Anders Tengstrand

Historiska perspektiv på matematik

Anders Tengstrand

Historiska perspektiv på matematik

Anders Tengstrand
Växjö

Online-version: Boken i helhet finns att läsa eller att ladda ner på

`www.anderstengstrand-funderingarkringmatematik.se`

Denna trycksak är miljöanpassad, både när det gäller papper och tryckprocess.

ISBN 978-91-519-6318-1
Upplaga 1:1

Tryckt av CA Andersson, Malmö, 2020

Här liksom på andra områden
kan vi inte förvärva bästa insikt
i tingen förrän vi sett dem
utvecklas från sin begynnelse.

— *Politiken*
Aristoteles (384–322 f.Kr.)

The past is never dead. It isn't even past

— *Requiem for a Nun*
William Faulkner (1897–1962)

Inledning

Varför har jag skrivit en omfattande text om matematikens historia på svenska? Efterfrågan måste vara mycket begränsad. Området är smalt och språkgruppen liten. Det finns flera standardverk på engelska vars författare är betydligt mer meriterade än jag. Vad är det som har drivit mig?

Det började egentligen 1968 – studentrevoltens år. Jag var lärare vid den nybildade universitetsfilialen i Växjö och förskräcktes av de bilder jag såg på TV av marscherande, skanderande och stenkastande studenter. Nu var inte Växjö något Paris eller något Stockholm. Men ändå. Det kändes som man måste göra något för att förhindra galenskapen. Det måste skapas en plattform för en dialog mellan lärare och studenter. Sagt och gjort. Ett ämneskollegium för lärare och studenter i matematik bildades där frågor kring matematikutbildning och matematikundervisning kunde diskuteras. Kollegiet bestod av lärare samt ett antal studentrepresentanter som studenterna själva sett ut. Vi träffades några gånger i terminen.

Vid ett av de första mötena hade vi kommit till den sista punkten: ”Ev. övrigt”. En av studenterna begärde ordet och sade: ”Vi har nu gått igenom teorier, formulerat definitioner, bevisat satser och löst problem i anslutning till teorierna. Men hur har teorierna kommit till? Varför har de skapats? Kort sagt: Hur har det blivit på detta sättet? Jag saknar ett historiskt perspektiv.” Frågan diskuterades. En ändring av kursplanerna var utesluten. Det stod inte i vår makt. De beslutades av för landet centrala myndigheter. Efter en del diskussioner kom vi fram till att jag skulle ge tre föreläsningar om matematikens historia. Jag måste tillstå att jag deltog i beslutet utan större entusiasm. Matematikens historia var inte mitt område. Jag tyckte om att presentera färdiga teorier och att lösa problem. De tre föreläsningarna kändes som en börda och de skulle kräva mycket förberedelsearbete. Jag höll emellertid mitt löfte. Nästan. Jag levererade två föreläsningar och de var välbesökta. Men tiden gick och jag sköt på den tredje. Jag hoppades väl att eleverna skulle glömma den och att det hela skulle rinna ut i sanden. Inför terminsslutet hölls ett sista ämneskollegium. När vi kom till punkten ”Ev. övrigt” begärde samme student ordet och sade: ”Vi kom överens om att du skulle hålla tre föreläsningar om matematikens historia. Jag har lyssnat till två men väntar fortfarande på den tredje.” Det blev ingen tredje föreläsning. Studenten flyttade från Växjö och började på lantbruksuniversitetet i Alnarp där han sedermera blev professor och där han nu är professor emeritus. Min undervisning återgick till det gamla vanliga. Jag presenterade färdiga teorier med definitioner, satser och bevis. Och så löste jag problem. Men den revolutionära studentens fråga gjorde sig ibland påmind och den gnagde. Hur har de ibland komplicerade teorier och metoder, som jag undervisar om, kommit till? Jag kunde själv mycket litet om den utvecklingen och jag kunde än mindre förklara den för mina studenter.

Allteftersom tiden gick kom matematikens historia att bli alltmer aktuell. I någon av de nya studieplanerna för matematiska utbildningar kom faktiskt matematikens historia att bli ett obligatoriskt moment även om man det bara omfattade en veckas studier. Ett nytt ämne, matematikdidaktik, etablerades där man studerade matematikutbildning och matematikundervisning. Det innebar att man inte bara ägnade sig åt själva matematiken utan att man också diskuterade *om* matematik. Ämnets historia kom då in på ett naturligt sätt. En svensk lärobok om matematikens historia såg dagens ljus. Samarbete med filosofer och utveckling av en ny kurs, Diskret matematik, innebar att det historiska perspektivet blev mer centralt för mig. En rad olika skäl talade för att matematikens historia måste få en starkare ställning. Mot slutet av 1980-talet startade jag därför en kurs, Matematikens utveckling, och den skulle inte omfatta bara en vecka utan fem vilket då var en vanlig modul. Kursen har sedan dess getts i princip varje år.

De inledande orden av Aristoteles inledde den första föreläsningen i varje kurs. ”Här liksom på andra områden kan vi inte förvärva bästa insikt i tingen förrän vi sett dem utvecklas från sin begynnelse”. Det var utvecklingen av begrepp och teorier som skulle vara i centrum för verksamheten. Den fick inte urarta till att bli ren personhistoria. I början var mina kunskaper rudimentära och jag kompenserade det genom att bjuda in gästföreläsare. Med åren kände jag mig säkrare. Jag lärde av mina gästföreläsare. Studenterna examinerades genom uppsatser, och att bedöma dem ökade mina kunskaper. Jag fick förmånen att handleda två magisteruppsatser. Jag fick delta i konferenser som hade ett matematikhistoriskt innehåll. Men området var stort och mina kunskaper var trots allt fragmentariska. Tanken dök upp att skriva en text, en slags läro-bok, som skulle ge mina tankar struktur. Men för det krävdes tillgång till förstahandskällor och det innebar praktiska problem. Källmaterialet fanns oftast bara på biblioteken vid de stora universiteten och ibland inte ens i Sverige. Jag slog bort de tankarna. Men tiderna förändrades och genom Internet finns det nu möjligheter att studera urkällorna digitalt. Många gånger är de skrivna på latin men då finns tillförlitliga engelska översättningar.

Att beskriva den ofta slingriga väg som lett till färdiga teorier inom ett matematiskt område fördjupar förståelsen för ämnet. Men även om matematiska teorier genom århundraden utvecklats och förändrats så finns det ofta kvar en kärna av de ursprungliga frågeställningarna och gamla metoder och begrepp lever fortfarande. Vår indelning av timmar i minuter och sekunder har sina rötter i babyloniernas talsystem från flera tusen år före vår tideräknings början. Vårt decimalsystem med dess algoritmer för de fyra räknesätten är väsentligen desamma som i räkneläror från 1400-talet och många av de formler vi använder för att mäta areor och volymer användes för flera tusen år sedan. Pythagoras sats var känd av babylonierna mer än tusen år före Pythagoras. Den användes i sin ursprungliga form än i dag men är också grunden för avståndsbegrepp i högre dimensioner och som sådan kommer den in i många tillämpningar, t.ex. som spridningsmått inom statistiken.

Det finns alltså metoder som visat sig vara hållbara genom århundraden. Men det finns också matematiska begrepp som varit ständigt ifrågasatta. Förhållandet till oändligheten har varit och är ett problem för matematiker. Inom matematiken leds man ofta till att t.ex. betrakta summor av oändligt många och oändligt små storheter. Ett exempel får illustrera det. Att ge en formel för volymen av ett klot om man känner radien R måste rimligen vara av viss betydelse. Vi vet att den är $4\pi R^3/3$. Men hur kommer man fram till det sambandet? Ett sätt är att skära sönder klotet i oändligt många och oändligt tunna parallella skivor som alla är cirkelformade. De har naturligtvis alla volymen 0 men samtidigt verkar det rimligt att anta att skivornas volymer, även om de är oändligt små, är proportionella mot cirklarnas areor. Genom att på ett listigt sätt jämföra de många cirkulära skivorna med andra kroppar där man känner volymen kan man komma fram till den sökta formeln. Arkimedes gjorde det under 200-talet f.Kr. Hans idéer utvecklas i denna bok i kapitlet som handlar om geometri. Att räkna med oändligt små storheter kännetecknar den del av matematiken som vi kallar analys och som förknippas med integraler och derivator. En integral är summan av oändligt många och oändligt små delar och derivatan är kvoten mellan oändligt små storheter. Analysen ger oss effektiva verktyg för att lösa problem inom naturvetenskap, teknik och ekonomi. Men samtidigt känns grunden bräcklig. Man använder sig av positiva tal som inte är lika med 0 men som är mindre än varje annat positivt tal. Men verktygen fungerar och man glömmer snart de betänkligheter man hade från början. Till slut kommer man emellertid till situationer då man får paradoxala resultat och då är man tvungen att gå tillbaka till grunderna och tydliggöra begreppen. Galilei formulerade sig på följande sätt:

> ”Dessa svårigheter är reella och de är inte de enda. Men låt oss komma ihåg att vi har att göra med oändligheter och odelbarheter, båda övergår vår ändliga förståelseförmåga, de förra på grund av dess storlek de senare på grund av dess litenhet. Trots det kan inte människan avstå från att diskutera dem även om det måste göras indirekt.”

Frågor kring det oändligt lilla och det oändligt stora har förföljt matematiker sedan antiken. ”The past is never dead. It isn’t even past.”

Det är Aristoteles ord i det inledande citatet som varit ledstjärnan i arbetet som resulterat i den text som presenteras. Jag har, efter att i över sextio år ha undervisat i matematik på olika stadier, velat undersöka hur den matematik, som nu ingår i olika utbildningar från förskola och lågstadium till högskola, har vuxit fram. Jag har skrivit texten för att själv bättre förstå den utvecklingen och då måste jag skriva den på svenska. Det är alltså i första hand för min egen skull som arbetet gjorts, men det har känts angeläget att ha en grupp att vända sig till i själva skrivandet. Det har inneburit en avgränsning som varit nödvändig. Den naturliga målgruppen är för mig ämneslärare i matematik på grundskolans högstadium och i gymnasium men även lärare och studenter på grundläggande kurser inom högskolan. Jag har alltså förutsatt kunskaper som motsvarar elementär matematikutbildning på högskolenivå. Naturligtvis finns det delar som inte förutsätter dessa kunskaper och som kan vara intresse för matematiklärare i förskola, lågstadium och mellanstadium.

Arbetet är indelat i två delar. Den första är en kronologisk översikt där jag försökt ge en bild av utvecklingen i stort och där jag har undvikit att gå in på tekniska detaljer. Det sistnämnda går inte alltid. Ibland är det nödvändigt att ge tekniska exempel för att förstå viktiga steg i utvecklingen, men avsikten är att det skall vara möjligt att läsa texten utan att göra alltför många avbrott för att gå igenom teknikaliteter. Jag har också önskat placera matematiken i ett större sammanhang och därför har jag i varje kapitel gjort några kommentarer av allmän historisk natur om politiska händelser, religiösa rörelser och kulturella strömningar.

I den första delen ingår också korta biografier över ett urval av matematiker och jag har använt mig av *MacTutor History of Mathematics Archive* som finns på Internet. På denna webbplats kan man finna biografier av de flesta betydelsefulla matematiker genom tiderna. Biografierna innebär förhoppningsvis att framställningen blir mer levande. Matematiken är skapad av människor och att beskriva levnadsöden och karaktärsdrag hos dem som gjort avgörande insatser ger inte bara en bild av den enskilda människan utan också av den miljö han eller hon levde i. Enskilda livsöden kan spegla sociala förhållanden, utbildningssystem och politikens påverkan på den vetenskapliga och pedagogiska verksamheten.

Ett särskilt kapitel i den första delen ägnas åt den matematiska utvecklingen i Kina och hos mayafolken i Sydamerika. De är två högtstående kulturer och framställningen av deras matematik kan tyckas vara väl summarisk. Det kinesiska verket *Nio kapitel om den matematiska konsten* innehåller avancerade matematiska kunskaper och visar att man i Kina uppenbarligen kände till viktiga samband långt före de upptäcktes i Europa. Kulturerna var emellertid i stort sett isolerade från västerlandet och påverkade inte den utveckling som lett fram till dagens matematik.

Matematikens utveckling kan emellertid inte förstås utan att göra djupdykningar i just matematiken. Den andra delen ägnas därför åt ett djupare studium av utvecklingen inom sex områden: aritmetik och beräkningsteknik, geometri, algebra, analys, sannolikhetslära och statistik samt diskret matematik. Det är dessa områden som behandlas i grundskola och gymnasium. I denna del kommenteras och analyseras delar av viktiga originalverk och framställningen är med avsikt mer teknisk.

Den uppdelning jag valt är inte oproblematisk. Ett sätt att använda materialet är att utnyttja det som ett uppslagsverk och studera områden eller frågeställningar som för stunden känns relevanta. Ibland kanske det känns angeläget att använda sig av texten i första delen, ibland i den andra. Jag har försökt ta hänsyn till detta men det innebär med nödvändighet att det blir upprepningar – samma sak sägs på flera ställen. I den första delen har jag efter olika moment angett var i den andra delen man kan finna en mer fördjupad diskussion.

Föreliggande arbete ger sig inte ut för att vara vare sig en objektiv eller en fullständig bild av matematikens historia. En sådan målsättning vore förenad med hybris. Titeln är *Historiska perspektiv på matematik*. Urval av material samt reflektioner kring olika processer och slutsatser är gjorda av författaren och är *ett* sätt se matematikens utveckling. Andra skulle med säkerhet göra andra prioriteringar och dra andra slutsatser. Men perspektivet på matematiken är historiskt.

Under själva skrivandet hade jag inte några tankar på att ge andra möjligheter att ta del av texten. Visserligen hade jag en målgrupp i tankarna men det var bara i tankarna – ett sätt att få en ”låtsasfigur” att prata med under arbetet. Men när de sista raderna är skrivna inställer sig frågan: Ska jag ändå inte på något sätt låta andra få läsa det jag skrivit? Det är kanske en form av exhibitionism, att få visa upp vad man skapat, och kanske en dröm om att arbetet ska komma till nytta. Möjligheterna att lägga ut texten på en hemsida verkade vara ett alternativ. Arbetet skulle kanske kunna vara en ingång till en eventuell läsare att söka vidare på nätet. I min text finns många hänvisningar till Internet. Det skulle kunna vara ett sätt för t.ex. verksamma lärare att lätt få kontakt med historisk litteratur på nätet. Kanske kan de då kan få nya perspektiv på matematiken som kan påverka deras undervisning. När det visade sig att jag kunde få hjälp med att lägga upp en hemsida så var faktiskt beslutet lätt. Materialet ligger nu på:

`www.anderstengstrand-funderingarkringmatematik.se`

och kommer att uppdateras efter hand. Det har också kommit önskemål om att texten skall finnas i bokform och jag har efter viss tveksamhet gått med på det. Utgivningen kommer att ske ”on demand” i små upplagor. Anvisningar hur man beställer böcker kommer att finnas på hemsidan.

Litteratur och källor

Genom Internet har modern informationsteknik gjort det möjligt att studera klassiska matematiska skrifter utan att besöka de universitetsbibliotek där de finns förvarade. Det har som jag redan nämnt varit av avgörande betydelse i arbetet med föreliggande text och det speglas också i litteraturförteckningen. Många av källorna citeras i texten, men det är min förhoppning att läsaren inte stannar där utan också själv går till källan för att orientera sig vidare. Kring många av de områden jag tagit upp finns också omfattande sekundärmaterial i form av artiklar. Jag har tagit upp några få, men läsaren uppmanas att med hjälp av någon sökmotor själv finna material som kan vidga perspektiven. Några länkar har varit av speciellt stor betydelse i mitt arbete. Det är i första hand *MacTutor History of Mathematics Archive* där jag hämtat det mesta av det biografiska materialet. När det gäller klassiska matematiska skrifter vill jag särskilt framhålla archive.org och 17centurymaths.com.

Naturligtvis spelar också översiktliga arbeten om matematikens historia av Boyer-Mehrbach, Cajori, Gårding, Kline, Struik, Smith och Swetz samt på svenska Hall, Johansson och Thompson en stor roll. Jag vill också speciellt nämna bokverket *Sigma* där läsaren kan ta del av svenska översättningar av hela och delar av klassiska verk. Några av dem är nämnda i föreliggande text andra inte.

För litteratur tillgängligt på och för material hämtat från Internet (se litteraturförteckningen samt ”Bild: . . .” i figurtexter) anges webb-adressen (URL) i form av bitly-kod. En kod som t.ex. `30R5Jzh` skall i en webb-läsare anges som `https://bit.ly/30R5Jzh`. Koderna är i PDF-versionen av denna bok klickbara varpå sidan öppnas automatiskt i en webb-läsare. Figurer utan bitly-kod är egna konstruktioner.

Tack

Denna text bygger i stor utsträckning på erfarenheter av den kurs i matematikens historia som jag gett under en lång följd av år. Studenterna har framför allt genom sina uppsatsarbeten breddat och fördjupat mina kunskaper inom området. Kollegor från olika lärosäten har generöst ställt upp med gästföreläsningar och det har gett mig nya perspektiv på ämnet. Det har funnits en förståelse från beslutande organ som gjort verksamheten möjlig och det är med glädje jag kan konstatera att kursen ges även sedan jag pensionerats. Jag vill framföra ett stort tack till alla studenter och kollegor från olika institutioner som på olika sätt bidragit till att jag har kunnat öka min förståelse för det ämne jag under många decennier undervisat i. Det går inte att nämna alla. Listan skulle bli för lång. Men jag vill ändå särskilt tacka **Per-Anders Svensson** och **Hans Frisk**. De har båda under olika perioder efter min pensionering haft ansvar för den kurs jag startade i slutet av 1980-talet. De har också läst och kommenterat var sin del av texten. Det kan också nämnas att Per-Anders var en de studenter som följde den första kursen. Jag vill också tacka en annan av mina f.d. studenter, **Thomas Eriksson**, som numera är matematiklärare på S:t Sigfrids folkhögskola. Han har varit drivande för att få texten publicerad som bok. Det är mycket tack vare honom som texten fått en extra översyn och han har själv granskat ett större avsnitt.

Som jag tidigare nämnt var det faktum att jag kunde få hjälp med en hemsida avgörande för att flera skulle få tillgång till texten. Den som hjälpte mig med det var mitt barnbarn **Emma Nilsson Tengstrand** som dessutom korrekturläst en del av texten. Ett särskilt tack till henne. Efter publiceringen på Internet har min kollega **Thomas Weibull** läst och kommenterat större delen av arbetet. En för mig tidigare okänd kollega **Mats Desaix** har intresserat sig för min text och har läst hela texten och påpekat ett antal felaktigheter. Ett stort tack till Thomas och Mats för ert engagemang.

Den ursprungliga texten var full med fel: räknefel, sakfel, stavfel, skrivfel m.m. Jag har engagerat barn, svärbarn och barnbarn som har hjälpt mig att rensa bort så gott som alla. De har generöst ställt upp och avsatt dyrbar tid till detta arbeta. Tack **Erik** och **Martin Dagermo**, **Daniel** och **Tomas Gustavsson**, **Lena Tengstrand**, **Jerker Nilsson**, **Sara** och **Mikael Nilsson Tengstrand** samt **Anna**, **Björn** och **Per Tengstrand**.

När jag bestämt mig för att ge ut texten på bokform kom jag i kontakt med en kollega, **Mats Frendahl**, som blivit intresserad av texten som han funnit på Internet. Det visade sig att Mats hade stora kunskaper om och erfarenheter av layout. Han har hjälpt mig att lyfta texten genom att ge den en layout som avsevärt höjt den estetiska utformningen och därmed ökat läsbarheten. Han har också rättat till de brister på enhetlighet som präglade delar av den ursprungliga texten. Mats har lagt ner ett stort och värdefullt arbete på min text och jag är skyldig honom ett stort tack för detta.

Växjö, sommaren 2020

Anders Tengstrand

Innehåll

Del I

En kronologisk översikt med korta biografier

Kapitel 1

Matematiken i gamla flodkulturer

1.1 Mesopotamien – landet mellan de två floderna

”Här liksom på andra områden kan vi inte förvärva bästa insikt i tingen förrän vi sett dem utvecklas från sin begynnelse.” Aristoteles ord har varit ledstjärnan för detta arbete om matematikens utveckling. Men någonstans måste man börja och begynnelsen i denna framställning är kulturerna kring två stora floder. Där utvecklades jordbrukssamhällen med en infrastruktur och en arbetsfördelning som ställde krav på beräkningar. Skatter skulle drivas in och arv skulle fördelas. Konstbevattning krävde planering och beräkning. Man behövde instrument för att mäta tiden. Det uppstod ett intresse för astronomi som småningom också fick en mer metafysisk inriktning. Man vill förutspå framtiden med hjälp av planeternas och stjärnornas ställning på himlen. Ämnet astrologi utvecklades. I alla dessa sammanhang blev matematiken ett viktigt redskap.

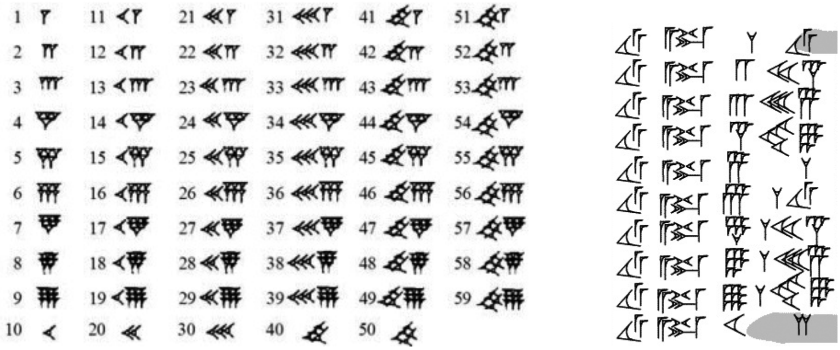
De kanske tidigaste fynden från äldre kulturer härstammar från området kring de båda floderna Eufrat och Tigris i Mellanöstern ungefär där Irak nu ligger. Området kallades på grekiska för Mesopotamien vilket betyder Tvåflodslandet. I södra delen, Sumer, utvecklades mycket tidigt en högkultur med tidsindelning och skriftspråk. Många påstår att civilisationens vagga fanns i Sumer och att sumererna var det första kulturfolket. Kulturerna i det forna Egypten och därefter i antikens Grekland och Rom har sina rötter i Mesopotamien.

