle BC'A'$. Alltså är $\sphericalangle AMB' = \sphericalangle BMA'$. Men $\sphericalangle BMA = \sphericalangle BMA' + \sphericalangle A'MA$ och $\sphericalangle A'MB' = \sphericalangle B'MA + \sphericalangle AMA'$. Eftersom $\sphericalangle BMA' = \sphericalangle B'MA$ så är $\sphericalangle BMA = \sphericalangle A'MB' = 180^\circ - \gamma$ och påståendet är bevisat.

Simson-Wallaces linje

Sann konst blir oförgänglig.
Ludwig van Beethoven (1770-1827)

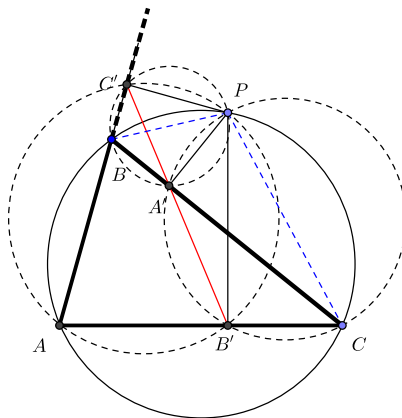


Figur 18:

Om ABC är en triangel och P en punkt på den kring triangeln omskrivna cirkelns periferi så konstruerar vi normalerna från punkten P till sidorna BC , CA respektive AB . De skär respektive sidor eller dess förlängningar i de tre punkterna A' , B' och C' . Dessa tre punkter

kommer alltid att ligga på en och samma räta linje. Beviset för detta finns i figur 19 med bildtext.

Den räta $A'B'C'$ linjen kallas Simsons linje eller Wallaces linje eller Simson-Wallaces linje. Förbistringen har följande orsak. I ett av den projektiva geometris viktiga verk *Traité des propriétés projectives des figures* från 1822 använder sig den franske matematiker Jean-Victor Poncelet av resultatet och tillskriver det den skotske matematiker Robert Simson (1686-1768). Han stödde sig på en förmodan av en tidigare fransk matematiker som också använde sig av resultatet och inte visste men trodde att det var Simson som upptäckt det. Det kan emellertid inte hittas i någon av de texter som Simson publicerat, men finns i en artikel från 1798 av en annan skotsk matematiker, William Wallace (1768-1843).



Figur 19: Vi kallar triangelns vinkel BAC för α och konstruerar cirkeln genom P, C' och A' . Den går också genom punkten B eftersom summan av motstående vinklar i fyrhörningen $BCPA'$ är 180° . Vinklarna vid A' och C' är ju båda räta. På samma sätt inses att cirkeln genom P, B' och A' går genom punkten C och att cirkeln genom P, B' och C' går genom punkten A . Vi betraktar nu fyrhörningarna $AC'PB'$ och $ABPC$. Vi ser att $\sphericalangle BPC' = \sphericalangle B'PC = 180^\circ - \alpha$. Men $\sphericalangle BPC' = \sphericalangle B'PB' + \sphericalangle B'PC'$ och $\sphericalangle B'PC = \sphericalangle B'PB + \sphericalangle BPC$. Alltså är $\sphericalangle BPC' = \sphericalangle B'PC$. Men $\sphericalangle BPC' = \sphericalangle BA'C'$ och $\sphericalangle B'PC = \sphericalangle B'A'C$. Alltså är $\sphericalangle BA'C' = \sphericalangle B'A'C$ och det innebär att punkterna B', A' och C' ligger på samma räta linje.

Poncelet var en av de matematiker som var tongivande för det nyväck-

ta intresse för projektiv geometri som uppstod framför allt i Frankrike under sent 1700-tal och tidigt 1800-tal och som växte upp kring militärhögskolorna. Den projektiva geometrin har sina rötter i renässansen och kan kopplas till utvecklingen av perspektivavbildningar. Konstnärer som Filippo Brunelleschi (1377-1446), Leone Battista Alberti (1404-72), Leonardo da Vinci (1452-1519) och Albrecht Dürer (1471-1528) utvecklade och använde sig av geometrin i sina arbeten inom bildkonst och arkitektur.

Figuren som beviset stöder sig på är komplicerad. Det var svårt för mig att följa de bevis som finns på nätet. Det är lätt att förlora sig i alla punkter, sträckor, vinklar och cirklar. Det kan vara bra att veta för en eventuell läsare. Jag fick skapa mig ett eget bevis och stöder mig flera gånger på den sats som säger att periferivinklar i en cirkel som står på samma båge är lika stora. Bilden är komplicerad och man kan i den se många olika samband. Den är komplex, mångtydig och innehållsrik. Den är för mig ett litet konstverk.