Konflikter med grannfolk från mellersta och norra Mesopotamien förändrade bilden och det sumeriska väldet kollapsade. Under den babyloniske kungen **Hammurabi** (c:a 1792–1750 f.Kr.) enades folken. Hammurabi hade sitt säte i staden Babylon och Babylonien fick sitt namn av huvudstaden. Babylonien kom under några århundraden efter 1100 f.Kr. att domineras av assyrierna, ett folk från norra Mesopotamien. Deras välde inkluderade också delar av Egypten. Den siste store kungen var **Assurbanipal** (668–627 f.Kr.) som lät bygga ett bibliotek i Ninive med tusentals lertavlor. Rester finns bevarade på British Museum i London och det är mycket tack vare dessa tavlor vi fått vår kunskap om det forntida Mesopotamien.

Skriftspråket som användes i Mesopotamien kallas *kilskrift*. Med någon form av redskap trycktes olika tecken in i en lertavla som sedan fick soltorka. Ett exempel visas i figur 1.1. Man har bl.a. annat funnit Hammurabis lagar från 1700-talet f.Kr., Gilgamesheposet från 2100 f.Kr. samt många tavlor med matematiska beräkningar i just denna skriftteknik. Att tolka kilskriftstavlorna har varit ett komplicerat arbete som krävt språkkunskaper och kombinationsförmåga. Det var först under första delen av 1800-talet som man kunde dechiffrera dem. Möjligen kan tavlorna med matematiskt innehåll spelat en roll i det arbetet eftersom där ofta finns tydliga mönster.

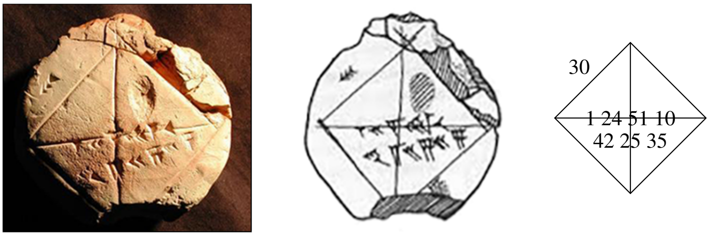
Figur 1.1: Exempel på en lertavla med kilskrift. (Bild: `30R5Jzh`)

Det finns alltså många lertavlor med ett matematiskt innehåll och på dessa finns de naturliga talen som vi betecknar med 1, 2, 3, 4, ... Hur framställde babylonierna dem? De använde sig av ett system där tecknen för ”ett” och ”tio” är byggstenar. I figur 1.2 visas hur de 59 första talen skrivs. Vi stiliserar tecknen för ”ett” och ”tio” med $|$ respektive $<$ och talet 23 skrivs alltså $<<|||$. Talet sextio skrivs nu inte som sex kopior av tecknet $<$ utan som $|$ och det betyder $1 \cdot 60$. Babylonierna skrev t.ex. talet 132, som är lika med $2 \cdot 60 + 12$, som $||<||$. De använde sig alltså av ett positionssystem med basen 60. En olägenhet var att man inte hade någon beteckning för siffran 0 vilket kan ha gett upphov till missuppfattningar. Tecknet $||<||$ kan betyda 132 men också $2 \cdot 3600 + 12 \cdot 60$. Sammanhanget fick avgöra vilken tolkning som var rimlig. Naturligtvis hade man regler för räknesätten addition, subtraktion och multiplikation. Det finns tavlor med multiplikationstabeller och i figur 1.2 visas tolvans tabell. Det kan anmärkas att vår indelning av tiden där 1 timme är lika med 60 minuter och 1 minut är 60 sekunder går tillbaka till babyloniernas positionssystem.



Figur 1.2: *Vänster:* Talen 1–59 i kilskrift. *Höger:* Multiplikationstabell. Första raden inleds med tecknet för tolv. Därefter följer en teckenkombination som utläses a-ra och som betyder ”gånger”. Sedan följer tecknen för 1 och 12. Vi kan alltså läsa den ”12 gånger 1 är 12”. På samma sätt inses att den andra raden kan utläsas ”12 gånger 2 är 24” o.s.v. (De grå områdena betecknar att det finns skador på tavlan och att läsligheten kan vara begränsad.) (Bild: `2ANiJLz`, `3cSHFyu`)

Babyloniernas matematikkunskaper var i många avseenden avancerade. I figur 1.3 visas förhållandet mellan diagonalen och sidan i en kvadrat och det visar sig att babylonierna lyckats beräkna det med ett fel som är mindre än 10^{-6}.



Figur 1.3: Bilden till vänster visar en kilskriftstavla som har stiliserats i bilden i mitten. I bilden till höger anges längderna av kvadratens diagonal och sida samt förhållandet mellan dem som är $1 + 24/60 + 51/(60 \cdot 60) + 10/(60 \cdot 60 \cdot 60) \approx 1.414212963$. (Bild: `2MNpCyP`)

Förutom att de använde avancerade beräkningsmetoder är det uppenbart att de kände till Pythagoras sats 1500 år före **Pythagoras**, som levde på 500-talet f.Kr. På en berömd lertavla från 1800 f.Kr., den s.k. *Plimpton 322*, finns en lista på pythagoreiska tripplar d.v.s. heltal a, b och c sådana att $a^2 + b^2 = c^2$.

Babylonierna kunde beräkna areor av olika typer av områden och man kunde lösa problem som leder till andragradsekvationer. De arkeologiska fynden visar att det fanns skolor där eleverna fick lära sig matematiska metoder. Det finns lertavlor som innehåller problem med lösningar som uppenbarligen är övningar. Mycket tyder emellertid på att man lärde ut hur man skall göra för att komma fram till lösningen och inte varför metoden fungerar.

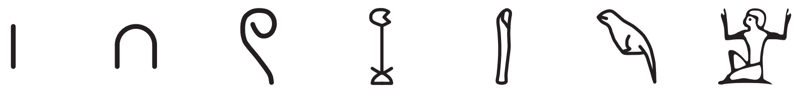
Hänvisningar till del 2 I avsnitt 12.1 beskrivs mer i detalj det babyloniska talsystemets uppbyggnad, de fyra räknesätten och kvadrattalens betydelse. Där ges också en tänkbar metod som babylonierna kan tänkas ha använt för att approximera $\sqrt{2}$. I avsnitt 13.1 fördjupas diskussionen kring *Plimpton 322*, ges kommentarer till babylonierna uppskattning av π samt ett exempel som visar babyloniernas skicklighet när det gäller geometrisk problemlösning.

1.2 Faraonernas Egypten

Väster om Eufrat och Tigris rinner Nilen. Medan Eufrat och Tigris mynnar i Persiska viken så mynnar Nilen i Medelhavet. Området kring Nilen var bördigt om man lyckades reglera vattennivåerna med dammar. Omkring 5000 f.Kr. fanns där som i Mesopotamien jordbrukssamhällen, som så småningom utvecklades till kultursamhällen där vattenregleringen var en viktig förutsättning. På 3000-talet f.Kr. enades samhällena till ett rike Egypten under en farao. En farao var formellt enväldig men under några perioder var Egypten lydstat till olika främmande makter som Assyrien och Kanaan i öster och Libyen i väster. Under 300-talet f.Kr. blev det en del av **Alexander den stores** välde och senare en del av romarriket. Långa perioder var Egypten emellertid en stormakt under mäktiga faraoner. Det kan nämnas att några av dem var kvinnor. Den sista faraon var **Kleopatra** som dog 30 f.Kr.

Den tidiga egyptiska kulturen var påverkad av den mesopotamiska och skriftspråket – *hieroglyfer* – anses ha sitt ursprung i kilskriften. Texterna ristades in på tempelväggar och på lertavlor men skrevs med bläck på pergamentrullar. Även om det egyptiska skriftspråket från början anses ha påverkats av kilskriften utvecklades det i annan riktning. Det använde sig mer av bilder.

Matematiken i Egypten var som i Mesopotamien redan från 3000-talet f.Kr. väl utvecklad. Vattenregleringen krävde planering och beräkningar vilket ställde krav på matematiska kunskaper. Ett beteckningssystem för talen skapades men det skilde sig från det babyloniska. Det var inte här fråga om ett positionssystem utan man arbetade med olika tecken för 1, 10, 1 000, 10 000 o.s.v. Man utvecklade metoder för beräkningar med de fyra räknesätten och det kan anmärkas att deras metod för multiplikation för tankarna till det binära systemet som används i dagens datorer. För att klara division utvecklade man en form av bråkräkning. Man använde sig av stambråk, som är bråk där nämnaren är ett heltal och täljaren är lika med 1.



1 10 100 1 000 10 000 100 000 1 000 000

Figur 1.4: De egyptiska hieroglyferna för de första tiopotenserna. (Bild: `2AB5kq8`)

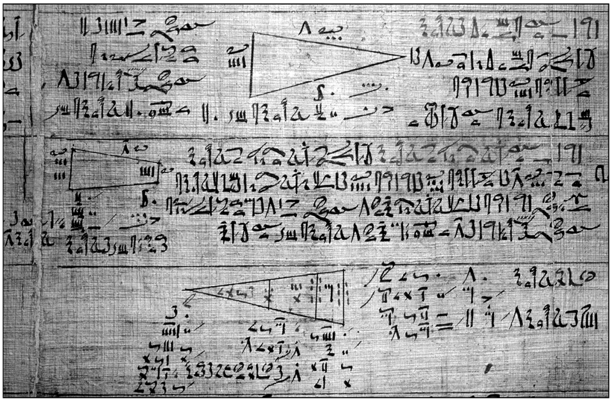
Här följer ett exempel på multiplikation.

```
√   |      ∩ ||||
             ||||

    ||    ∩∩ ||||
            ∩ ||

√   ||  ∩ ∩ ∩∩ ||
    ||     ∩ ∩ ∩

        ∩ ∩ ∩∩
        ∩ ∩ ∩∩
```

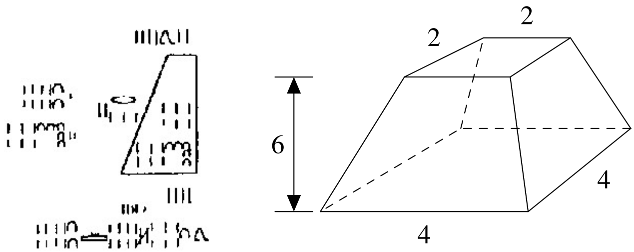
Vi beräknar $5 \cdot 18$. På första raden står talen 1 och 18. De fördubblas och vi skriver 2 och 36 på andra raden. Vi fortsätter att fördubbla och skriver 4 och 72 på tredje raden. Vi slutar där eftersom ytterligare en fördubbling skulle ge 8 och 8 är större än 5. Talet 5 är summan av 1 och 4 och vi har bockat för dem. Den sökta produkten är summan av 18 på första raden och 72 på tredje d.v.s. 90.

Vår kunskap om gammal egyptisk matematik har vi stor utsträckning från två papyrusrullar, som innehåller matematiska problem med lösningar. Den ena, den s.k. *Moskvapapyrusen*, är från 1850 f.Kr. och finns på Pusjkinmuseet i Moskva. Den andra är från 1600 f.Kr. och kallas *Rhindpapyrusen* efter en skotsk antikvarie **Alexander Henry Rhind** som köpte den i mitten 1850-talet. Den finns numera på British Museum. Papyrusrullarna visar att egyptierna kunde göra avancerade geometriska beräkningar och att de hade viss kunskap om Pythagoras sats. En rätvinklig triangel med sidorna 3, 4 och 5 längdenheter kallas ju egyptisk.

Ett bevis på egyptiernas avancerade kunskaper om geometri är att de uppenbarligen kände till hur man beräknade volymen av en stympad pyramid, ett s.k. frustum. Volymen av frustum med kvadratisk basyta är $\frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2)$ där a och b är längderna av de båda parallella kvadraternas sidor och h avståndet mellan dessa. Ett problem från *Moskvapapyrusen*, som visas i figur 1.6, visar hur volymen av ett frustum med $a = 2$, $b = 4$ och $h = 6$ beräknas.



Figur 1.5: Ett utdrag ur *Rhindpapyrusen*. (Bild: `2Cor8G1`)



Figur 1.6: Vänstra delen av figuren är hämtad från *Moskvapapyrusen* och om man granskar talen i figuren finner man att volymen successivt har beräknats enligt formeln i texten. Den högra delen ger en bild av ett frustum om vi ritar det med dagens hjälpmedel. (Bild: `2MOwsUT`)

Hänvisningar till del 2 I avsnitt 12.2 fördjupas diskussionen om det egyptiska talsystemets uppbyggnad och ges exempel på multiplikation och division. Där diskuteras också mer i detalj framställningen av bråktal med stambråk. I avsnitt 13.2 tas på nytt upp beräkning av volymen av ett frustum. Där studeras också hur man i ett problem i *Moskvapapyrusen* bestämmer volymen av en halvsfär samt hur man approximerar arean av en cirkel.

1.3 Matematik i det forna Indien

Trehundra mil öster om tvåflodslandet ligger Indien. Kring floden Indus fanns för 5 000 år sedan bördig åkermark och kring den bildades en rad samhällen med avancerad kultur. Arkeologiska fynd tyder på det. Det har funnits ett skriftspråk men det har hittills motstått alla försök till tolkning. Man har inte lyckats forcera texterna. Samhällena dog av någon anledning ut omkring 1700 f.Kr. Efterlämnade texter från två samhällen Harappa vid Punjab och Mohenjo-daro i Indusdalen visar att invånarna använde måttenheter som indelades decimalt.

De tidigaste hinduiska texterna är de s.k. *Vedaskrifterna* på sanskrit. Innehållet förmedlades först genom muntlig tradition men så småningom upptecknades de och de äldsta är från 1500 f.Kr. Huvudinnehållet är religiöst men de kom att innehålla en del geometri. För att blidka gudarna skulle offeraltare uppfylla vissa krav och det ledde till geometriska beräkningar som finns i tillägg, s.k. *Sulvasutras*, till *Vedaskrifterna*. Det finns flera *Sulvasutras* som kan dateras till perioden 800 f.Kr. till 200 f.Kr. Ordet ”sulva” betyder ”rep” och problemen i *Sulvasutras* handlar om konstruktioner med hjälp av repdragning.

Under 500-talet f.Kr. utvecklades ett skriftsystem *Brahmi* och de senare *Sulvasutras* använde det systemet. På 300-talet f.Kr. ser man för första gången de Brahmiska siffrorna som betecknar de nio första naturliga talen.

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

Figur 1.7: Siffrorna 0–9 i Brahmi. (Bild: `2ANLgkj`)

De kom att bli byggstenarna i det decimalsystem som så småningom nådde Europa och som vi nu använder. Det visade sig vara effektivt och var en viktig grund för utvecklingen av matematiken både som ett redskap för olika tillämpningar och för den matematiska vetenskapen i sig.

Hänvisningar till del 2 Hur de brahmiska siffrorna utvecklats till våra siffror visas i avsnitt 12.3.3. I avsnitt 13.3 ges exempel på hur man med hjälp av repdragning konstruerar en kvadrat med samma area som en given rektangel samt hur man bestämmer närmevärden till π och $\sqrt{2}$.

Kapitel 2

Antiken

Från 800 f.Kr. till 500 utvecklades, blomstrade och slocknade ett kultursamhälle kring Medelhavet. Det är en tidrymd på över tusen år då vetenskap och konst når stora höjder. Epoken kallas ofta antiken och det samhället som skapades anses vara den västerländska kulturen vagga.

2.1 Den arkaiska perioden

Under perioden 800–480 f.Kr. bildades en typ av stadskultur kring Medelhavet. Den startade i Grekland kring städer som Athen och som Sparta. Städerna var fristående lokala enheter och trots att de ofta var ofta i krig med varandra så utvecklades jordbruk och handel. En samhällsklass som hade tid och råd att ägna sig åt kulturella aktiviteter växte fram. I början av denna den s.k. *arkaiska perioden* verkade bl.a. **Homeros** som skrev de båda eposen *Iliaden* och *Odyssén*, verk som läses än idag och fortfarande inspirerar författare och konstnärer. Musiken var en viktig del av kulturen. Vetenskaper som astronomi och matematik utvecklades. De första s.k. naturfilosoferna trädde fram på scenen. De ville ge en förklaring hur universum skapats och utvecklats. Filosofi, som betyder ungefär ”kärlek till kunskap”, fick en central ställning och den utvecklades ofta hand i hand med matematiken. Några av de främsta tänkarna under denna period får illustrera den vetenskapliga aktiviteten.

Thales från Milo (c:a 625–545 f.Kr.) anses vara antikens vetenskapliga portalfigur. Han var son till en rik handelsman och han gjorde resor till bl.a. Egypten och Babylonien och tillägnade sig delar av deras kultur. Han intresserade sig för astronomi, förutsåg en solförmörkelse och utvecklade metoder för navigering. Det är från honom vi har de första matematiska bevisen. Parallellt med den mer vardagsnära matematik som krävs för att idka jordbruk och handel utvecklades en mer teoretiskt inriktad matematik. Man nöjde sig inte med att beskriva matematiska samband och metoder utan man ville förstå varför de gäller och varför de fungerar. Man ville förklara komplicerade samband med enklare. Detta kom att i hög grad känneteckna grekisk filosofi och denna önskan kom att prägla naturfilosoferna. Thales förde också fram teorier om universums ursprung och för honom var vattnet det element ur vilket allting utvecklats.

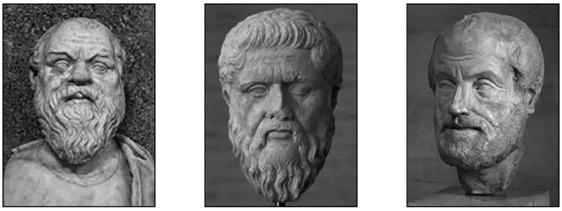
Anaximander (610–546 f.Kr.) brukar räknas som den första naturfilosofen. Han verkade på Milos och var elev till Thales. Animaxander hävdade att allting utvecklats ur ett grundämne, som han kallade apeiron, och att utveckling skett genom verkan mellan motsatspar som varmt och kallt, vått och torrt.

Pythagoras från Samos (c:a 570–495 f.Kr.) var en annan av den tidens stora filosofer och matematiker. Han föddes på Samos, var elev till både Thales och Anaximader, besökte Egypten och tog intryck av deras kultur, var fånge i Babylonien och hamnade så småningom i södra Italien där han grundade och var ledare för en skola eller snarare sekt som ägnade sig åt religion och vetenskap. Verksamheten var mycket hemlig men man vet att den utgick från vissa grundläggande principer. En av dem är att verkligheten i djupaste mening är matematisk. Talen var grunden ur vilket allt skapats. Det är de matematiska principerna, talbegrepp, geometriska begrepp och den abstrakta idén om bevis som är det centrala i Pythagoras och hans lärjungars tankevärld. Han intresserade sig för musik och noterade att svängande strängar ger upphov till harmoniska toner när förhållanden mellan deras längder är heltal. Idag förknippar nog de flesta Pythagoras med den sats som bär hans namn. Frågar man folk om ett exempel på en matematisk sats så är det Pythagoras man nämner. Den var emellertid känd långt innan av t.ex. babylonierna. Möjligen har han bevisat satsen. Det kan också hända att man uppkallade den efter honom långt senare för att hedra honom. Pythagoras räknas som den förste matematikern.

Hänvisningar till del 2 I avsnitt 13.4.1 beskrivs Thales metoder att mäta höjden av en pyramid och avståndet från en kuststräcka till ett skepp. Pythagoréernas upptäckt av irrationaliteten hos $\sqrt{2}$ beskrivs i avsnitt 13.4.3. Pythagoras talmystik tas upp i avsnitt 17.1.1.

2.2 Den klassiska perioden

Under perioden 480 f.Kr.–330 e.Kr. avtog maktkampen mellan de olika städerna. En yttre fiende, perserkonungen **Xerxes**, besegrades 479 f.Kr. både till land och till sjöss. Makedonien blev ett maktcentrum och de makedoniska kungarna stödde utveckling av konst och vetenskap. Under den klassiska perioden verkade dramatiker som **Aristofanos**, **Euripides** och **Sofokles** vars skådespel uppförs än idag. Musiken ansågs gudomlig och kallades musernas konst. Redan Pythagoras, som enligt uppgift var en skicklig musiker, hade studerat matematiska samband mellan tonintervall och längderna av de strängar som producerar tonerna. Musiktävlingar arrangerades och de antika dramerna hade musikaliska inslag. Det var under den klassiska perioden som **Leukippos** (c:a 480–420 f.Kr.) och hans elev **Demokritos** (c:a 460–370 f.Kr.) utvecklade de teorier som kan sägas vara den första atomteorin. De menade att universum består av tomrum och små elementarpartiklar, som de kallade atomer, och som ibland bildar kluster som de kallade materia. En annan av filosoferna under denna tid var **Zenon** från Elea (c:a 490–425 f.Kr.) som formulerade en rad paradoxer där han ville visa att rörelse var omöjlig. De visade också det problematiska med att dela in tidsintervall och sträckor i oändligt många oändligt små delintervall. Paradoxerna kom att påverka diskussionerna kring differential- och integralkalkylen som utvecklades under 1600-talet e.Kr. och som fick en sammanhängande teori av **Isaac Newton** och **Gottfried Wilhem von Leibniz** kring 1685.



Figur 2.1: Från vänster: Sokrates, Platon och Aristoteles. (Bild: `2AKhjS8`, `3dXeZFC`, `2AZGU9o`)

2.2.1 Tre stora filosofer

Under den klassiska perioden verkade tre av historiens största filosofer. De har haft stor betydelse för västerländskt tänkande och deras teorier är aktuella än idag. De tre är **Sokrates**, **Platon** och **Aristoteles**. Aristoteles var elev till Platon som i sin tur var elev till Sokrates. Ingen av dessa bidrog i någon större utsträckning med resultat inom matematiken men deras filosofiska grundsyn och sätt att resonera har varit av stor betydelse för all vetenskap och naturligtvis då också för matematiken.

Sokrates (469–399 f.Kr.) Det vi vet om Sokrates vet vi genom hans elever. Han är huvudpersonen i många av Platons berömda dialoger vilka handlar om etiska frågor och samhällsproblem. Sokrates var ingen naturfilosof, han var mer intresserad av människor än av hur världsalltet är uppbyggt. Han trodde på samtalet som en pedagogisk metod. Metoden kallas majevstisk efter grekiskans ”maieutike”, som betyder förlossningskonst. Lärarens uppgift var att genom frågor och kommentarer locka fram den kunskap som finns hos eleven. Förhållandet lärare/elev skulle präglas av ömsesidig respekt. Sokrates liksom hans elev Platon misstrodde det skrivna ordet som en källa till kunskap. Där finns inte plats för motfrågor och diskussioner. Hans läror eller snarare förhållningssätt ansågs av de styrande uppmuntra till omstörtande handlingar och han dömdes till döden och avrättades 399 f.Kr. genom att tömma en bägare med gift.

Platon (428–348 f.Kr.) Platons filosofiska grundidé var att den värld vi lever i bara är en skuggvärld av den verkliga världen och att vi har som uppgift att genom företeelser i skuggvärlden sluta oss till hur den verkliga världen ser ut. Det finns många skrifter bevarade av Platon. De mest kända är hans dialoger. I *Gästabudet* eller *Symposion*, som behandlar kärleken, hävdar han att verklig kunskap endast kan nås genom samtal. I *Kriton* diskuterar han begreppet rättvisa och i *Staten* behandlar han idealstatens utformning. I de flesta dialogerna är Sokrates en av samtalspartnerna och i *Faidon* samtalar Sokrates med sin vän Faidon om synen på livet och döden dagen innan Sokrates tömmer giftbägaren. Platon hade högt anseende. Han gjorde många resor, han skrev ett stort antal brev och mot slutet av 380-talet f.Kr. grundade han en egen akademi utanför Athen, Platons Akademi. Den var ett lärosäte för intresserade filosofer och en av eleverna var Aristoteles. Platon var intresserad av matematik och hans uppskattning av ämnet manifesterades i den devis som stod på porten till skolan ”Här kommer ingen in som inte behärskar geometri”. Skolan fortlevde under mer än nio sekler och stängdes år 529.

Aristoteles (384–322 f.Kr.) Aristotetes var som Sokrates och Platon en del av aristokratin. När han var arton år blev han elev vid Platons Akademi och där var han till Platons död. Han reste därefter till Mindre Asien och Lesbos och värvades av **Filip II av Makedonien** som lärare till hans son Alexander som senare skulle kallas Alexander den store. Aristoteles var kanske mindre spekulativ till sin läggning än Platon och han inrättade en skola, *Lykeion*, i Athen som präglades av empirisk forskning i kontrast till Platons Akademi som var spekulativ och matematisk. Han gjorde omfattande studier i botanik och zoologi. Hans världsbild skulle dominera västvärldens filosofi ända till 1600-talet. I den är det inre av universum uppbyggt av de fyra elementen jord, eld, luft och vatten. Planeterna rör sig i cirklar runt jorden och antogs vara uppbyggda av ett femte element, kvintessensen. Utanför planeterna finns fixstjärnorna och längst ut tomrummet. Aristoteles skrifter omfattar många områden som fysik, biologi, politik, estetik, etik och logik. Han intresserade sig inte speciellt för matematik men hans sex verk om logik *Organon* innehåller delar som på nytt har blivit aktuella då logiken är en hörnsten i grundläggande datavetenskap. I hans idealbild av vetenskaplig framställning utgår man från ett antal inledande påståenden som verifierats. Alla övriga resultat skall sedan härledas från dem med hjälp av logiska slutsatser. Framställningssättet användes senare av **Euklides** när han i verket *Elementa* sammanfattade den tidens matematiska kunskaper.

2.2.2 Matematiken under den klassiska perioden

Under den klassiska perioden studerades en rad problem som senare skulle få stor betydelse. En av de främsta matematikerna under denna period var **Eudoxos** (408–355 f.Kr.) som studerade astronomi och försökte förklara himlakropparnas rörelse. Han gav också viktiga bidrag till grundläggande matematik. Det var bekant att förhållandet mellan diagonalen och sidan i en kvadrat, det vi idag kallar $\sqrt{2}$, inte kan skrivas som kvoten mellan två hela tal. Det förbryllade många av den tidens filosofer och matematiker. Förhållandet kallades irrationellt och det kan översättas med ”något som inte kan förstås”. Eudoxos utvecklade en proportionslära där han systematiskt behandlade förhållandena mellan olika storheter och blev den förste som gav en teori för irrationella tal. Den skulle senare bli en del av Euklides *Elementa*.

Det är från Eudoxos vi har det som idag kallas *uttömingsmetoden*. Antag att vi har anledning att tro att en area antar ett givet värde A men att vår misstanke inte är understödd av ett vattentätt bevis. Vi kan då bevisa vårt påstående genom att först anta att arean är lika med A' som är mindre än A och motbevisa det genom att konstruera ett område som säkert är större än A' men samtidigt inte överskrider A. På samma sätt motbevisar vi sedan att arean inte är större än A.

Två problem som sysselsatte många av den tidens matematiker var kubens fördubbling och cirkelns kvadratur. Hur kan man utifrån en given kub konstruera en ny kub med dubbelt så stor volym som den givna? Hur kan man konstruera en kvadrat med samma area som en given cirkel? Hjälpmedlen är passare och ograderad linjal och konstruktionen skall ske i ett ändligt antal steg. Tillsammans med vinkelns tredelning utgör dessa tre klassiska problem som fick en lösning först under 1800-talet.

En av dem som arbetade med kubens fördubbling var **Menaichmos** (380–322 f.Kr.). Hans arbete ledde honom till att studera kägelsnitten ellips, hyperbel och parabel som är skärningskurvor mellan plan och en dubbel rotationskon (se figur 2.4). Den teorin skulle senare utvecklas av **Apollonius** och den har varit av stor betydelse inom matematiken och fysiken. Teorien var vägledande för Kepler, Galilei och Newton när de under 1600-talet skapade den mekanik som kom att ligga till grund för den klassiska fysiken.

Hänvisningar till del 2 En redogörelse för Eudoxos teorier finns i avsnitt 13.4.3. Avsnitt 13.4.2 ägnas helt åt konstruktionsproblem och där finns också ett kort stycke om Platons kritik av Menaichmos metod. I inledningen till avsnitt 13.4.5 ges med hjälp av modern beteckningar en förklaring till varför skärningspunkten mellan en parabel och ellips kan lösa problemet med kubens fördubbling.

2.3 Hellenismen

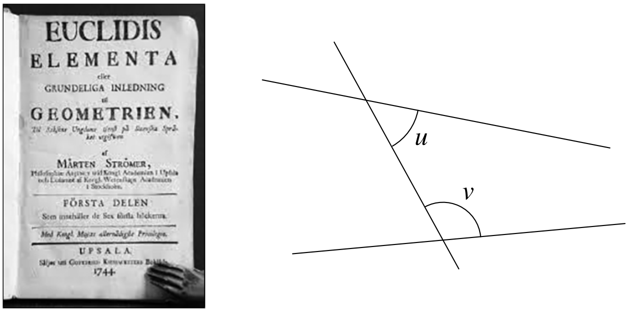
Filip II av Makedonien underkuvade de flesta av grekernas stadsriken och hans välde ärvdes vid hans död 336 f.Kr. av sonen Alexander den store – en de största fältherrarna genom tiderna. Hans välde kom att omfatta det gamla perserriket från Mindre Asien till Afghanistan, Egypten och stora områden på Balkan. Alexander grundlade en rad städer och en av dem var Alexandria som under århundraden blev en kulturell metropol med ett omfattande bibliotek. Under denna epok, som kallas hellenismen, kunde den grekiska kulturen spridas till stora områden. Hellenismen avslutades omkring 30 f.Kr. då romarna tog makten över rikena kring Medelhavet.

Matematiken blomstrade under hellenismen. En lång rad matematiker och astronomer bidrog till utvecklingen. Några ord om de för matematiken viktigaste vetenskapsmännen får illustrera vitaliteten i verksamheten.

Euklides (352−265 f.Kr.) var verksam i Alexandria. Hans stora verk är *Elementa*, en sammanställning av den tidens matematiska vetande i geometrins form. Det är inte resultaten i sig som är anmärkningsvärda utan själva framställningen. Euklides utgår från fem grundläggande axiom och fem postulat. Axiomen är av mer allmän natur t.ex. ”Det hela är större än sina delar”. Postulaten handlar om grundläggande egenskaper hos geometriska objekt. Utifrån dem bevisar han sedan genom rent logiska resonemang sats efter sats. Ordningen mellan satserna är viktig. I beviset av t.ex. sats 50 får han endast använda axiomen, postulaten och de 49 redan bevisade satserna. *Elementa* är ett omfattande verk, som består av tretton böcker och ett mycket stort antal satser. Det är ofta i slutet av kapitlen som de viktiga satserna visas. Pythagoras sats är t.ex. den näst sista satsen i det första kapitlet. Många av de föregående satserna har karaktären av mer eller mindre självklara påståenden, som måste bevisas om man vill fullfölja målsättningen att allt skall härledas från axiomen och postulaten. *Elementa* kom att betyda mycket för matematiken och för framställning av matematik. Verket kom att bli en del av den vetenskapliga kulturen och det kom också att bli en del av elementarundervisningen. I Sverige försvann den från den grundläggande matematikundervisningen på 1960-talet.

Elementa har också givit upphov till problemställningar som sysselsatt matematiker i sekler. Det är framför allt frågan om postulaten är oberoende av varandra som har vållat huvudbry. Kan något av dem bevisas med hjälp av de övriga? I så fall skulle antalet postulat kunna minskas. Det är främst det femte postulatet som besvärade matematiker redan under antiken. De fyra första är enkla till sin natur: ”Genom två punkter går precis en en rät linje”, ”En rät linje är obegränsad”, ”Varje punkt är medelpunkt till en cirkel med en given radie” och ”Alla räta vinklar är lika stora”. Det femte postulatet handlar om två räta linjer som skärs av en tredje och beskrivs i texten till figur 2.2. Det omformulerades långt senare på följande sätt: ”Genom en punkt utanför en given rät linje går exakt en rät linje parallell med den givna.” Kan det femte postulatet bevisas med hjälp av de fyra första? Frågan kom att kallas *problemet med parallellerna* och löstes först på 1800-talet då man lyckades visa att det var omöjligt.

Postulaten är verkligen oberoende. Lösningen öppnade nya dörrar och matematiska teorier kunde skapas utifrån nya perspektiv.



Figur 2.2: Euklides *Elementa* har haft stor betydelse som modell för framställningen av matematik. Verket har också varit lärobok i över tusen år. På den övre bilden visas titelsidan till den första svenska översättningen som gjordes av Mårten Strömer år 1744. Den undre bilden illustrerar det femte postulatet i *Elementa* som säger att om två räta linjer skärs av en tredje och summan av närliggande vinklar är mindre än två räta så skär de båda förstnämnda linjerna varandra i en punkt på samma sida om den tredje linjen som de båda närliggande vinklarna. På bilden är de båda vinklarna u och v och eftersom $u + v$ är mindre än 180 grader skär de båda linjerna varandra i en punkt till höger om den tredje linjen. Försöken att bevisa det femte postulatet med hjälp av de fyra övriga ledde till att man i början av 1800-talet insåg att det var omöjligt. Man upptäckte en ny geometri – den icke-euklidiska – och den kom att ändra synen på matematiken. (Bild: `2MRRtxU`)

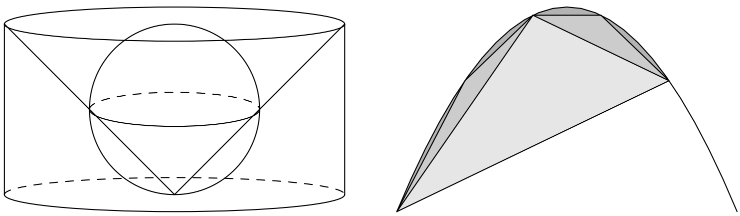
Aristarchos (310–230 f.Kr.) var astronom och matematiker. Han var ursprungligen från Samos men studerade i Alexandria där han också var verksam som vetenskapsman. Han hade en heliocentrisk världsuppfattning; Jorden kretsar kring solen och månen kring jorden. Han försökte beräkna avståndet mellan solen och månen men de data han hade var felaktiga. I sina beräkningar gjorde han uppskattningar av det vi idag betecknar med $\sin 3°$ och fann att $1/20 < \sin 3° < 1/18$ vilket är en anmärkningsvärd god approximation. Aristarchos världsbild fick inget större gehör bland dåtidens vetenskapsmän. Den geocentriska världsbilden, där solen och planeterna kretsade kring jorden, dominerade och kom att dominera under en mycket lång tid. Det var inte förrän Keplers och Galileis rön på 1600-talet som den heliocentriska uppfattningen definitivt slog igenom.

Eratosthenes (276–194 f.Kr.) var från Cyrene i nuvarande Libyen. Han kom så småningom till Alexandria där han blev föreståndare för biblioteket. Han var en högt aktad vetenskapsman och hans verksamhet var mycket bred. Han intresserade sig för primtal och gav en metod för att hitta primtal. Idag kallar vi den *Eratosthenes såll*. Han arbetade med problemet med kubens fördubbling. Han var geograf och samlade in uppgifter om avstånd mellan städer som han sammanställde till en ”världskarta” och det är kanske det första försöket att ge en sammanhängande bild av det universum som man då kände till. Hans kanske mest berömda insats är hans beräkning av jordens omkrets. Med mycket enkla hjälpmedel och med hjälp av sina kunskaper om avstånden mellan olika städer kunde han bestämma jordens omkrets med stor noggrannhet. Hur stor är svårt att veta eftersom vi inte säkert vet hur de mått han använde skall omräknas till vårt metersystem. Eratosthenes var en mångsysslare och han fick epitetet ”beta”, den andra bokstaven i det grekiska alfabetet. Han var näst bäst på mycket men inte bäst i något.

Arkimedes (287–212 f.Kr.) var den störste matematikern under antiken och en av de största matematikerna över huvud taget. Han var född i Syrakusa i Italien där hans far var astronom. Han verkade i Syrakusa under större delen av sitt liv men det är uppenbart att han hade mycket goda kontakter med Alexandria som han förmodligen besökte vid flera tillfällen. Han kommunicerade brevledes med sina kolleger där.

Arkimedes var verksam inom många områden. Han utvecklade banbrytande teorier inom mekaniken, formulerade hävstångsprincipen och gjorde tyngdpunktsberäkningar. Han bestämde tryckkraften på en kropp nedsänkt i vattnet och formulerade den princip som nu bär hans namn. Han uppfann krigsmaskiner och konstruerade en vattenskruv som kunde leda vatten från ett lägre till ett högre plan.

Inom matematiken gjorde Arkimedes banbrytande insatser. Han bestämde arean och volymen av en sfär och arean av ett parabelsegment. Han studerade spiraler och rotationskroppar och med hjälp av inskrivna och omskrivna månghörningar visade han att π ligger mellan $3\frac{10}{71}$ och $3\frac{1}{7}$. Hans framställning är stringent och resultaten bevisas enligt kraven i Euklides *Elementa*. I dessa verk står emellertid inget om hur han har kommit fram till de samband han bevisar. Idéerna bakom resultaten beskriver han i ett brev till Eratosthenes och han kallar arbetet för *Metoden*. Under medeltiden skrevs en religiös text över Arkimedes manuskript och det var först i början av 1900-talet som man upptäckte den underliggande texten och kunde identifiera den. En engelsk översättning av **T. L. Heath** publicerades omkring 1915. Arkimedes resonemang i *Metoden* förebådar differential- och integralkalkylen som skulle utvecklas tvåtusen år senare och som skulle bli ett effektivt verktyg i matematiken och i dess tillämpningar.



Figur 2.3: Två arbeten av Arkimedes förebådar den analys som utvecklades under 1600- och 1700-talet. Till vänster visas den figur som Arkimedes använde sig av då han härledde förhållandet mellan sfärens och cylinderns volymer. Han delade in figuren i oändligt många oändligt tunna vertikala skivor. Han samlade skivorna från konen och sfären i en punkt till vänster om figuren. Han kunde med hjälp av geometriska resonemang och hävstångslagen sluta sig till att konen och sfären tillsammans med cylindern var i jämvikt kring konens spets. Figuren till höger får illustrera Arkimedes metod för att härleda arean av ett parabelsegment. Han fyller successivt upp segmentet med trianglar och får dess area som summan av oändligt många triangelareor. En mer detaljerad redogörelse ges i kapitel 13.

I verket *Sandräknaren* tar Arkimedes sig an problemet att bestämma antalet sandkorn i universum. Skriften skall ses som ett genmäle mot dem som påstår att antalet sandkorn är oräkneliga. Han använder sig av Aristarchos modell av universum och genom sinnrika geometriska metoder och beräkningar kan han visa att det finns ett tal som är större än antalet sandkorn. Han använder sig av ett beteckningssystem som för tankarna till vår tids potenser.

Arkimedes ansågs vara en mycket säregen person och det finns många skrönor om honom. Enligt sägnen skulle kung Hieron av Syrakusa givit Arkimedes i uppgift att avgöra guldhalten av hans kungakrona. Han behövde då mäta kungakronans volym och kom på lösningen när han klev i badet och såg hur mycket vatten som runnit ut. Han skall då ha sprungit naken genom staden och ropat ”Heureka!” som betyder ”Jag har funnit det!”.

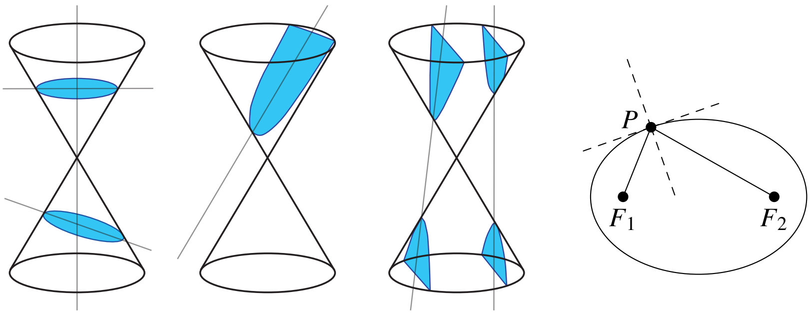
Som tidigare nämnts skickade Arkimedes brev med sina resultat till kollegorna i Alexandria. Han bifogade i regel inte bevisen. Några mindre nogräknade personer uppgav att de själva var upphovsmännen. Arkimedes fick veta detta och hämnades genom att i breven infoga en eller två falska satser.

Arkimedes förmåga att koncentrera sig på ett problem och koppla bort allt utanför illustreras av hans sista ord. Romarna invaderade Syrakusa och fann Arkimedes grubblande över ett geometriskt problem med figurerna uppritade i sanden. Arkimedes förmanade soldaten med orden: ”Noli turbaros circulos meos” eller ”Rubba inte mina cirklar” varefter soldaten, mot befälhavarens order, dödade honom med sitt svärd. På hans gravsten i Syrakusa står på hans egen önskan förhållandena mellan volymerna av en sfär och en cylinder som han härlett i *Metoden*.

Apollonius (262–190 f.Kr.) växte upp i Perga, en stad i det som i dag är Turkiet. Han studerade i Alexandria och kom sedan att undervisa där. Han vistades långa tider vid ett liknande universitet i Pergamum i Mindre Asien. Han hade ett högt anseende och kallades ”Den store geometrikern”.

Hans stora verk är sju böcker om kägelsnitt. Ett kägelsnitt är en kurva som uppstår då en ett plan skär en cirkulär dubbelkon och kägelsnitten hade, som tidigare nämnts, studerats av bl.a. Menaichmos redan på 300-talet f.Kr. Det finns väsentligen tre typer av kägelsnitt; ellipser, hyperbler och parabler (se figur 2.4), och de har spelat och spelar stor roll i matematiken och dess tillämpningar. Apollonius teori är omfattande och nästan heltäckande. Han behandlar tangenter och normaler och han studerar problem om maxima och minima. Man kan säga att han därigenom förebådar differentialkalkylen. Något koordinatsystem i vår mening har han inte men det är lätt att härleda kägelsnittens ekvationer utifrån Apollonius satser.

Euklides *Elementa* och Apollonius böcker om kägelsnitten kom att bli standardverk för vetenskapsmän under lång tid framöver. Kepler, Galilei och Newton kände väl till Apollonius resultat och kunde använda sig av dem för att beskriva planet- och kaströrelser.



Figur 2.4: I de tre bilderna till vänster visas skärningarna mellan en dubbelkon och ett plan. Längst till vänster skär planet endast den ena konen. Vi får då en cirkel om planet är vinkelrätt mot konens axel. Annars får vi en ellips. I nästa bild är planet parallellt med konens generatris och vi får en parabel. I den tredje bilden från vänster skär planet båda konerna och vi får en hyperbel. Apollonius härledde många resultat om kägelsnitten. Han visade bl.a. att en ellips består av de punkter där summan av avstånden till två givna brännpunkter är konstant. I den högra delen av figuren är F_1 och F_2 brännpunkter och $PF_1 + PF_2$ är konstant för alla P på ellipsen. Han visade också att normalen till tangenten i punkten P delar vinkeln F_1PF_2 mitt itu.

Hänvisningar till del 2 Avsnitt 13.4.4 ägnas åt Euklides *Elementa*. I avsnitt 13.4.1 behandlas Eratosthenes beräkning av jordens omkrets och Aristarchos beräkning av förhållandet mellan jordens avstånd till solen och till månen. Avsnitt 13.4.5 behandlar kägelsnitt, speciellt Apollonius sju böcker. I avsnitt 13.4.6 beskrivs Arkimedes arbeten om cirkeln, om sfären och cylindern samt om parabelsegmetets area.

2.4 Kejsartiden

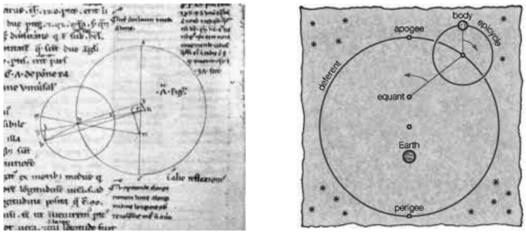
Under senare delen av 100-talet f.Kr. var området kring Medelhavet en del av det romerska riket. Efter ett utdraget inbördeskrig stod kejsar **Augustus** år 27 f.Kr. som slutlig segrare och kejsartiden inleddes med 200 år av fred med ett relativt välstånd. Därefter började det stora romerska väldet knaka i fogarna. På 400-talet invaderades Rom av gotiska stammar från norr och 476 avsattes de siste västromerske kejsaren Romulus Augusturus.

Den hellenistiska kulturen spreds under kejsartiden till nya områden. I början av vår tideräkning började kristendomen utbreda sig och den blev statsreligion i Rom 391 e.Kr. En polyteistisk religion ersattes med en monoteistisk. Alexandria var fortfarande ett intellektuellt centrum. Astronomin och matematiken utvecklades. För matematikens del handlade det till en del om att dokumentera och kommentera klassiska verk, inte minst Euklides *Elementa*. Några av de främsta representanterna för matematiken och dess tillämpningar får exemplifiera den vetenskapliga aktiviteten.

Heron (c:a 10–75) var verksam i Alexandria där han både bedrev forskning och undervisning. Han gav bidrag till matematik, mekanik, astronomi och optik. Heron var inte bara teoretiker utan också uppfinnare. Han efterlämnade skisser på konstruktioner av olika typer av maskiner och på en dockteater. Ett av hans viktigaste verk var en bok om mekanik. Den är tydligt inspirerad av Arkimedes och innehåller bl.a. jämviktsproblem, tyngdpunktsberäkningar och teorier för rörelse. Teorierna tillämpas på olika praktiska problem som hur man lyfter tunga kroppar och hur man utför transporter med olika mekaniska hjälpmedel. Boken *Metrica* ägnas åt matematik och har sin utgångspunkt i *Elementa*. Han beräknar areor och volymer och i det sammanhanget ger han den formel som bär hans och som kan användas för beräkning av en triangels area med hjälp av dess sidor.

Klaudius Ptolemaios (c:a 85–165) var den mest inflytelserika astronomen under antiken. Hans bild av universum, som gavs i det stora verket *Almagest*, kom att vara ledande under århundraden. Det var först med Keplers och Galileis insatser under 1600-talet som hans bild ersattes av den vi numera har. Vad betyder *Almagest*? Från början hade verket ett grekiskt namn som på svenska betyder ungefär ”Den matematiska sammanställningen” som senare ändrades till ”Den stora sammanställningen”. Verket översattes så småningom till arabiska och titeln blev ”al-majisti” som senare kom latiniseras till *Almagest*.

I *Almagest* ger Prolemaios en beskrivning av solens och planeternas rörelse. Enligt Aristoteles skall dessa röra sig i cirkulära banor med jorden som medelpunkt. Men det stämmer inte med observerade data. Ptolemaios ville inte släpp tankarna på att himlakropparna i någon mening rör sig cirkulärt. Han gjorde några justeringar av Aristoteles världsbild för att förklara de observerbara avvikelserna från idealbilden. Han flyttade omloppsbanans centrum från jordens medelpunkt och jorden kallades epicentrum till cirklarna. Men det räckte inte för att förklara avvikelserna. Han lät då planeterna och solen röra sig i cirkulära banor kring det nya centrumet men samtidigt rörde de sig i cirklar med medelpunkter i den ursprungliga omloppsbanan. Han skapade s.k. epicykler. Genom att lägga ytterligare lager av epicykler på en planetbana kunde han förbättra överensstämmelserna mellan observationer och teorin.



Figur 2.5: Bilderna illustrera epicykler. Den till vänster är ett utdrag ur en arabisk version av *Almagest* och den till höger är en engelsk framställning. (Bild: `2AKjKEf`, `3hCPJH7`)

Hans teorier kom att som tidigare nämnts stå i sig till i början av 1600-talet. Astronomen **Tycho Brahe** arbetade på 1500-talet efter Ptolemaios epicykelteori och Johannes Kepler hade från början samma ansats innan han lyckades finna den modell som vi nu betraktar som den rätta.

Almagest är ett stort verk som omfattar tretton böcker och det krävdes stor geometrisk skicklighet att genomföra de beräkningar som krävdes. Ptolemaios skaffade sig en hjälptabell där han kunde avläsa längden av korda om medelpunktsvinkeln är given. De första trigonometriska tabellerna finns alltså i *Almagest*. I tabellen nedan jämförs Ptolemaios beräkningar med dagens för några slumpvis valda vinklar.

vinkeln v i grader	halva kordan enligt *Almagest*	$\sin(v/2)$ med miniräknare
16.5	0.1434930556	0.1434926220
49.0	0.4146944444	0.4146932427
64.0	0.5299189815	0.5299192642

Ptolemaios var inte bara matematiker och astronom. Han gav också ut omfattande verk om optik och geografi.

Nichomachus (c:a 60–129) är en matematiker från Gerasa, som var en stad i nuvarande Jordanien. Han var inspirerad av Pythagoras och intresserade sig för talteori och musik. Han är unik eftersom han huvudsakligen ägnade sig åt aritmetik i en tid då matematik nästan helt identifierades med geometri. För oss välkända delar av talteorin som t.ex. bestämning av största gemensamma delaren till två positiva heltal formulerades geometriskt. Metoden kallas nu *Euklides algoritm* och ingår i *Elementa*. Men Nichomachus var aritmetiker och hans mest kända verk är *Aritmetike isagoge* (”Introduktion till aritmetiken”). I boken använder sig Nichomachus av våra arabiska siffror och den är den första kända boken som innehåller multiplikationstabeller. En del av boken ägnas åt talteori och talmystik. Nichomachus bevisar inte sina påståenden och många av dem är felaktiga. Han intresserar sig för perfekta tal d.v.s. tal där summan av talets delare (utom talet självt) är lika med talet. Talet 6 är perfekt eftersom den har delarna 1, 2 och 3 och $1 + 2 + 3 = 6$. Han gav talen moraliska egenskaper. Tal där summan av delarna var större än talet själv förknippades med överflöd, överdrifter och missbruk medan tal där summan var mindre än talet förknippas med saknad, misslyckande och otillräcklighet.

Många matematiker t.ex. **Pappos** tyckte illa om *Aritmetike isagoge* men den översattes till latin och kom att bli ett standardverk i aritmetik i tusen år. Man kan fråga sig varför en bok med så många fel och med så mycket mystik kunde bli så populär. Kanske var den användbar för andra än matematiker med sitt beteckningssystem och med sina tabeller. Kanske tilltalades den tiden av talmystiken. Den brittiske matematikhistorikern T. L. Heath skriver ”. . . den lästes till en början mer av filosofer än av matematiker och blev sedan populär i en tid då det inte fanns några matematiker kvar utan bara filosofer som endast tillfälligtvis intresserade sig för matematik.”

Diofantos (c:a 200–84) var verksam i Alexandria och hans stora verk är *Arithmetica*. Det består av tretton böcker men endast sex har bevarats. Böckerna innehåller 130 problem som leder till ekvationer.

Figur 2.6: En latinsk utgåva av *Arithmetica* från 1621. (Bild: `3dWaz1P`)

Lösningarna ges numeriskt och han studerar både ekvationer som ger en entydig lösning och sådana som ger oändligt många lösningar. Ekvationer av det sistnämnda slaget kallar vi nu *diofantiska ekvationer*. Problemen leder till ekvationer av första eller andra graden. Han förkastar negativa lösningar och lösningar som ger irrationella rötter. När det gäller andragradsekvationer accepterar han bara en lösning. Diofantos formulerade sina ekvationer i ord men införde också förkortningar som leder tankarna till vår symboliska algebra. Han kallas också ibland algebrans fader. Men den symboliska algebran skulle inte slå igenom förrän på 1600-talet och Diofantos försök får ses som några första stapplande steg mot det effektiva och ändamålsenliga notationssystem vi använder oss av idag.

Vi ger en något moderniserad version av det allra första problemet i *Arithmetica*:

> ”Problem 1 i bok I.
> Att dela ett givet tal α i två vars skillnad δ är given.
> Sätt det mindre talet lika med ζ, det större är då $\zeta + \delta$,
> man har $\zeta + \zeta + \delta = \alpha$ och således
> det mindre $\zeta = 1/2(\alpha - \delta)$
> det större $= 1/2(\alpha + \delta)$
> Exempel. $\alpha = 100$, $\delta = 40$. De sökta talen: 30 och 70.”

Speciellt berömt är problem 8 i bok II som lyder ”Att dela ett givet kvadrattal i två kvadrattal”. Det var i marginalen till detta problem som Fermat i mitten av 1600-talet skrev ner följande:

> ”Å andra sidan är det omöjligt att dela en kub i två kuber, en bikvadrat i två bikvadrater, varje potens som inte är en kvadrat i två potenser med samma exponent. Jag har upptäckt ett underbart litet bevis för detta, men det ryms inte i marginalen.”

Påståendet, som kallas *Fermats förmodan* eller *Fermats stora sats* gäckade matematiker i århundraden och bevisades först 1995 av den engelske matematikern **Andrew Wiles**.

Diofantos var den främste talteoretikern under antiken och stora delar av *Arithmetica* ägnas åt talteori. Han undersökte t.ex. om givna tal kunde skrivas som summan av två, tre eller fyra kvadrattal. Hans arbeten är originella och nyskapande och tillsammans med Ptolemaios får han nog anses som den främste av kejsartidens matematiker. Han har tillägnats ett epigram som lär ha stått på hans gravsten;

> ”Denna grav håller dig Diofantos. Ah, stora under! Och graven berättar enligt vetenskapen livets mått. En sjättedel av livet förlänade gud honom att vara barn; En tolftedel tillagd, att bära fjun på kinderna. Därefter en sjundedel till och han bröllopets fackla tände. Femte året efter bröllopet han skänkte honom ett barn. Ack, enda olyckliga barn, halva faderns livsmått uppnått, bränns dettas kalla lik. Han sorgen ytterligare fyra tröstande år räknade med denna kunskap, när han livets slut nådde.”

Härav skall man kunna bestämma Diofantos ålder. Epigrammet skulle försvara en plats i *Arithmetica* och lösningen överlämnas till läsaren.

Pappos (c:a 290–350) var en matematiker som levde hela sitt liv i Alexandria. Hans stora verk är *Synagoge* (”Matematiska samlingar”). Det är ett mycket omfattande verk och delar finns kvar. Pappos går igenom delar av den klassiska litteraturen och gör kommentarer och tillfogar nya resultat. Han behandlar arbeten av Euklides, Erathostenes, Arkimedes, Apollonius och Ptolemaios m.fl. Ett av hans egna resultat kom att vara centralt för den projektiva geometri som utvecklades under 1600-talet. Han diskuterar också begreppen analys och syntes när det gäller problemlösning och geometriska konstruktioner.

Hypatia (c:a 370–415) var en kvinnlig matematiker och filosof från Alexandria. Det är den enda kvinnan i vårt galleri av forskare under antiken. Det är kanske inte så konstigt att männen dominerade. Det antika Grekland var en demokrati för fria män. Kvinnor och slavar hade ingen rösträtt. I de riken som annekterats av Alexander den store och som senare var delar av romarriket kunde emellertid kvinnor nå höga positioner. I Egypten var t.ex. Kleopatra farao 51–30 f.Kr. Men vetenskapen var en verksamhet för män ur överklassen. Det är därför märkligt att Hypatia blev föreståndare för en skola i Alexandria omkring 400. Det finns inte mycket kvar av Hypatias skrifter men hon är citerad och omnämnd i många källor. Hon var nyplatoniker vilket innebar att hon som Platon ansåg att denna värld är spegelbild av den verkliga idévärlden. Som matematiker arbetade hon tillsammans med sin far **Theon** med att kommentera Euklides *Elementa*, Apollonius böcker om kägelsnitten, Ptolemaios *Almagest* och Diofantos *Arithmetica*. Enligt tongivande matematikhistoriker är det Hypatias och Theons arbete som till stor del ligger till grund för den framställning av *Elementa* som vi har idag.

Kristendomen var sedan år 391 statsreligion och en kristen sekt såg sig hotad av Hypatias lärdom och djupet i hennes vetenskapliga arbete. De ansåg att hon var en hedning och hon mördades 415, enligt vissa uppgifter av en kristen mobb.

Efter romarrikets fall stagnerade utvecklingen inom matematik och naturvetenskap i de kristna länderna kring Medelhavet. En av de mer betydande tänkarna under det första årtusendet var **Boethius** (c:a 480–524). Hans kanske viktigaste verk var *De consolatione philosophiæ*

(”Filosofins tröst”) samt *De institutione musica libri quinque* (”Fem böcker om musik”). Han författade också läroböcker i matematik. Den i aritmetik finns bevarad men den är av dålig kvalitet. Boethius spelade också en viss roll när det gällde att utveckla den utbildning som skulle ges i klostren under namnet *quadrivium* (”De fyra vägarna”) och som bestod av aritmetik, geometri, musik och astronomi. Sådana utbildningar gavs redan under antiken och **Proklos** (411–85), som bl.a. har givit kommentarer till *Elementa*, förklarade de olika delarnas roller på följande sätt:

> ”Pythagoreerna ansåg att all matematik kunde indelas i fyra delar. Den ena halvan gällde kvantitet, den andra storheter och båda halvorna var tvåfaldiga. Kvantiteter kunde ses som egenskaper eller ställas i förhållande till andra kvantiteter. Storheter kunde betraktas i stillhet eller i rörelse. Utifrån detta kunde aritmetiken ses som studiet av kvantiteter, musiken som förhållandet mellan kvantiteterna, geometrin kunde ses som storheter i vila och den sfäriska astronomin som storheter i rörelse.”

Medan matematiken i västvärlden stagnerade under flera sekler efter romarrikets fall så flyttades utvecklingen österut mot arabvärlden.

Hänvisningar till del 2 I avsnitt 13.4.1 behandlas Ptolemaios konstruktion av trigonometriska tabeller och Herons teori om spegling. Pappos *Synagoge* behandlas i avsnitt 13.4.7. Diofantos *Arithmetica* behandlas i avsnitt 14.1.

Figur 2.7: År 387 f.Kr. grundade Platon det som betraktas som det första universitetet. Det har kommit att kallas Platons Akademi och var beläget ungefär 1 mil utanför Aten. Akademin blev ett centrum för utbildning och forskning. Många av antikens stora matematiker har varit verksamma där som Eudoxos och Menaichmos. Hans mest berömda elev var Aristoteles som kom att öppna en egen skola, *Lykeion*. Platons Akademi fungerade som ett lärosäte ända till den slutgiltigt stängdes år 529. Verksamheten kom alltså att vara under drygt 900 år och dess betydelse varierade under den tiden. Bilden är en fresk av **Rafael** i Apostoliska palatset i Vatikanstaten och den kom till 1509–10. De båda personerna i centrum är förmodligen Platon och Aristoteles. (Bild: `3hkLUpa`)

Figur 2.8: Arkimedes var inte bara antikens största matematiker. Hans idérikedom, hans kunskaper och hans förmåga att genomföra komplicerade resonemang och räkningar gjorde honom till en av de främsta genom tiderna. Han var på många sätt långt före sin tid. Han var också en udda person som var omgärdad av många myter. Han har inspirerat många konstnärer till tolkningar av hans person och gärningar. Bilden till vänster visar en målning från 1620 av den italienske barockmästaren **Dominico Fetti** och skildrar den tänkande Arkimedes. Bilden till höger visar Arkimedes död skildrad av den franske målaren **Thomas Degeorge**. Målningen är från 1815. Arkimedes störs av soldaten och yttrar de berömda orden ”Rubba inte mina cirklar”. Soldaten blir irriterad och dödar i vredesmod Arkimedes. Det kom att stå honom dyrt. Hans befälhavare Marcellus, som hade gett uttryckliga order om att Arkimedes inte fick dödas, högg ner soldaten med en yxa. (Bild: `2ZFXEfS`, `2COQqx0`)

Kapitel 3

En islamisk guldålder

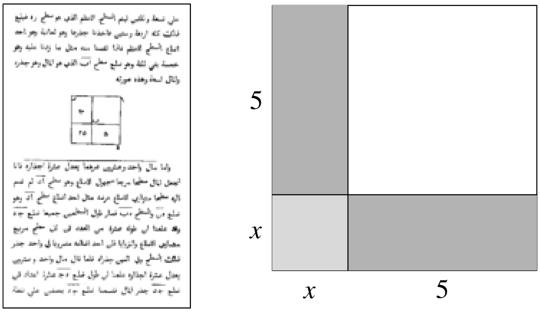
Under de första seklerna efter vår tideräkning var den arabiska halvön bebodd av stammar, som var isolerade från varandra och som bevakade sina revir. Ofta uppstod stridigheter mellan dem. Omkring 630 lyckades **Muhammed** skapa en gemensam stat som efter hand utvidgades och kom att omfatta stora delar av norra Afrika, nuvarande Spanien och ett stort område i Asien från Medelhavet till Indien. Muhammed dog 632 och hans efterträdare kallades kalif, som betyder just efterträdare. Omkring 760 lät den dåvarande kalifens bror bygga en ny stad som skulle bli huvudstad för kalifatet och som fick namnet Bagdad. Nästföljande kalif **Harun al-Rashid** grundade det som skulle kallas *Visdomens hus*. Harun al-Rashid och hans efterföljare hade ett stort intresse för poesi och vetenskap och under en period på nästan hundra år blomstrade studierna vid lärosätet. Intresset för de antika skrifterna var mycket stort och det kulturella arvet från antiken fördes vidare. Senare kalifer hade en mer strikt religiös tro och verksamheten vid *Visdomens hus* betraktades som oislamsk. Det medförde att skolans betydelse avtog och vetenskapen stagnerade. Bagdad fortsatte emellertid att vara ett politiskt centrum till dess det arabiska riket införlivades med det osmanska 1299.

Matematiken utvecklades under den islamiska guldåldern. Verk av Euklides, Arkimedes, Apollonius, Ptolemaios m.fl. översattes till arabiska och det är ofta översättningar till latin av dessa översättningar som ligger till grund för vår kunskap om antikens matematik. Men de arabiska matematikerna utvecklade också nya metoder och teorier. De bröt ny mark och skapade nya områden. De införde och räknade med det decimalsystem som vi nu använder, de intresserade sig för talteori och de utvecklade algebra och trigonometri.

Några av den islamiska guldålderns viktigaste matematiker och något om deras viktigaste arbeten får spegla den tidens vetenskapliga aktivitet.

Al Khwarizmi (c:a 790–850) hette egentligen Abu a'far Muhammad ibn Musa Al Khwarizmi. Namnet antyder att han kom från Khwarizmi en ort i Centralasien som ligger söder om Aralsjön. Det råder delade meningar om det. Vi vet emellertid att han kom till Bagdad och blev lärare vid *Visdomens hus*. Tillsammans med kollegor hade han till uppgift att översätta antika vetenskapliga manuskript till arabiska men de skrev också egna arbeten om astronomi och matematik.

Två av Al Khwarizmis arbeten skrevs antagligen på uppdrag av kalifen **Al Mamun**, åtminstone var de dedikerade till honom. Det ena handlade om astronomi. Det andra var en lärobok i algebra som skulle bli banbrytande och som numera räknas som ett av de viktigaste verken i matematikens historia. Bokens titel är *Hisab al-jabr w'al-muqabalah* vilket betyder ungefär "Beräkning med komplettering och balansering". I den studerar han ekvationer av första och andra graden och ger metoder för att bestämma lösningarna. Metoderna är generella även om han behandlar numeriska exempel. Termerna "al-jabr" och "w'al-muqabalah" betyder alltså "komplettering" respektive "balansering" och motsvarar vad vi kallar "addera till" respektive "subtrahera från" båda leden i en ekvation. Det är från "al-jabr" vi har ordet algebra.



Figur 3.1: Bilden till vänster visar en sida ur *Hisab al-jabr w'al-muqabalah* där Al Khwarizmi behandlar andragradsekvationen. Han redogör först i ord för hur man bestämmer en rot och därefter bevisar han geometriskt att hans metod är korrekt. I bilden till höger skisseras hur han bestämmer lösningen till den andragradsekvation vi idag skriver $x^2 + 10x = 24$. Den grå kvadraten har den obekanta sidan x. De båda svarta rektanglarna har sidorna x och 5 och deras sammanlagda area är $10x$. De skuggade områdena har tillsammans arean $x^2 + 10x$ som är lika med 24. De tre skuggade områdena kompletteras genom kvadraten med sidan 5 till en stor kvadrat med sidan $x + 5$, vars area uppenbarligen är $24 + 25 = 49$. Alltså är $x + 5 = 7$ och $x = 2$. (Bild: `2UQZ2Jy`)

Bokens syfte är att ge hjälpmedel för de praktiska beräkningar som krävs vid t.ex. arvskifte och handel och det framgår också av förordet. Problemen formuleras emellertid abstrakt, något som betonar metodernas generalitet. Metoderna kan användas i helt olika sammanhang. Han illustrerar metoderna med hjälp av geometriska resonemang som ofta går tillbaka till Euklides *Elementa*. I det sista kapitlet återgår han till praktiska problem och visar hur hans metoder kan tillämpas i mer jordnära sammanhang. Al Khwarizmi skrev också ett arbete om det hindu-arabiska decimalsystemet. Det finns bara i en latinsk översättning där översättaren förmodligen har ändrat en hel del. Den latinska titeln är *Algoritmi de numero Indorum*. Al Khwarizmis ursprungliga text bygger i sin tur på ett indiskt verk som omkring 770 överlämnades till hovet i Bagdad av ett politiskt sändebud. I den arabiska versionen introduceras nollan förmodligen för första gången.

Som vi redan nämnt skrev Al Khwarizmi verk om astronomi och han använde sig av resultat av indiska astronomer och från Ptolemaios *Almagest*. Han studerade också geografi och hans arbeten bygger här i stor utsträckning på Ptolemaios. Det är emellertid för sina böcker om aritmetik och algebra som Al Khwarizmi skrivit in sig i matematikens historia. Hans betydelse är kanske många gånger underskattad i västvärlden. I **A. A. A. Daffas** bok *The muslim contribution to mathematics* ges följande citat av **Mohammad Kahn**:

> "– In the foremost rank of mathematicians of all time stands Al Khwarizmi. He composed the oldest works on arithmetic and algebra. They were the principal source of mathematical knowledge for centuries to come in the East and the West. The work on arithmetic first introduced the Hindu numbers to Europe, as the very name algorism signifies; and the work on algebra . . . gave the name to this important branch of mathematics in the European world. . ."

Bröderna Banu Musa (c:a 800–70) Kanske var Al Khwarizmi den tongivande vetenskapsmannen vid *Visdomens hus* men många av hans kollegor bidrog till att göra lärosätet känt. Bland dem var tre bröder Banu Musa. Deras fullständiga namn var Jafar Muhammad ibn Musa ibn Shakir, Ahmad ibn Musa ibn Shakir och al-Hasan ibn Musa ibn Shakir och de var alla födda och uppvuxna i Bagdad. De hade olika specialiteter: Jafar Muhammads arbeten var huvudsakligen inriktade mot geometri och astronomi, Ahmads mot mekanik och al-Hasans mot geometri. Bröderna var framför allt vetenskapsmän men de var respekterade i samhället. Det gällde framför allt den äldste brodern Muhammad som blev anlitad i samhällsfrågor av mer allmän natur.

Deras mest kända arbete handlar om geometri och har den latinska titeln *Liber trium fratrum de geometria and Verba filiorum Moysi filii Sekir* (”En bok om mätning av plana och sfäriska figurer”). Verket är inspirerat av Arkimedes och i hans anda bestämmer de arean av en cirkel och volymerna av en sfär och en cylinder. Men det är inte bara en återgivning av de grekiska texterna. Arkimedes och hans kollegor betraktade förhållanden mellan längder, mellan areor och mellan volymer. Det tal som vi betecknar med π betraktade de som förhållandet mellan en cirkels omkrets och dess diameter. Arkimedes bestämmer förhållandet mellan volymen av en sfär och volymen av en sfär omskriven av en cylinder. För bröderna var längder, areor och volymer tal. Det var ett framsteg. Resonemangen kunde förenklas samtidigt som aritmetik och geometri knöts samman.

Bröderna var intresserade av geometriska konstruktioner och använde dynamiska metoder för att lösa problemet med vinkelns tredelning.

Den mest populära boken var skriven av mellanbrodern och hade titel *Kitab al-Hiyal* (”Boken om tricks”). Den innehöll skisser på över hundra mekaniska anordningar. Där fanns bl.a. konstruktioner av olika slags fontäner, av lampor vars ljus kunde dämpas mekaniskt och av musselöppnare. Många av konstruktionerna var hämtade från grekiska förlagor men de flesta var egna uppfinningar. Bröderna gjorde också astronomiska mätningar och de uppskattade året till 365 dagar och 6 timmar. De engagerades också för konstruktion av kanalsystem.

Efter kalifen Al Mamuns död uppstod motsättningar mellan olika fraktioner inom *Visdomens hus*. Bröderna kom i konflikt med den då tongivande filosofen **Al Kindi** och bidrog till de förföljelser han utsattes för av den dåvarande kalifen **Al Mutawakkil**.

Thabit ibn Quarra (836–901) var från Harrar i södra Turkiet och hans fullständiga namn var Al Sabi Thabit ibn Quarra al-Harrani. Hans familj var förmögen och hade stort inflytande i samhället. Thabit var medlem i en sabiansk sekt som dyrkade stjärnorna och det var naturligt att han började studera astronomi.

Den äldste av bröderna Banu Musa, Muhammad, besökte Harrar och blev imponerad av Thabits språkkunskaper och övertalade honom att flytta till Bagdad där bröderna gav honom lektioner i matematik. Han studerade också medicin vilket var vanligt för den tidens akademiker. Efter studierna återvände han till Harrar men hans liberala idéer ledde till att han inför en religiös domstol tvingades ta tillbaka sin ”villfarelser”. För att undgå ytterligare förföljelser lämnade han Harrar och anställdes som chefsastronom i Bagdad av den dåvarande kalifen **Al Mutadid**.

Thabit gav bidrag inom många områden som logik, psykologi, etik, vetenskapsteori, statskunskap och religion. Han skrev om det syrianska språkets grammatik och om sabiaternas seder. Det var emellertid inom matematik, astronomi och mekanik som han gjorde sina viktigast arbeten. Han reformerade Ptolemaois system för planetrörelserna och han gav en grund för teorin för kroppar i vila d.v.s. statiken.

Inom matematiken utvecklade han talteorin och intresserade sig speciellt för s.k. vänskapliga tal. Två tal är vänskapliga om summan av delarna till det ena talet är lika med det andra och vice versa. Exempel på vänskapliga tal är 220 och 284. Delarna till 220 är 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 och 110 och summan av dem är 284. Delarna till 284 är 1, 2, 4, 71, och 142 och deras summa är 220. Thabit ger ett tillräckligt villkor för att två heltal är vänskapliga och hans arbete vittnar om både originalitet och djupa kunskaper om de hela talen. Han studerar förhållanden mellan tal och han knyter dem till förhållanden mellan geometriska storheter och därigenom utvidgar han talbegreppet i samma riktning som bröderna Banu Musa. Han studerar magiska kvadrater, han diskuterar vinkelns tredelning, han ger en slags generalisering av Pythagoras sats till godtyckliga trianglar och han undersöker parabelns egenskaper. Han beräknar arean av ett parabelsegment med metoder som liknar Arkimedes och som förebådar integralkalkylen. Förmodligen hade inte Thabit tillgång till Arkimedes verk om parabeln. Hans metoder är väsentligen desamma men skiljer sig åt när det gäller detaljer.

Thabit var en av de största matematikerna i arabriket under medeltiden. En av hans söner och en av hans sonsöner gick i Thabits fotspår. De lämnade båda bidrag till den matematiska vetenskapen men de nådde aldrig Thabits höjder.

Alhazen (965–1039) eller Abu Ali al-Hasan ibn-al-Haythnam som var hans fullständiga namn föddes troligen i Basra. Namnet Alhazen är en latinisering av al-Hasen. Han tjänstgjorde från början som tjänsteman och utnämndes till minister med ansvar för Basra och dess omgivningar. De olika religiösa skolor som han kom i kontakt med fick honom att vända sig bort från religionen och han kom att ägna sig helt åt vetenskap. Så småningom flyttade han till Kairo, som då var huvudstad i den del av Egypten som behärskades av fatimiderna – en gren av det shiitiska islam som tagit namnet från Muhammeds dotter **Fatima**.

I Kairo utvecklade Alhazen en metod att reglera Nilens översvämningar och kalifen **Al Hakim** beordrade honom att tillämpa sina teorier i verkligheten. Alhazen förstod emellertid efter en tid att hans idéer inte var tillämpar och han återvände till Kairo och meddelade kalifen vad han kommit fram till. Al Hakim blev besviken och slutade stödja Alhazen vetenskapliga arbete. Han gav honom istället en administrativ tjänst. Alhazen insåg att Al Hakim var farlig och han ville inte arbeta under honom. För att slippa det spelade han galen och blev satt i husarrest. Under den tiden kunde han i hemlighet ägna sig åt vetenskap. När Al Hakim dog 1021 lyckades Alhazen bevisa att hans galenskap bara var spelad. Han var fri att arbeta som vetenskapsman igen och hans arbeten kunde ges ut – både de han skrivit under sin husarrest och de som han skrivit efter den.

Alhazen gav ut många arbeten om fysik och matematik. Ett problem som än idag går under namnet *Alhazens problem* gäller optik och kan formuleras på följande sätt:

> En ljuskälla och en sfärisk spegel är givna. Bestäm den punkt på spegeln där ljuset reflekteras till en observatör.

Problemet kan lätt formuleras geometriskt och leder till en fjärdegrads-ekvation. Det formulerades från början av Ptolemaios och Alhazen löste det i den femte delen i hans stora bok om optik *Kitab al-Manazir*. Han använder sig av geometriska metoder där kägelsnitt spelar en avgörande roll.

Inom matematiken försökte Alhazen som så många andra att lösa problemet med kubens fördubbling och han använde sig av de månformade områden som bildas då två cirklar skär varandra. Han planerade att i ett arbete som omfattade två delar lösa själva grundproblemet. Den första delen publicerades men någon andra såg aldrig dagens ljus. Förmodligen insåg

Alhazen att han inte klarade problemet. Möjligen kan han ha misstänkt att problemet är olösbart.

Ett område som intresserade Alhazen var talteori och han kom fram till anmärkningsvärt djupa resultat. Han använde sig av den sats som i våra dagar kallas *Wilsons sats* och som säger att om p är ett primtal så är $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (p-1) + 1$ delbart med p. I Europa formulerades satsen av **John Wilson** 1770 och den bevisades av den franske matematikern **J. L. Lagrange** 1771. Alhazen studerade också perfekta tal och försökte karakterisera dem. Han försökte att förbättra resultat som finns hos Euklides men det verkar emellertid som han misslyckats.

Ett av hans verk handlar om analys och syntes vid problemlösning. Grekerna behandlade dessa frågor när det gällde geometriska konstruktioner och geometrisk problemlösning. Alhazen utvidgade resonemangen till frågeställningar och problem inom algebran.

Alhazens arbeten var i många avseenden banbrytande. Vi har nämnt hans stora arbete i optik och hans matematiska metoder som kombinerade algebra och geometri. Han förde vetenskapen framåt genom att införa kontrollerade experiment och genom att införa hypoteser och induktiva härledningar. Totalt uppgår hans samlade verk till omkring 200 titlar. I det medeltida Europa kallades han ”den andre Ptolemaios”. Han gav också ut ett arbete om teologi och han beskriver sin religion på följande sätt:

> ”Jag har alltid sökt kunskap och sanning, och det blev min övertygelse att, för att se skimret av och uppleva närheten till Gud, finns det inget bättre sätt än att söka just kunskap och sanning.”

Omar Khayyam (1048–1131) får avsluta vår korta genomgång av matematiker under den islamiska guldåldern. Hans fullständiga namn var Ghiyath al-Din Abu’l-Fath Umar ibn Ibrahim Al-Nisaburi al-Khayyami. Hans far Ibrahim var tältmakare som på persiska är al-Khayyam.

Omar Khayyam föddes och växte upp i staden Naishapur i provinsen Khosaran i nordöstra Iran under en tid av politisk instabilitet. En turkisk stam seldjukerna hade erövrat Khosaran och därmed lagt Bagdad under sig samt etablerat en strängt ortodox muslimsk stat under en militärregim. Khayyam studerade filosofi och han utmärkte sig genom sin skarpsinnighet. Men även för så framgångsrika studenter som Khayyam innebar det politiska klimatet en påfrestning. Han klagade över ”nyckfulla problem som hindrade honom i hans studier”. Han lyckades emellertid under tiden i Naishapur skriva en bok om aritmetik, en om musik och en om algebra.

År 1070 flyttade han till Samarkand där han fick ekonomiskt stöd och det var under den tiden han skrev sitt kanske mest berömda matematiska verk. En svensk översättning av titeln är ”Avhandling om bevis av problem i algebra”. Han blev emellertid redan efter några år i Samarkand inbjuden till staden Esfahan som den dåvarande kalifen ville göra till huvudstad. Han byggde där upp ett astronomiskt observatorium och flera andra ledande astronomer knöts till verksamheten. Under 18 år ledde Khayyam den vetenskapliga verksamheten i Esfahan och under den tiden utarbetade han och hans medarbetare astronomiska tabeller och de bidrog till en kalenderreform. Det var en period av politiskt lugn och Khayyam kunde arbeta under gynnsamma omständigheter.

Politiska händelser 1092 kom att ändra förutsättningarna och innebar slutet på en för Khayyam fredlig och kreativ period. Stödet till observatoriet upphörde och hans kalenderreform ifrågasattes. Han blev trots allt kvar i Esfahan och försökte återfå de förmåner han haft. Han skrev bl.a. historiska verk förmodligen för att behaga makthavarna. Omkring 1120 flyttade han emellertid till Merv, som ligger i nuvarande Turkmenistan. En ny kalif hade gjort staden till seldjukernas huvudstad. Där verkade han till sin död 1131.

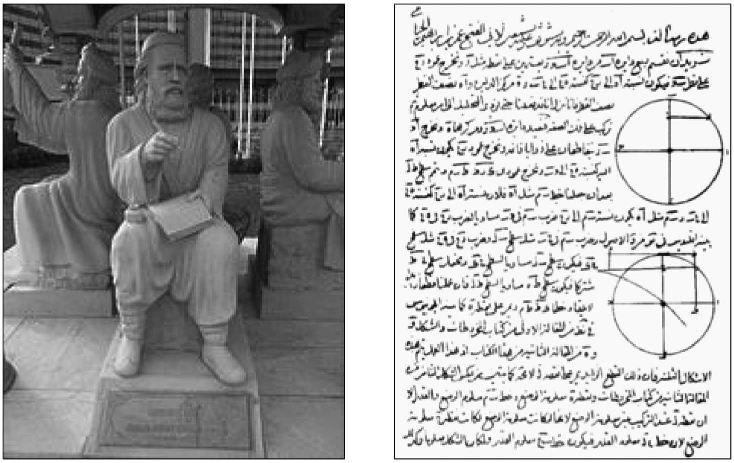
Vi har tidigare nämnt att Khayyam skrivit en bok om aritmetik och en om algebra, där den om algebra är nyskapande, men naturligtvis arbetade han inom fler områden. Några av hans viktigaste insatser inom matematiken är följande:

- En geometrisk lösning av tredjegradsekvationen med hjälp av kägelsnitt. Khayyam visade hur man kan konstruera lösningen av en tredjegradsekvation som en skärningspunkt mellan kägelsnitt. Han kombinerar på ett sinnrikt sätt algebra med geometri.

- Beräkning av binomialkoefficienter.

- Bestämning av kvadratrötter, kubikrötter, rötter av fjärde graden, o.s.v.

- Diskussion av Euklides axiomsystem. Är det femte axiomet, som nu kallas *parallellaxiomet*, oberoende av de andra? Khayyam förkastade de tidigare försöken till bevis av parallellaxiomet och han godtog inte heller s.k. dynamiska resonemang. Det verkar som han intuitivt anade att det inte fanns något bevis och att de fem axiomen är oberoende av varandra – något som skulle bevisas i början av 1800-talet.



Figur 3.2: Bilden till vänster visar statyn av Omar Khayyam utanför FN:s högkvarter i Wien. Bilden till höger är en sida ur Khayyams bok om algebra där han visar hur man kan konstruera lösningarna till tredjegradsekvationer med hjälp av kägelsnitt. I den undre figuren kan man förutom cirkeln och räta linjer se en del av en hyperbel. (Bild: `3fzfdTO`)

Khayyam var en av de mest inflytelserika vetenskapsmännen under den islamiska guldåldern och det finns många minnesmärken över honom. Han står staty i sin hemstad Neishapur, utanför FN:s högkvarter i Wien, utanför Oklahoma University och i Florens. Han fick år 1970 en månkrater uppkallad efter sig. Men även om Omar Khayyam var en stor vetenskapsman så är det nog som poet de flesta känner till honom. Hans diktsamling *Rubaiyat* (”Fyrradingar”) är översatta till engelska och har en stor läsekrets världen över. Den har också flera gånger översatts till svenska. Även om dikterna har lästs och läses i många länder och då kanske främst av kännare så är det i Mellanöstern de har en folklig förankring. Jag minns när jag för många år sedan föreläste om Omar Khayyam och en av mina studenter med rötter i Iran kom fram och visade en bonad med en dikt av Khayyam. Den hade hängt i hans barndomshem. Vi avslutar avsnittet om Khayyam med en av hans fyrradingar. Den har inte med matematik att göra men den visar att Khayyam var en muslim som hade en frigjord syn på det goda i jordelivet.

> ”En bok, ett krus och dig,
> som jag har kär,
> till paradis förvandlas ödemarken –
> så mycket paradis som jag begär.”

Hänvisningar till del 2 Al Khwarizmis lösnings av andragradsekvationen och Omar Khayyams lösning av tredjegradsekvationen behandlas i avsnitten 14.2.1 respektive 14.2.2. Thabit ibn Quarras och Alhazens talteoretiska resultat kommenteras i avsnitt 17.1.2.

Figur 3.3: *Visdomens hus*, som var beläget i Bagdad, var ett kulturellt och vetenskapligt centrum under den islamiska guldåldern. Det grundades under 700-talet av kalifen Harun al-Rashid och hade sin storhetstid under hans son kalifen al-Mamun och dennes efterträdare. I *Visdomens hus* fanns ett stort bibliotek och en viktig del av verksamheten utgjordes av översättning av antika skrifter av t.ex. Pythagoras, Euklides och Hippokrates. Några av de mest kända matematikerna under den islamska guldåldern var verksamma vid *Visdomens hus* som Al Khwarizmi, bröderna Banu Musa, Thabit ibn Quarra och Omar Khayyam. Verksamheten vid *Visdomens hus* varade ända till 1258 då det förstördes av mongolerna i samband med deras belägring av Bagdad. Bilden visar vetenskapsmän vid biblioteket och är en illustration av **Yahyá al-Wasiti** från 1237. (Bild: `3eNl3Am`)

Figur 3.4: Al Khwarizmi är portalfiguren för matematiken under den islamiska guldåldern. Bilden till vänster visar en staty av honom vid Amir Kabir-universitetet i Teheran och i mitten visas ett sovjetiskt frimärke från 1983. Al Khwarizmi var en av dem som banade väg för vårt decimalsystem med de hindu-arabiska siffrorna och från hans namn kommer ordet ”algoritm”. Hans verk *Hisab al-jabr w’al-muqabala* är epokgörande och utgör en startpunkt för algebran. Ordet algebra kommer från ”al-jabr”. Verket skrevs ungefär 820 och översattes till engelska 1831 av Frederic Rosen. Ett nytryck från 2016 visas på bilden till höger. (Bild: `39dfkCH`, `3fPCl1a`, `2ZFY6e4`)

Kapitel 4

Matematiken i medeltidens Europa

Efter romarrikets fall kämpade den katolska kyrkan om makten i olika delar av Europa. Frankerna hade tidigt varit kristna men äldre religioner började få fäste bland dem. Saxarna i norra Tyskland var fortfarande hedningar. Spanien var muslimskt och sökte utvidga sina gränser norrut. Från öster närmade sig nomadiska stammar med egna religioner. I Italien stred den katolska kyrkan mot langobarderna – en germansk stam som förmodligen bekände sig till asatron. Under slutet av 700-talet blev Karl I kung i Frankrike. Genom segerrika fälttåg skapade han ett rike som omfattade Frankrike, stora delar av Centraleuropa samt norra Italien. Kristendomen infördes och år 800 kröntes Karl till kejsare av Rom av påven **Leo III** och fick namnet Carolus Augustus – den store fredsbringande kejsaren av Rom. I historieböckerna kom han att kallas **Karl den store**. Efter sin död kom hans stora välde att splittras och den politiska makten kom att flyttas till påvestolen i Rom.

Mycket av den vetenskapliga verksamheten och skolundervisningen kom att äga rum kring kloster och kyrkor. Katedralskolor bildades där man undervisade i första hand i teologi men också i de fria konsterna. De bestod av ett grundläggande trivium, som omfattade grammatik, dialektik och retorik, samt ett mer avancerat quadrivium med aritmetik, musik, geometri och astronomi. Utifrån katedralskolorna bildades de första universiteten med bl.a. Platons Akademia som förebild. Det första universitetet anses vara det i Bologna som troligen grundades 1088. Därefter bildades universiteten i Paris (1150), Oxford (c:a 1167), Modena (1175) och Cambridge (1209). Universiteten hade fyra fakulteter som var hierarkiskt ordnade. Främst var teologi och därefter i ordning juridik, medicin och filosofi. Filosofiska fakulteten innefattade de fria konsterna.

Det fanns också naturliga kontakter mellan det kristna Europa och det islamiska väldet. Spanien var muslimskt och närheten till Nordafrika innebar att förmögna studenter från Italien och södra Frankrike kunde söka sig dit för att ta del av den muslimska kultur och vetenskap som skapats under den islamiska guldåldern.

Även om det fanns ett starkt bildningsintresse inom kyrkan bland furstar så måste man konstatera att matematiken inte var högprioriterad. Det var den teologiska fakulteten som ansågs vara den främsta och viktigaste. Men inom skol- och universitetssystemet genomfördes arbeten och utvecklades tankar som skulle vara betydelsefulla för det som skedde senare under 1500- och 1600-talen inom matematik och naturvetenskap. Vi vill nämna tre exempel.

- Flera viktiga verk översattes från arabiska till latin och bland dem klassiska antika verk som tidigare hade översatts från grekiska till arabiska.
- Vårt decimalsystem med de hinduarabiska siffrorna introducerades. Det tog dock några sekler innan de helt slog igenom inom vetenskap och handel.
- De flesta intellektuella bekände sig till Aristoteles teorier om universum. Hans uppfattning kom att sanktioneras av den katolska kyrkan men det fanns kritiska röster som banade väg för en annan världsbild som fick sin slutgiltiga form med **Copernicus**, Kepler, Galilei och Newton. En världsbild som beskrevs med matematik och som i sin tur kom att utveckla matematiken.

Några av de tänkare och vetenskapsmän och deras arbeten får belysa matematikens utveckling i det medeltida Europa.

Adelard (1075–1160) föddes i Bath i England. Han studerade teologi och var också lärare i Laon i norra Frankrike. Han lämnade Frankrike för att studera medicin i Salerno, som ligger sydost om Neapel. Undervisningen där hade mycket gott anseende och av många betraktade medicinutbildningen i Salerno som det första moderna universitetet. Efter studierna i medicin reste Adelard till Sicilien och fortsatte därefter till Cilicia i Anatolien som idag är en del av Turkiet. Så småningom återvände han till sin födelseort Bath.

Efter sina resor blev Adelard expert på arabiska och han översatte flera viktiga verk från arabiska till latin bl.a. *Elementa*. Hans översättning av *Elementa* skulle bli den viktigaste läroboken i geometri i västvärlden under en mycket lång tid. Han översatte också Al Khwarizmis astronomiska tabeller och skrev böcker om aritmetik. En av dem skall vara influerad av Al Khwarizmis arbete.

Adelard bidrog också med egna verk och då framför allt inom filosofi. Han skriver att han ”föredrar förnuft framför auktoritet” och detta har präglat hans arbeten.

Gherard av Cremona (1114–87) var, som namnet anger, född i Cremona i Italien. Han fick sin utbildning i Italien men ansåg att den europeiska utbildningen var för begränsad och ville därför göra den rika arabiska bildningen tillgänglig för Europa. Han flyttade till Toledo i Spanien där han arbetade med att översätta arabiska skrifter till latin. Hans kanske viktigaste insats var att översätta den arabiska översättningen av Ptolemaios *Almagest* till latin. Den upplaga vi har idag kom ut 1175.

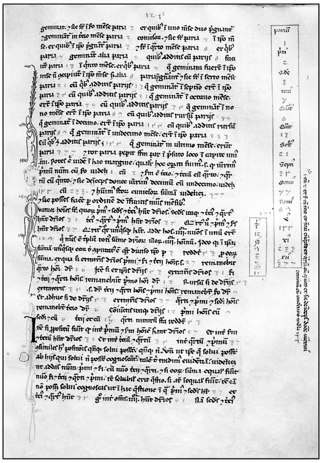
Gherard översatte också arbeten av bröderna Banu Musa, av Thabit ibn Quarra och gjorde också en latinsk översättning av *Elementa*. Han blev kvar i Toledo till sin död 1187.

Fibonacci (c:a 1170–c:a 1250) egentliga namn var Leonardo av Pisa. Fibonacci var hans smeknamn och han var son till **Guglielmo Bonacci**. Han kallade sig själv ofta för Bigollo som betyder resande eller ”bra-på-ingenting”.

Figur 4.1: Fibonacci eller Leonardo av Pisa. (Bild: 37DG2Dw)

Fibonacci var född i Italien men studerade bl.a. matematik i Nordafrika, närmare bestämt i staden Bougi, där hans far var diplomat och representerade handelshusen i Pisa. Bougi heter nu Balaja och är Algeriets port till Medelhavet. Tillsammans med fadern företog han resor i Mellanöstern där han upptäckte de stora fördelarna med det positionssystem med de hindu-arabiska siffrorna som användes där. Systemets effektivitet vid handel, speciellt när det gällde redovisning, imponerade på Fibonacci.

Fibonacci skrev antal viktiga böcker efter det att han hade återvänt hem år 1200. Den mest kända är *Liber Abaci* (”Boken om räkning”) som kom ut 1202 och som är en av de mest betydelsefulla böckerna i matematikens historia. I det första kapitlet introducerar han vårt decimalsystem med de hindu-arabiska siffrorna. I det andra tillämpar han just detta på problem som rör handel. Det tredje kapitlet ägnas åt problem av mer talteoretisk natur. Där finns bland annat hans berömda kaninproblem som ger upphov till den talföljd som uppkallats efter honom. Där finns problem som handlar om perfekta tal, aritmetiska serier och geometriska serier.



Figur 4.2: Figuren visar en sida ur *Liber Abaci*. I marginalen hittar man talföljden 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377. Ett tal i följden fås genom att addera de två föregående. Talen kallas nu för *Fibonaccital* och i *Liber Abaci* exemplifierar de en form av tillväxt, nämligen hur antalet kaninpar förökas. Talen hade studerats långt tidigare i indiska skrifter. (Bild: 3eaZfyV)

Liber Abaci är Fibonaccis mest kända verk men han gav också ut andra arbeten som vittnar om hans stora matematiska talang. I *Practica geometriæ* presenterar och bevisar han geometriska satser i Euklides anda, men han visar också hur resultaten kan tillämpas i praktiken. I *Flos*[1] studerar han bl.a. en speciell tredjegradsekvation och visar hur man kan approximera en lösning till den. Han konstaterar att lösningen inte kan vara ett rationellt

[1]Flos är latin för ”blommor” eller ”blomster”. Varför Fibonacci valde denna titel är svårt att säga. Kanske var innehållet en bukett av goda idéer.

tal och inte heller kvadratroten ur ett rationellt tal. Därför nöjer han sig med att bestämma en approximation av lösningen. Hans teknik visar att han bör ha känt till Omar Khayyams arbeten.

Verket *Liber quadratorum* ("Boken om kvadrattal"), där Fibonacci studerar kvadrattal, är till sin karaktär talteoretiskt. Han bevisar t.ex. att skillnaden mellan två fjärdepotenser aldrig är ett kvadrattal samt att skillnaden mellan två tals kvadrater och summan av samma kvadrater inte båda kan vara kvadrater. Fibonacci visar i detta arbete prov på både kunskap och kreativitet. I *Encyklopaedia Brittanica* står det: "*Liber quadratorum* placerar Fibonacci som den viktigaste talteoretikern mellan Diofantos och Fermat".

Fibonacci är den främste matematikern under medeltiden. Han tillgodogör sig den arabiska matematiken, han är den förste som ger en utförlig framställning av vårt decimalsystem, han visar hur matematiska teorier kan tillämpas på praktiska problem och han ger viktiga bidrag till talteorin.

Roger Bacon (1214–92) föddes i Ilchester i Somerset i England. Hans föräldrar var välbärgade godsägare och kunde därför bekosta sonens utbildning. Redan vid 13 års ålder skrevs han in vid universitet i Oxford men hade förmodligen dessförinnan lärt sig grunderna i latin och aritmetik av prästen på hemorten.

Figur 4.3: Roger Bacon. (Bild: 37C0vZq)

I Oxford studerade han först trivium och sedan quadrivium. Efter magisterexamen började han undervisa och kom att bli expert på Aristoteles läror.

Vid universitetet i Paris hade det under en tid varit förbjudet att studera Aristoteles, eftersom han inte var kristen, men omkring 1240 återinfördes studiet av Aristoteles i universitetets kurser och hans läror blev dogm. Ryktet om Bacons kunskaper hade nått Paris och han anställdes vid universitetet där. Han kom under en tid att växelvis arbeta i Oxford och i Paris. Bacon hade hittills inte varit speciellt intresserad av naturvetenskap och matematik men i Paris träffade han **Peter Peregrinus**, som hade ett stort intresse för naturvetenskap och som hade gjort experiment om magnetism. Detta kom att påverka inriktningen av Bacons arbete. Han kom under sin tid vid universiteten i Oxford och i Paris i kontakt med skrifter, både från antiken och från arabiska vetenskapsmän som Alhazen.

År 1256 eller 1257 drog sig Bacon tillbaka från universitetet och blev munk i Franciskanerorden. Det berodde förmodligen på de politiska oroligheterna i England, som medförde att hans föräldrars förmögenhet konfiskerades och Bacon saknade därmed ekonomiskt stöd. Han fortsatte sina studier i klostret trots att han motarbetades av ledningen. Tidvis var han helt isolerad från omvärlden. Under 1260-talet kom han emellertid i kontakt med biskopen i Narbonne som senare blev påve under namnet **Clemens III**. Med stöd av påven kunde han öppet fortsätta sitt vetenskapliga arbete och han gav ut ett antal stora verk. När Clemens III dog blev Bacons skrifter emellertid förbjudna och han sattes i fängelse där han lär ha tillbringat sina sista år.

Bacons viktigaste verk är hans *Opus majus* som består av sju kapitel. Ett av kapitlen ägnas åt matematik och i det sammanhanget tar han upp bristerna i den dåtida julianska kalendern. I ett annat kapitel behandlar han optik där han utnyttjar bl.a. Alhazens resultat och utvidgar dem till att behandla ögats anatomi och fysiologi. I verket diskuterar han experimentella metoder inom vetenskapen. Han beskriver tillverkning av krut, han beskriver storlek och position av himlakroppar och han förutser framtida tekniska uppfinningar som mikroskop, teleskop, flygmaskiner och ångbåtar. I *Opus majus* finns också avsnitt som behandlar alkemi och magi.

Matematiken var fundamental för Bacon. I *Opus majus* skriver han:

> ”Matematiken är dörren och nyckeln till naturvetenskaperna.”

Nationalencyklopedin beskriver Bacons syn på vetenskap på följande sätt:

> ”Matematiken sågs som idealvetenskap som genom strikt bevisföring gav deduktiv kunskap. Den skulle kompletteras genom empirisk kunskap, bl.a. i form av experiment och verifikation.”

Ungefär 350 år senare skulle en av de största vetenskapsmännen någonsin, Galileo Galilei, ge uttryck för samma vetenskapssyn och den var kontroversiell även då. Bacons vetenskapliga arbeten mötte starkt motstånd från kyrkan och de var inte heller i linje med den tidens akademiska anda. Bacon blev häcklad men också hyllad för sina stora kunskaper. Hans samtid kallade honom för ”doctor mirabilis” eller ”den förunderlige läraren”.

Nicolas Oresme (1323–82) kom ursprungligen från Normandie i Frankrike. Han studerade vid universitetet i Paris för den då berömde filosofen och logikern **Jean Buridan** (1295–1363). Han tog en magisterexamen i teologi 1355 och fortsatte som lärare vid universitetet då han blev god vän med Frankrikes kronprins **Charles**. År 1362 blev han domkyrkopräst vid katedralen i Rouen och sedan också vid Saint-Chapelle i Paris. När Charles blev kung 1364 blev Oresme hans rådgivare och undervisade honom i bl.a. ekonomi. Han översatte också flera av Aristoteles verk från latin till franska.

Figur 4.4: Nicolas Oresme. (Bild: `3e6zmk5`)

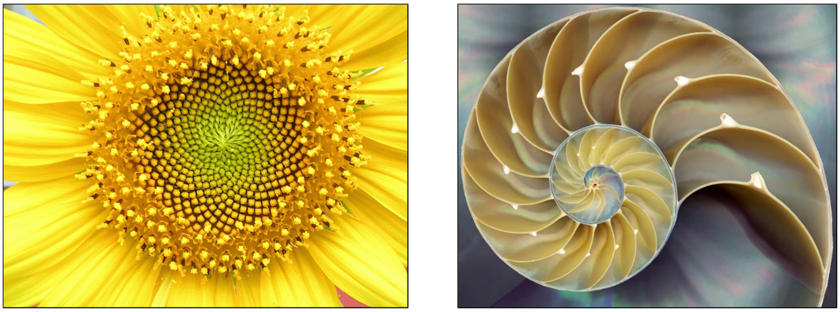
Oresme hade alltså grundliga kunskaper om Aristoteles verk, vilka under denna tid inte var ifrågasatta. Oresme kritiserade emellertid en del av Aristoteles idéer. Han godtog inte Aristoteles definition av tid och inte heller hans definition av läget av en kropp.

Som matematiker var Oresme nyskapande. Han uppfann en typ av koordinatsystem. I arbetet *Tractatus de configurationibus qualitatum et motuum* (”En avhandling om åskådliggörande av kvaliteter och rörelser”) visade han hur man kunde åskådliggöra en tabell av värden med hjälp av en graf. Han föreslog att man skulle använda just grafer för att visa hur två varierande storheter beror av varandra. Detta var nästan 300 år innan Descartes införande av analytisk geometri. Det är inte omöjligt att Descartes kände till Oresmes arbete. Oresme visade också att en likformigt accelererad kropp på en given tid tillryggalägger samma sträcka som en kropp som rör sig med en konstant hastighet, vilken är lika med den förstnämndes hastighet efter halva den givna tiden. Denna regel utnyttjade senare Galilei när han skulle beskriva en kropps rörelse vid fritt fall. I arbetet *De proportionibus proportionum*, ”Om förhållande mellan förhållanden”, införde Oresme brutna exponenter, dock inte i den form vi nu känner. Han visade också att den oändliga serien $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots$ divergerar.

I ett av hans sista verk *Livre du ciel et du monde* från 1377 ifrågasätter Oresme Aristoteles teori om att jorden är universums medelpunkt och att planeterna rör sig kring den. Detsamma skulle Copernicus göra 200 år senare. I slutet av boken förkastar emellertid Oresme sina egna tankar och bekänner sig trots allt till Aristoteles idéer.

I flera av Oresmes arbeten ifrågasätts Aristoteles, en av den tidens vetenskapliga auktoriteter, men det verkade inte ha skadat Oresmes anseende inom kyrkan. Han tog visserligen tillbaka en del av kritiken mot Aristoteles, men den blev dock ändå framförd. Det ligger nära till hands att tro, att den priviligierade ställning han hade med nära band till hovet och till kyrkliga auktoriteter, skyddade honom.

Hänvisningar till del 2 Fibonaccis *Liber Abaci* behandlas i avsnitt 12.4.1. I avsnitt 15.1 ges Oresmes bevis för att serien $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \ldots$ är divergent.



Figur 4.5: Fibonacci är den mest betydelsefulle matematikern i Europa under medeltiden. Hans *Liber Abaci* har betytt mycket för matematikens praktiska tillämpningar. Han studerar också där mer teoretiska samband och inför det vi nu kallar Fibonaccital – en följd av tal där varje tal är summa av de båda föregående. Utgångspunkten är hur antalet kaninpar växer under en följd av månader. Exemplet känns en aning artificiellt men faktum är i många fall leder utveckling i naturen till Fibonaccital. Det kan gälla antalet frön i en solros. Tillväxten sker också i en spiral som kan anas i bilden. Detsamma gäller för tillväxten av en snäcka. (Bild: `2OB5HUO`, `39btdB9`)

Kapitel 5

1400-talet

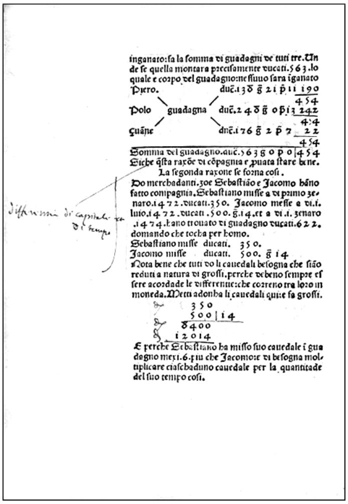
Ett antal långdragna krig kom att dominera Europa under stora delar av 1400-talet. Hundraårskriget mellan England och Frankrike avslutades med slaget vid Castillon år 1453. Frankrike stod som segrare och England förlorade alla sina besittningar på fastlandet förutom Calais. I England rasade rosornas krig mellan adelsätterna York och Lancaster. I Böhmen stred anhängare av reformatorn **Jan Hus** mot landets kung, som i sin tur stöddes av påven. Detta krig varade mellan 1419 och 1436.

Det osmanska riket, som hade bildats under 1200-talet, erövrade Konstantinopel 1453 och därmed föll de sista resterna av det romerska riket. Sidenvägen mellan Europa och Asien stängdes. I försöken att hitta en sjöväg till Indien kom **Christoffer Columbus** som förste europé till Amerika 1492. och **Vasco da Gama** genomförde en resa till Indien 1497–99.

Under 1400-talet inleds renässansen i Italien. Intresset för antikens vetenskap och kultur har visserligen funnits under medeltiden, men nu tar den fart på allvar. Bankväsendet har byggts upp och rika köpmanshus som Medici med ett stort intresse för kultur stöder verksamheten. Konst och arkitektur blomstrar och boktryckarkonsten, som uppfanns av **Johan Gutenberg** 1445, gör det möjligt att på ett helt annat sätt än tidigare sprida vetenskaplig litteratur. Tidigare har latin varit det gängse skriftspråket. Nu börjar allt fler verk skrivas på nationalspråk.

Det bildningsideal, som utvecklades under renässansen, betonade bredd istället för specialisering. En renässansmänniska skulle vara mångkunnig. Man skulle tala flera språk, spela flera instrument och skriva poesi. Universalgenier, som var experter inom många områden, hade högt anseende. Prototypen för universalgeniet är **Leonardo da Vinci** (1452–1519). Han var verksam som konstnär, arkitekt, ingenjör, uppfinnare, matematiker, naturforskare, musiker och filosof.

Inom matematiken får vårt decimalsystem något av ett genombrott då en rad läroböcker ges ut. Den äldsta upptäcktes i Treviso. Den är från 1478 och har titeln *Larte de labbacho* eller ”Konsten att räkna”. Eftersom själva titelbladet saknas så är författaren okänd. Den går under namnet *Trevisoaritmetiken* och i figur 5.1 visas en sida ur boken där man bl.a. kan skönja olika uppställningar. *Trevisoaritmetiken* skulle följas av ytterligare räkneläror och matematiken kunde tack vare boktryckarkonsten komma fler till godo. Positionssystemet med de hinduarabiska siffrorna och deras algoritmer blir tillgängligt, inte bara för den intellektuella eliten. Systemet visade sig effektivt inom handeln men det skulle dröja ännu några århundraden innan det det skulle bli accepterat fullt ut. De nya algoritmerna kämpade med de gamla verktygen som byggde på olika former av abacusar – en typ av kulramar. Multiplikationstabellen var långt in på 1600-talet inte en allmän kunskap inte ens bland den akademiska eliten. De första räknelärorna på svenska gavs ut omkring 1600.



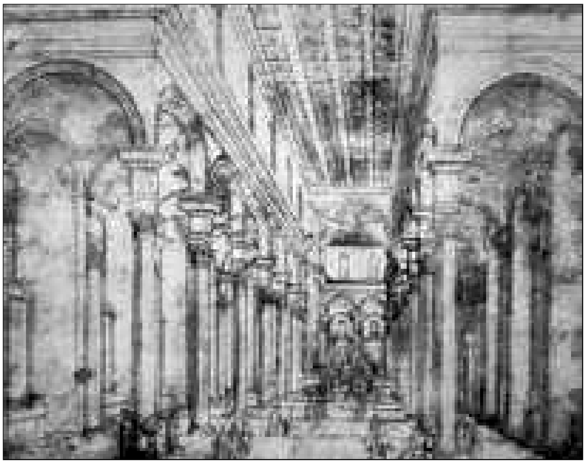
Figur 5.1: En sida ur Trevisoaritmetiken. (Bild: `2YNKg7T`)

Ett annat område inom matematiken som förnyades under renässansen var geometrin. Inom måleriet uppfanns perspektivet och det skulle bli basen för en ny gren av geometrin som skulle komma att utvecklas under 1600-talet och då kallas *projektiv geometri*. Det kanske mest kända konstverket som utnyttjar systemet för perspektivavbildning är Leonardo da Vincis *Nattvarden*, som visas i figur 5.2.

Figur 5.2: Leonardo da Vincis *Nattvarden*. (Bild: `3ecXjGa`)

Det var Italien som var centrum för den matematiska utvecklingen. Det var där de första läroböckerna skrevs och det var italienska arkitekter och målare som skulle lägga de matematiska grunderna till teorin för proportions- och perspektivlära. Det fanns emellertid också viktig matematisk verksamhet i andra delar av Europa, inte minst i fransk- och tysktalande områden. Vi illustrerar den matematiska utvecklingen under 1400-talet med korta redogörelser för sex personer och deras insatser inom matematiken. Tre av dem är konstnärer och tre kan karakteriseras som matematiklärare. Tre kommer från Italien, två från Tyskland och en från Tyskland.

Filippo Brunelleschi (1377–1446) härstammade från Florens. Hans far var tjänsteman och hans mor var släkt med inflytelserika familjer i Florens. Filippo utbildade sig till guldsmed men kom efter en tid att intressera sig för arkitektur. Han tillbringade många år i Rom och gjorde skisser av antika byggnader som badhus, amfiteatrar, basilikor och tempel. För honom var det ett sätt att lära sig och förstå principerna bakom byggnadsverken för att sedan själv kunna använda dem. Det var ett sätt att utveckla sina ingenjörskunskaper som han senare kom att tillämpa dem på en rad projekt.



Figur 5.3: Brunelleschi skiss till Santo Spirito-basilikan i Florens. Perspektivet är tydligt. (Bild: `3e6zL65`)

År 1419 fick Brunelleschi i uppdrag att konstruera kupolen till katedralen i Florens, Santa Maria del Fiore. Han lät uppföra den utan bärande byggställningar vilket var revolutionerande på den tiden. Den var så gott som färdig då Brunelleschi dog 1446. Förutom kupolen till katedralen i Florens, som kanske är Brunelleschis mest berömda byggnadsverk, var han också arkitekten bakom det berömda Pazzikapellet, som ligger intill det som anses var det första klostret och det är beläget i södra delen av Florens. Han ritade också loggian till Ospedale degli Innocenti (”Hittebarnshemmet”) samt kyrkorna Santa Maria degli Angeli och Santo Spirito. De båda senare byggnadsverken fullbordades dock inte under hans livstid.

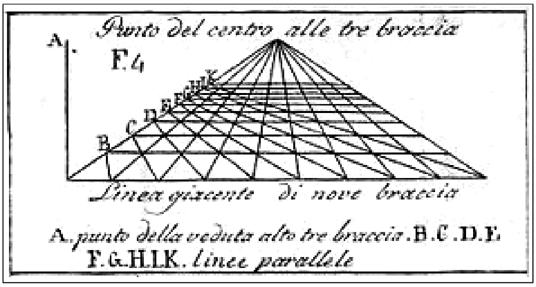
Brunelleschi var den förste som formulerade och tillämpade perspektivlagarna inom måleri och arkitektur. Han insåg att parallella strålar utanför målardukens plan måste konvergera mot en punkt och han kunde beräkna förhållandet mellan längderna av det verkliga objektet och bilden på duken beroende på hur långt från duken objektet var beläget. Tyvärr finns inte några av Brunelleschis målningar bevarade men hans principer användes av t.ex. **Masaccio** i de berömda fresken *Treenigheten*.

När Filippo Brunelleschi dog 1446 begravdes han i Santa Maria del Fiore.

Leone Battista Alberti (1404–72) var född i Florens och hans far var förmögen. Man känner inte till något om Leone Battistas mor och förmodligen var fadern ensamstående. Familjen kom på grund av politiska förvecklingar att leva i asyl, först i Genua och sedan i Venedig. Leone Battista blev tidigt faderslös och han började studera på en internatskola i Padua. År 1421 började han studera juridik vid universitetet i Bologna. Juridiken intresserade honom inte men trots det avlade han examen. Under sina studier hade han som avkoppling skrivit ett skådespel men också börjat studera matematik.

När Alberti hade avslutat sina juridikstudier hade det politiska klimatet i Florens ändrats och han kunde återvända dit. Han blev god vän med Brunelleschi och delade hans intresse för matematik. Vänskapen innebar också att Alberti blev intresserad av arkitektur. Till en början var intresset bara teoretiskt men efter hand fick han också tillfälle att göra egna konstruktioner. Han intresserade sig för hur man representerade tredimensionella kroppar på en plan yta såsom en målarduk eller ett papper. Studierna resulterade 1435 i verket *De Pictura* eller ”Om målning”, skrivet på latin. Året efter gav Alberti ut en italiensk version, *Della pittura*. Han beskriver i boken de matematiska principerna bakom centralprojektion. Boken tillägnades Brunelleschi som var hans inspirationskälla. Den trycktes 1511. Alberti tyckte om att kombinera matematik och konst. Han skriver:

> ”Ingenting förnöjer mig så som matematiska undersökningar och bevis, särskilt om jag kan använda dem för att med matematiken härleda principerna för att måla perspektiviskt.”



Figur 5.4: En illustration ur *Della pittura* som beskriver hur parallella strålar konvergerar i en punkt på horisonten. (Bild: 3hEuncg)

Alberti arbetade också med att utforma kartor och han samarbetade med **Paolo Toscanelli**, som var den som försåg Columbus med de kartor han behövde på sina upptäcktsresor. Han skrev också en bok om kryptering och konstruerade mekaniska anordningar som skulle snabba upp kryptering och forcering.

Det var emellertid som arkitekt Alberti skulle bli mest känd. Han ritade bland annat Sankt Andrea-kyrkan i Mantua och Rucellaipalatset i Florens. Den romerske arkitekten och ingenjören **Vitruvius** som levde kring Kristi födelse hade givit ut det klassiska verket *De architectura libri decem* (”Tio böcker om arkitektur”) och med den som utgångspunkt skrev Alberti boken *De architectura*. De principer för byggnadskonst som han formulerar här kom att vara vägledande i flera århundraden.

Alberti var under en stor del av sitt yrkesverksamma liv rådgivare till påven. Det innebar att han gjorde många resor och fick tillfälle att studera många olika miljöer. Han var en renässansmänniska och enligt samtida källor var han rastlös och idérik. Han var arkitekt och matematiker. Han skrev dramer, han komponerade musik och han gav ut en bok om grammatik. Han var enligt samtida källor vänlig och spirituell. Han hade ett ståtligt yttre och var känd som en framstående ryttare, en utmärkt dansör och en god gymnast.

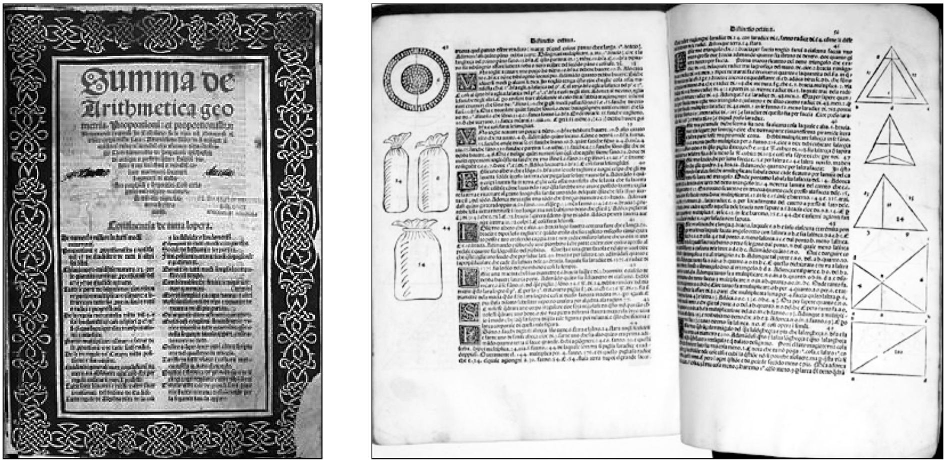
Luca Pacioli (1445–1517) var född i Sansepolcro, en liten stad i mitten av Italien. En av de stora konstnärerna **Piero della Francesca**, som liksom Brunelleschi och Alberti använde sig av perspektivlagarna, hade en studio i staden. Det är troligt att Luca fick åtminstone en del av sin matematiska utbildning från della Francesca. Som mycket ung flyttade Luca till Venedig där han verkade som informator för sönerna till en rik köpman vid namn **Rompiasi**. Han hjälpte också Rompiasi med ekonomiska beräkningar. Under tiden i Venedig bodde han några månader hos Leone Battista Alberti. Han hade alltså redan i unga år kommit i kontakt med två av samtidens mest inflytelserika konstnärer. Han skulle med åren få ett ännu rikare kontaktnät och skulle bland annat bli nära vän med Leonardo da Vinci. Under tiden i Venedig fick han erfarenhet av undervisning och av affärsekonomi – två områden som skulle ge honom en plats i matematikens historia. Han skrev läroböcker och samlingsverk om den tidens matematiska kunnande och han skrev den allra första läroboken om bokföring. Under tiden i Venedig studerade han också teologi och blev munk i Franciskanerorden.

Pacioli stannade i Venedig i sju år och därefter engagerades han som lärare vid olika universitet. Han undervisade företrädesvis aritmetik vid universiteten i Perugia, Zara, Neapel och Rom. Han skrev tre läroböcker i aritmetik men det är endast den första som finns kvar. Den skrev han under sin tid i Venedig. Efter två år i Rom återvände Pacioli till sin hemstad Sansepolcro och där han skrev sitt mest kända verk. Det har titeln *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* eller kortare bara *Summa*, och det är en sammanfattning av den tidens matematiska kunnande. Boken innehåller knappast några nya idéer utan är en encyklopedisk sammanställning på 600 sidor. Den är skriven på italienska och riktar sig inte till en elit utan mer till en bredare publik. Innehållet består av teoretisk och praktisk aritmetik, enkel algebra samt beskrivning av olika mått. Där finns också ett avsnitt om dubbel bokföring och en sammanfattning av Euklides *Elementa*. Han erkänner att han lånat från Euklides, Fibonacci, Boethius m.fl. och gör alltså inte anspråk på någon originalitet. *Summa* är den första boken som behandlar dubbel bokföring som nu kallas *dubbel italiensk bokföring*.

Hertigen av Milano var intresserad av vetenskap och konst och hade som mål att göra sitt hov till det yppersta i Europa. Han engagerade 1482 Leonardo da Vinci som konstnär och ingenjör. Omkring 1496 rekryterades också Pacioli. Dessa båda blev snart mycket goda vänner och hade diskussioner om konst och matematik. Under tiden i Milano påbörjade Pacioli verket *Divina proportioni* ("Den gudomliga proportionen"). Boken behandlade bl.a. det gyllene snittet och den illustrerades av Leonardo da Vinci. Politiska förvecklingar medförde att de båda vännerna flydde från Milano till Florens. Där undervisade Pacioli i geometri och da Vinci arbetade för fursten **Cesare Borgia**. Under en period arbetade båda i Bologna där Pacioli blev bekant med **Scipio del Ferro** som senare skulle lösa vissa typer av tredjegradsekvationer. Pacioli har tagit upp tredjegradsekvationen i *Summa* och förmodligen diskuterade dessa båda herrar problemet med att lösa den typen av ekvationer.

Under sina sista år blev Pacioli alltmer engagerad i kyrkliga frågor och det blev allt mindre tid för matematik. Han dog 1517 i Sansepolcro och lämnade efter sig ett opublicerat verk med förströelseproblem och ordspråk.

Pacioli bidrog knappast med något nytt till den matematiska vetenskapen. Visserligen kom hans approximationsmetoder för att beräkna kvadratrötter att användas av många matematiker och han var kanske den förste som hade tankar, om än felaktiga, om hur man skulle mäta chanser vid hasardspel. Luca Pacioli sammanfattade väsentligen vad andra hade gjort. Han var



Figur 5.5: Bilden till vänster visar titelsidan av en upplaga av *Summa* och den till höger ett uppslag om geometri i samma verk. Notera figurerna i marginalen. Räkningar och figurer gjorde i regel i marginalen. (Bild: `3fzHVnw`, `https://s.si.edu/3dVjocn`)

lärare och uppenbarligen en mycket efterfrågad sådan. I hans verk och då i synnerhet *Summa* är avsikten att ge fler än det vetenskapliga etablissemanget tillgång till den tidens matematiska vetande. Luca Pacioli framstår på många sätt som en framstående matematikpedagog.

Nicolas Chuquet (1445–88) föddes i Paris och framställde sig själv som riktig parisare. Han flyttade emellertid så småningom till Lyon där han levde fram till sin död. Han beskrivs i Lyons register som ”Nicolas Chuquet, algoriste” där epitetet ”algoriste” skall tolkas som ”räknemästare”.

Chuquet var i motsats till Pacioli vad man idag skulle kalla en doldis. Han försörjde sig antagligen som kopist eller skrivmästare. Hans mest kända skrift visar att han har haft italienska kontakter, som han fått antingen genom resor i Italien eller med den italienska koloni som fanns i Lyon.

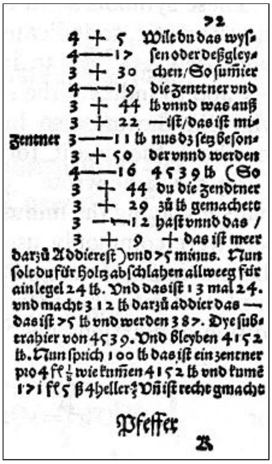
Chuquets viktigaste text är *Triparty en la science des nombres* eller ”Tre kapitel om vetenskapen om tal” och behandlar aritmetik och algebra. Det är den första franska algebraboken, men eftersom den trycktes först 1880 hade den inte så stort inflytande.

I *Triparty en la science des nombres* studerades för första gången ekvationer med negativa koefficienter och lösningar. Chuquet studerar andragradsekvationer och han är den förste som accepterar att en andragradsekvation kan ha två lösningar.

Triparty en la science des nombres var alltså inte särskilt känd under en lång period. Länge ansågs **Estienne de La Roches** *Larismetique nouvellement composée* (”En ny utformning av aritmetiken”) från 1520 vara den första algebraboken på franska. Det visade sig emellertid att stora delar av La Roches arbete är avskrifter av Chuquets *Triparty en la science des nombres*. De La Roche, som var 25 år yngre än Chuquet, bodde i Lyon och troligtvis hade han haft Chuquet som lärare. De La Roche undervisade i handelsräkning i 25 års tid i Lyon, vilket på den tiden var ett finansiellt centrum. Man kan skylla de La Roche för plagiering, men hans syfte var förmodligen precis som Pacioli att göra Chuquets verk tillgängliga för sina elever. De la Roche var lärare inte vetenskapsman.

Figur 5.6: Titelsidan till Chuquets *Triparty en la science des nombres* i en upplaga från 1891. (Bild: `30Unfma`)

Johannes Widman (1462–98) är mindre känd än Pacioli, Alberti och Brunelleschi. Han var student vid universitetet i Leipzig där han efter examen fortsatte. Han undervisade i aritmetik och algebra och gav de första lektionerna Tyskland lektioner i algebra år 1486. Dessa finns dokumenterade genom en students anteckningar. Det är emellertid för sin lärobok i aritmetik, *Mercantile Arithmetic oder Behende und hübsche Rechnung auf allen Kauffmanschaft*, som Widman är mest känd. En fri översättning av titeln till svenska kan vara ”Praktisk och trevlig räkning för alla former av köpenskap”. Den gavs ut 1489 och som titeln anger innehåller den en hel del handelsräkning.



Figur 5.7: En sida ur Johannes Widmans lärobok med tecknen för + och −. (Bild: `2NjES7b`)

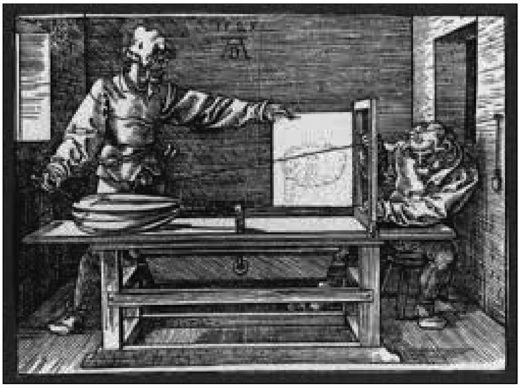
Boken blev beröm för att Widman inför symbolerna + och − för addition respektive subtraktion. Det är första gången dessa tecken används. Boken består av tre delar. Den först behandlar räkning med hela tal, den andra handlar om proportionslära och den tredje om geometri. Parallellt med räkning med algoritmerna för vårt decimalsystem med de hinduarabiska siffrorna visar Widman på hur man kan räkna med vissa typer av abacusar. Boken innehåller också ett avsnitt om reguladetri. En sida ur boken med tecknen för + och − finns i figur 5.7.

Widmans bok kom att användas över hela Tyskland och den utkom i flera upplagor. Den ersattes på slutet av 1520-talet av en lärobok av **Adam Ries** (1492–1559). Widmans stora insats är att han genom sin lärobok gjorde det möjligt att fler tysktalande än någonsin tidigare kunde tillgodogöra sig matematik.

Albrecht Dürer (1471–1528) var uppväxt i Nürnberg. Hans far var juvelerare och Abrecht var ett av arton syskon. Redan som mycket ung visade han konstnärliga anlag och han utbildade sig till guldsmed. Efter gesällprovet gjorde han resor runt om i Tyskland och studerade olika konstnärliga skolor, som vid den tiden var mycket influerade av holländska konstnärer. Efter en tid insåg han att han borde besöka Italien, som då var ledande inom konst och vetenskap. Där träffade han konstnärer som skulle få stor betydelse för hans konstnärliga utveckling. Leonardo da Vinci träffade han emellertid inte men han tog del om dennes åsikter om matematikens betydelse för konsten.

Figur 5.8: Självporträtt av Albrecht Dürer. (Bild: `37FIbyx`)

Dürer återvände till Nürnberg och började studera matematik. Han läste Euklides *Elementa* och Vitruvius *De architectura* och bekantade sig med Paciolis arbeten. Det var också under åren efter hemkomsten till Nürnberg som han slog igenom som konstnär. När hans far dog 1502 fick han ta hand om sin mor som då var nästan blind. Han skaffade en tryckpress som möjliggjorde att han och hans fru kunde sälja hans verk på lokala utställningar. Allt arbete tog hårt på Dürers krafter och han började få problem sin hälsa – problem han aldrig blev fri från.

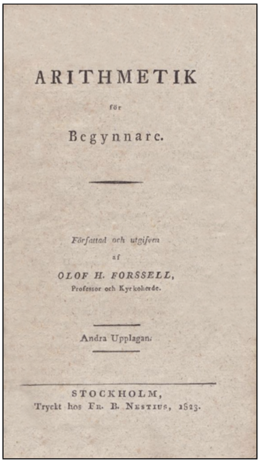


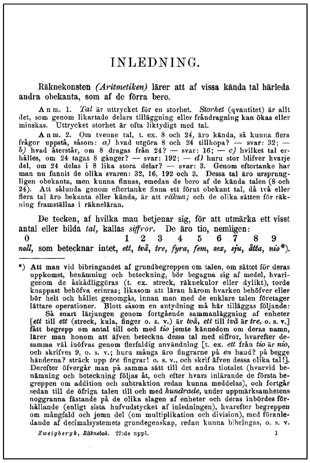
Figur 5.9: I bilden till vänster visas en anordning för att avbilda en tredimensionell kropp – en luta – på ett plan. Ett snöre dras från betraktarens öga till punkterna på lutan. Skärningspunkterna med planet registreras. Bilden till höger är ett av Dürers mest kända konstverk *Melankolia*. Konstnärens intresse för matematik framgår bl.a. genom den magiska kvadraten i bildens övre högra hörn. (Bild: `3dWNa0f`, `2URBowP`)

Det var emellertid inte bara som konstnär Dürer blev känd. Han gjorde också insatser inom matematiken. Han skrev en bok om proportionalitet men insåg att den krävde mer kunskaper i matematik än vad man kunde kräva av de läsare som han riktade sig till. Därför utarbetade han en enklare version som fick titeln *Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit* ("Undervisning om mätning med passare och linjal") som blev det första vetenskapligt inriktade verket i matematik på tyska. Verket består av fyra böcker. I den första boken beskriver Dürer hur man kan konstruera olika kurvor, såsom spiraler och cykloider. I den andra visar han hur man konstruerar regelbundna polygoner och diskuterar hur man approximativt kan lösa problemet med cirkelns kvadratur. Den tredje delen ägnas åt tredimensionella kroppar och astronomiska instrument. Den sista delen behandlar de platonska kropparna, d.v.s. de fem regelbundna polyedrarna. I den här delen utvecklar Dürer också sina egna teorier om skuggor och där finns också en introduktion till teorin för perspektiv. Boken kom ut 1526, alltså en bit in på 1500-talet, men det grundläggande intresset för matematiken fick Dürer emellertid under slutet av 1400-talet från italienska konstnärer och deras idéer om matematikens betydelse för konsten.

Dürer fick under sin livstid högt anseende som konstnär. Han utsågs till hovmålare av först kejsar **Maximilian I** och sedan av dennes efterträdare **Karl V**. Han var gäst vid Karl V:s kröning till tysk-romersk kejsare 1520. Dürer var sin hemstad Nürnberg trogen och dog där 1528.

Hänvisningar till del 2 I avsnitten 12.4.2, 12.4.3 och 12.4.4 behandlas delar av *Trevisoritmetiken*, Paciolis *Summa* respektive Widmans räknelära. I avsnitt 12.4.5 studeras några problem från *Trevisoaritmetiken*. Albertis *Della pittura*, Paciolos *Divina proportioni* och Dürers *Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit* kommenteras i avsnitt 13.6.1.





INLEDNING.

Räknekonsten *(Aritmetiken)* lärer att af vissa kända tal härleda andra obekanta, som af de förra bero.

Anm. 1. *Tal* är uttrycket för en storhet. *Storhet* (qvantitet) är allt det, som genom likartade delars tilläggning eller frånddragning kan ökas eller minskas. Uttrycket storhet är ofta liktydigt med tal.

Anm. 2. Om tvenne tal, t. ex. 8 och 24, äro kända, så kunna flera frågor uppstå, såsom: *a)* hvad utgöra 8 och 24 tillhopa? — svar: 32; — *b)* hvad återstår, om 8 dragas från 24? — svar: 16; — *c)* hvilket tal erhålles, om 24 tagas 8 gånger? — svar: 192; — *d)* huru stor blifver hvarje del, om 24 delas i 8 lika stora delar? — svar: 3. Genom eftertanke har man nu funnit de olika svaren: 32, 16, 192 och 3. Dessa tal äro ursprungligen obekanta, men kunna finnas, emedan de bero af de kända talen (8 och 24). Att sålunda genom eftertanke finna ett förut obekant tal, då två eller flera tal äro bekanta eller kända, är att *räkna;* och de olika sätten för räkning framställas i räkneläran.

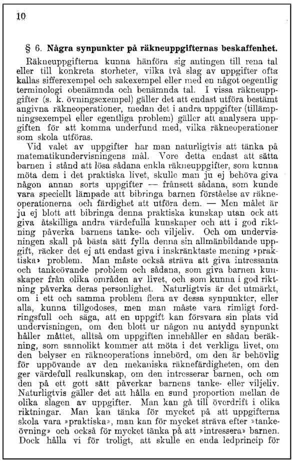
De tecken, af hvilka man betjenar sig, för att utmärka ett visst antal eller bilda *tal,* kallas *siffror.* De äro tio, nemligen:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

noll, som betecknar intet, *ett, två, tre, fyra, fem, sex, sju, åtta, nio**).

*) Att man vid bibringandet af grundbegreppen om talen, om sättet för deras uppkomst, benämning och beteckning, bör begagna sig af medel, hvarigenom de åskådliggöras (t. ex. streck, räknekulor eller dylikt), torde knappast behöfva erinras; likasom att läran härom hvarken behöfver eller bör helt och hållet genomgås, innan man med de enklare talen företager lättare operationer. Blott såsom en antydning må här tilläggas följande:
Så snart lärjungen genom fortgående sammanläggning af enheter [*ett* till *ett* (streck, kula, finger o. s. v.) är *två, ett* till *två* är *tre,* o. s. v.] fått begrepp om antal till och med *tio* jemte kännedom om deras namn, lärer man honom att äfven beteckna dessa tal med siffror, hvarefter desamma väl inöfvas genom flerfaldig användning [t. ex. *ett* från *tio* är *nio,* och skrifves 9, o. s. v.; huru många äro fingrarne på *en* hand? på begge händerna? sträck upp *tre* fingrar! o. s. v., och skrif äfven dessa olika tal!]. Derefter öfvergår man på samma sätt till det andra tiotalet (hvarvid benämning och beteckning följas åt, och efter hvars inlärande de första begreppen om addition och subtraktion redan kunna meddelas), och fortgår sedan till de öfriga talen till och med *hundrade,* under uppmärksamhetens noggranna fästande på de olika slagen af enheter och deras inbördes förhållande (enligt sista hufvudstycket af inledningen), hvarefter begreppen om mångfald och jemn del (om multiplikation och division), med föranledande af decimalsystemets grundegenskap, redan kunna bibringas, o. s. v.

Zweigbergk, Räknebok. 27:de uppl. 1

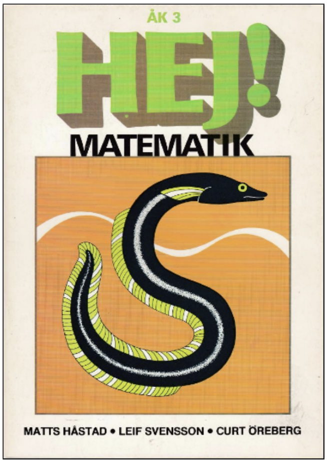


10

§ 6. **Några synpunkter på räkneuppgifternas beskaffenhet.**

Räkneuppgifterna kunna hänföra sig antingen till rena tal eller till konkreta storheter, vilka två slag av uppgifter ofta kallas sifferexempel och sakexempel eller med en något oegentlig terminologi obenämnda och benämnda tal. I vissa räkneuppgifter (s. k. övningsexempel) gäller det att endast utföra bestämt angivna räkneoperationer, medan det i andra uppgifter (tillämpningsexempel eller egentliga problem) gäller att analysera uppgiften för att komma underfund med, vilka räkneoperationer som skola utföras.

Vid valet av uppgifter har man naturligtvis att tänka på matematikundervisningens mål. Vore detta endast att sätta barnen i stånd att lösa sådana enkla räkneuppgifter, som kunna möta dem i det praktiska livet, skulle man ju ej behöva giva någon annan sorts uppgifter — frånsett sådana, som kunde vara speciellt lämpade att bibringa barnen förståelse av räkneoperationerna och färdighet att utföra dem. — Men målet är ju ej blott att bibringa denna praktiska kunskap utan ock att giva åtskilliga andra värdefulla kunskaper och att i god riktning påverka barnens tanke- och viljeliv. Och om undervisningen skall på bästa sätt fylla denna sin allmänbildande uppgift, räcker det ej att endast giva i inskränktaste mening »praktiska» problem. Man måste också sträva att giva intressanta och tankeövande problem och sådana, som giva barnen kunskaper från olika områden av livet, och som kunna i god riktning påverka deras personlighet. Naturligtvis är det utmärkt, om i ett och samma problem flera av dessa synpunkter, eller alla, kunna tillgodoses, men man måste vara rimligt fordringsfull och säga, att en uppgift kan försvara sin plats vid undervisningen, om den blott ur någon nu antydd synpunkt håller måttet, alltså om uppgiften innehåller en sådan beräkning, som sannolikt kommer att möta i det verkliga livet, om den belyser en räkneoperations innebörd, om den är behövlig för uppövande av den mekaniska räknefärdigheten, om den ger värdefull realkunskap, om den intresserar barnen, och om den på ett gott sätt påverkar barnens tanke- eller viljeliv. Naturligtvis gäller det att hålla en sund proportion mellan de olika slagen av uppgifter. Man kan gå till överdrift i olika riktningar. Man kan tänka för mycket på att uppgifterna skola vara »praktiska», man kan för mycket sträva efter »tankeövning» och också för mycket tänka på att »intressera» barnen. Dock hålla vi för troligt, att skulle en enda ledprincip för



Figur 5.10: Under 1400-talet trycktes de första räknelärorna och de kom att betyda mycket för den grundläggande matematikundervisningen. Den första räkneläran på svenska var författad av Ægigius Aurelius och kom ut först i början av 1600-talet. Så småningom avlöstes den av andra. Längst upp till vänster visas titelsidan till **Olof H. Forsells** *Aritmetik för begynnare* som kom ut 1818 och till höger om den inledningen till **Per Anton von Zweigbergks** *Lärobok i räknekonsten* från 1839. Den kom ut i ett stort antal upplagor och användes i den svenska skolan ända in på 1940-talet. Under 1900-talet började man systematiskt utveckla metodik för matematikundervisningen. En av portalfigurerna i den verksamheten var **Fritz Wigforss** som 1925 gav ut *Den grundläggande matematikundervisningen* och en sida i den visas längst ner till vänster. Längst ner till höger visas ett exemplar av läromedlet *Hej Matematik* som en representant för den nya matematiken – ett utbildningsexperiment i den svenska skolan under 1970 och 1980-talen där mängdläran spelade en central roll. (Bild: 2OGMtNv, 2CLQKwH, 39bFrK5, 39fGVTF)

Kapitel 6

1500-talet

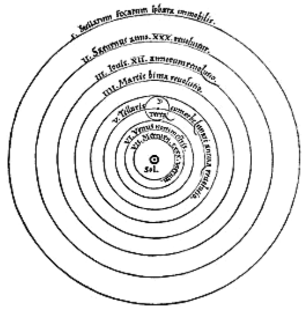
Den 31 oktober 1517 spikade **Martin Luther** sina 95 teser på dörren till slottskyrkan i Wittenberg och det var starten på reformationen som på många sätt kom att prägla Europa under 1500-talet. Den innebar en kritik mot den katolska kyrkan och flera länder däribland Sverige kom att övergå till den lutherska läran. I England bryter kyrkan med påven och kungen blir den engelska kyrkans överhuvud. Mot slutet av århundradet utspelas hugenottkrigen i Frankrike mellan hugenotterna, som är reformerta protestanter, och katoliker. Katolska kyrkan inleder en motreformation och jesuitorden bildas. Ett långvarigt krig mellan Spanien och Nederländerna utbryter. Den spanska armadan försöker att invadera England men stoppas i Engelska kanalen. Det osmanska riket utvidgas i Centraleuropa, men misslyckas med att erövra Wien.

I kulturellt avseende präglas 1500-talet av renässansen. Leonardo da Vinci målar *Mona Lisa* och **Michelangelo** arbetar med målningarna i taket på Sixtinska kapellet. **Niccolò Machiavelli** ger ut *Fursten*. Mot slutet av århundradet uppförs flera av **William Shakespeares** dramer som *Richard III*, *Så tuktas en argbigga*, *Romeo och Julia* och *En midsommarnattsdröm*. Under seklet byggs franska slott i Loiredalen. **Ferdinand Magellans** startar den första världsomseglingen men dör under vägen och resan avslutas av hans andreman **Sebastián Elcano**.

6.1 Den vetenskapliga revolutionen förbereds

Astronomin har alltid stått i centrum för människans intresse och den är ofta intimt förknippad med matematik. Den var central i Mesopotamien, under antiken och under Islams guldålder. Den var en del i quadrivium som undervisades i skolor och universitet på medeltiden. Den var också ett viktigt ämne under renässansen. Astrologi, som vi nu betecknar som en pseudovetenskap, hade då en annan ställning. Man ansåg sig kunna förutsäga framtiden med hjälp av stjärnornas och planeternas ställning på himlavalvet. Undervisning i astrologi ägde under denna tid ofta rum vid de då prestigefyllda medicinska lärosätena. Astrologin förutsätter i sin tur kunskaper i astronomi. Tekniken hade utvecklats och det var nu möjligt att göra allt bättre observationer. I Tycho Brahes (1546–1601) observatorium på Ven kunde man mäta himlakropparnas ställningar med relativt stor noggrannhet och där samlades stora mängder av data.

Det fanns också andra observatorier i Europa där man kartlade planetrörelserna. Den grundläggande teoretiska modellen var Ptolemaois geocentriska bild av universum med jorden i centrum och där planeterna kretsar i epicykler runt jorden. Den bilden skulle komma



Figur 6.1: En bild av Copernicus heliocentriska världsbild med planeterna inklusive jorden i banor runt solen. (Bild: `2XQq0TA`)

att ifrågasättas under 1500-talet av framför allt **Nicolaus Copernicus**, som förespråkade en heliocentrisk världsbild där planeterna inklusive jorden roterade kring solen. Det kan emellertid vara på sin plats att påminna om att Aristarchos redan under antiken hade en sådan världsbild.

6.2 Ekvationslösning och algebra

Under 1500-talet kom algebran att utvecklas. Italienska matematiker fann generella metoder för att lösa tredje- och fjärdegradsekvationer. Striden om upphovsrätten var dramatisk och säger en del om den tidens vetenskapssamhälle. Huvudpersonerna i dramat är Scipio del Ferro, en äldre matematiklärare i Bologna, **Niccolo Tartaglia**, en självlärd matematiker som undervisade matematik i Venedig, **Girolamo Cardano**, en av den tidens mest ansedda matematiker och läkare samt Cardanos elev **Lodovico Ferrari**. del Ferro ansåg sig ha löst problemet med tredjegradsekvationen men han höll den för sig själv. På sin dödsbädd invigde han sin elev **Antonio Maria Fior** i lösningen av en typ av tredjegradsekvationer. Tartaglia hade å sin sida själv hittat en metod. För att se vem som kommit längst anordnades en tävling 1535. De båda tävlande konstruerade 30 problem vardera och kravet var att de själva skulle kunna lösa de problem de konstruerade. De bytte problem. Fior försökte lösa de problem Tartaglia konstruerat och omvänt. Tartaglia lyckades på relativt kort tid lösa alla Fiors problem och utsågs som vinnare. Cardano fick veta detta och ville att Tartaglia skulle avslöja lösningen för honom. Tartaglia vägrade men efter att ha fått löfte om förmåner gav Tartaglia med sig mot tysthetslöfte från Cardano. Cardano höll löftet en tid men hans elev Ferrari kom i kontakt med del Ferros måg som också var matematiker. Han hade av sin svärfar fått en litet häfte där del Ferro hade upptecknat sina resultat och där fanns skissen till lösning av tredjegradsekvationen. Cardano ansåg nu att han kunde bryta sitt löfte till Tartaglia och publicerade lösningen i sitt stora verk *Ars Magna* som kom ut 1545. Tartaglia blev rasande och han förlät aldrig Cardano. Men lösningen till tredjegradsekvationen blev publicerad och kom vetenskapssamhället till godo. Den italienske ingenjören och matematikern **Rafael Bombelli** sammanställde och gav struktur åt Tartaglias, Cardanos och del Ferros arbeten. Han insåg att framställningen skulle bli enklare och mer överskådlig om man accepterade och räknade med negativa och komplexa tal. Cardano hade visserligen tagit upp dessa typer av tal i *Ars Magna* men han hade svårt att acceptera dem.

Hittills hade algebran från Diofantos och Al Khwarizmi väsentligen handlat om ekvationslösning. Ekvationerna och lösningarna hade beskrivits med ord även om man ibland införde förkortningar. Genom några franska matematiker kom algebran in en ny fas. Man införde symboler för den obekanta och för koefficienterna. Man räknade med symbolerna och de ordrika förklaringarna kunde ersättas med räkningar. Abstraktionsnivån höjdes och överskådligheten ökade. Det banbrytande verket utkom 1591 och författaren var **Francois Viète**. Tekniken skulle utvecklas ytterligare under 1600-talet av framför allt **René Descartes**.

6.3 Beräkningstekniken utvecklas

Under 1500-talet ökade användningen av vårt decimalsystem med dess algoritmer även om många fortfarande använde abacusar. Det gavs ut fler läroböcker i aritmetik. Den första läroboken i aritmetik på svenska är en handskrift från 1601 och den första tryckta läroboken gavs ut 1614.

En holländsk ingenjör och matematiker **Simon Stevin** införde decimalbråken och mot slutet av 1500-talet och början av 1600-talet uppfann **John Napier** och **Henry Briggs** logaritmerna, som kom att innebära revolutionerande förenklingar av beräkningsarbetet. Multiplikationer kunde ersättas med additioner och divisioner med subtraktioner. Detta kom att ha stor betydelse för astronomins utveckling. Bearbetning av stora datamängder kunde förenklas och beräkningstiderna kunde förkortas radikalt.


THIENDE. 13

HET ANDER DEEL DER THIENDE VANDE WERCKINGHE.

I. VOORSTEL VANDE VERGADERINGHE.

Weſende ghegeven Thiendetalen te vergaderen: hare Somme te vinden.

T'GHEGHEVEN. Het ſijn drie oirdens van Thiendetalen, welcker eerſte 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, de tweede, 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③, de derde, 875 ⓪ 7 ① 8 ② 2 ③. T'BEGHEERDE. Wy moeten haer Somme vinden. WERCKING. Men ſal de ghegheven ghetalen in oirden ſtellen als hier neven, die vergaderende naer de ghemeene maniere der vergaderinghe van heelegetalen aldus:

⓪	①	②	③
27	8	4	7
37	6	7	5
875	7	8	2
941	3	0	4

Comt in Somme (door het 1. probleme onſer Franſcher Arith.) 941304 dat ſijn (t'welck de teeckenen boven de ghetalen ſtaende, anwijſen) 941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③. Ick ſegghe de ſelve te weſen de ware begheerde Somme. BEWYS. De ghegeven 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, doen (door de 3e. bepaling) $27\frac{8}{10}, \frac{4}{100}, \frac{7}{1000}$, maeckē t'ſamen $27\frac{847}{1000}$. Ende door de ſelve reden ſullen de 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③ weerdich ſijn $37\frac{675}{1000}$. Ende de 875 ⓪ 7 ① 8 ②


ARITHMETICA

LOGARITHMICA

SIVE

LOGARITHMORVM CHILIADES TRIGINTA, PRO numeris naturali ſerie creſcentibus ab vnitate ad 20,000: et a 90,000 ad 100,000. Quorum ope multa perficiuntur Arithmetica problemata et Geometrica.

HOS NVMEROS PRIMVS INVENIT CLARISSIMVS VIR IOHANNES NEPERVS Baro Merchiſtonij: eos autem ex eiuſdem ſententia mutavit, eorumque ortum et vſum illuſtravit HENRICVS BRIGGIVS, in celeberrima Academia Oxonienſi Geometriæ profeſſor SAVILIANVS.

DEVS NOBIS VSVRAM VITÆ DEDIT ET INGENII, TANQVAM PECVNIÆ, NVLLA PRÆSTITVTA DIE.

LONDINI, Excudebat GVLIELMVS IONES. 1624.

Figur 6.2: Två viktiga verk för att förbättra beräkningstekniken. Till vänster visas en sida i Stevins *La Thiende* där han inför räkning med decimalbråk och utför en addition. I bilden till höger visas titelsidan till Briggs logaritmtabeller. (Bild: `3cQAc2J`, `2zJIX1a`)

6.4 Några matematiker och deras verk

För att illustrera den matematiska utvecklingen under 1500-talet tar vi upp några av de viktigaste matematikerna och beskriver kortfattat deras arbeten. Vi har nämnt Copernicus och hans heliocentriska världsbild. Till de italienska matematiker som förknippas med lösning av tredje- och fjärdegradsekvationerna fogar vi Rafael Bombelli som gav arbetet med ekvationslösning struktur. Viète får representera den nya symboliska algebran. Nya pedagogiska idéer om matematikundervisning lanserades av **Peter Ramus** i Frankrike och **Robert Recorde** i Storbritannien. Stevin, Napier och Briggs är portalfigurer för utvecklingen av beräkningstekniken.

Nicolaus Copernicus (1473–1543) föddes i Torun i Polen. Namnet är en latinisering av hans ursprungliga namn som var Mikolaj Kopernik. Hans far, som var uppväxt i Krakow, var affärsman och lokalpolitiker och hans mor kom från en välbeställd familj i Torun. Fadern dog då Nicolaus var 10 år och hans morbror, som var kanik i Frauenburg, tog hand om modern och hennes fyra barn.

Efter grundläggande utbildning i Torun och katedralskolan i Wloclawek började Nicolaus 1491 studera vid universitetet i Krakow. Han läste där latin, matematik, astronomi, geografi och filosofi. Det var under studierna i Krakow som han latiniserade sitt namn till Nicolaus Copernicus. År 1496 fortsatte han studier vid universitetet i Bologna där han läste grekiska, matematik och astronomi. Året därefter blev han utnämnd till kanik i Frauensdorff och fick därmed en inkomst som skulle bekosta hans studier. Efter ett år i Rom där han undervisade i matematik och astronomi studerade Copernicus medicin och astronomi i Padua.

Figur 6.3: Nicolaus Copernicus. (Bild: 3ØR8MHz)

Efter studierna återvände Copernicus till Polen och Frauenberg. Han arbetade som läkare och sekreterare åt sin morbror. När denne dog återupptog han sin tjänst, som kanik och han fick nu tid över att ägna sig åt astronomi. Han hade under sin tid i Krakow skaffat de alfonsinska tabellerna från 1200-talet och de utgjorde tillsammans med egna observationer grunden för hans arbete. Han hade också köpt verk av en tysk matematiker **Johann Regiomontanus** (1436–76), som hade gjort viktiga insatser inom trigonometri.

År 1507 presenterade han i en kort skrift *Commentariolus* ("Liten kommentar") sina idéer om planetrörelserna. Han var påverkad av Aristarchos och hans modell av universum som var heliocentrisk. Planeterna och däribland jorden kretsar kring solen. Han bröt därmed mot den då allmänt erkända geocentriska världsbilden med jorden i centrum som utformats av Ptolemaios. Både Copernicus och Ptolemaios teorier bygger på att planetrörelserna är cirkulära eller rättare sammansatta av cirkulära rörelser, s.k. epicykler. För att få Ptolemaios modell att stämma med observationerna krävdes ett system med upp till 80 cirklar. Copernicus hoppades med sin modell kunna minska antalet till 34. Han utarbetade en fullständig version med matematiska härledningar som förmodligen var färdig 1530. Han avvaktade med att trycka den. Kanske var han tveksam till att resultaten skulle hålla inför en närmare granskning eller så var han orolig för hur den katolska kyrkan skulle ställa sig.

En ung professor i matematik och astronomi från Wittenberg, **Georg Joachim Rheticus**, gästade 1539 Copernicus i Frauenburg. Han blev imponerad av Copernicus arbete och lät 1540 trycka en kort presentation av hans resultat.


NICOLAI CO
PERNICI TORINENSIS
DE REVOLVTIONIBVS ORBI-
um coelestium, Libri VI.

Habes in hoc opere iam recens nato, & aedito, studiose lector, Motus stellarum, tam fixarum, quam erraticarum, cum ex veteribus, tum etiam ex recentibus observationibus restitutos: & novis insuper ac admirabilibus hypothesibus ornatos. Habes etiam Tabulas expeditissimas, ex quibus eosdem ad quodvis tempus quam facillime calculare poteris. Igitur eme, lege, fruere.

Norimbergae apud Ioh. Petreium,
Anno M. D. XLIII.

Figur 6.4: Titelsidan på *De revolutionibus orbium coelestium.* (Bild: `3hJyDHN`)

Det fick Copernicus att äntligen år 1543 ge ut sitt stora verk *De revolutionibus orbium coelestium* eller ”Om de himmelska kretsloppen”. Förlaget lade till en passus i förordet om att teorin i boken skulle inte ses som en beskrivning av verkligheten utan endast var en modell som underlättade räkningarna. Det är knappast troligt att detta var i överensstämmelse med Copernicus tankar men kanske var tillägget avgörande för att få boken tryckt. I figur 6.4 visas titelsidan. Layouten är med dagens mått inte iögonfallande. Copernicus teori stämde lika litet som Ptolemaios med de mer omfattande observationer som gjordes av bland annat Tycho Brahe på Ven. Brahe som aldrig trodde på en heliocentrisk världsbild kunde trots det inte låta bli att imponeras av Copernicus arbete. Han skrev

> ”Genom egna observationer upptäckte han luckor i Ptolemaios resonemang och han drog slutsatsen att Ptolemaios hypoteser innehöll något som stod i strid med matematikens axiom. Dessutom fann han att de alfonsiska beräkningarna inte stod i överensstämmelse med himlakropparnas rörelser. Därför introducerade han med stort intellektuellt skarpsinne andra hypoteser. Han återupprättade vetenskapen om himlakropparnas rörelse på ett sådant sätt att ingen tidigare haft en mer exakt kunskap om himlakropparnas rörelse.”

Det grundläggande felet var att båda modellerna hade byggts upp av cirkelrörelser. Det var först i och med Keplers modell där planeterna rörde sig kring solen i elliptiska banor som man fick en överensstämmelse mellan teori och verklighet. Den modellen kunde sedan Newton härleda ur tyngdlagarna.

Man kan fråga sig vilka insatser Copernicus gjorde inom matematiken. Han utvecklade inte några nya matematiska teorier men han använde etablerade teorier och metoder för att bryta ny mark om vår kunskap om universum. Han var vad vi idag skulle kalla en tillämpad matematiker.

Scipio del Ferro (1465–1526) föddes i Bologna där han blev kvar under hela sitt liv. Hans far arbetade med papperstillverkning – en näringsgren som var högaktuell då boktryckarkonsten nyligen uppfunnits.

Vi känner inte till mycket om hans studier men det är troligt att han läste matematik och andra ämnen vid universitetet i Bologna. Han undervisade i aritmetik och geometri vid universitet från 1496 till sin död 1526. Under de sista åren sysslade han också med viss affärsverksamhet.

Det finns inga texter kvar efter del Ferro. Han kommunicerade sina idéer endast till en liten krets av nära vänner och studenter. Vi vet att han skrev upp resultat i en anteckningsbok men den har tyvärr gått förlorad. Efter hans död fick hans måg **Hannibal Nave** den. Nave kom 1543 i kontakt med Cardano och Ferrari och de kunde konstatera att den innehöll den fullständiga lösningen till tredjegradsekvationen.

Åren 1501–2 gästade Pacioli Bologna och det är troligt att del Ferro diskuterade tredjegradsekvationens lösning med honom. Pacioli lade till kommentarer om den typen av ekvationer i sin berömda *Summa*. På den tiden arbetade man inte med negativa tal vilket innebar att man måste betrakta olika fall. Ett av fallen diskuterade han med sin student Fior, som kom att utmana Tartaglia i den tävling 1535 som vi tidigare beskrivit.

Lösningen till tredjegradsekvaionen presenterades i *Ars Magna* och Cardano betygar sin aktning för del Ferro. Han skriver:

> ”Scipio del Ferro från Bologna upptäckte för trettio år sedan kuben och något lika med ett tal [med våra beteckningar $x^3 + px = q$], sannerligen en vacker och beundransvärd prestation. Utan vidare överträffar denna upptäckt all dödlig uppfinningsrikedom och all mänsklig subtilitet. Den är verkligen en gåva från himmelen och ändå på samma gång ett bevis på kraften hos förnuftet och så lysande att den som har det måste tro sig själv om att kunna lösa alla problem.”

Niccolo Tartaglia (1500–57) hette egentligen Niccolo Fontana. Han kom att kallas Tartaglia, som betyder ”stammaren”, på grund av sina talsvårigheter. Han föddes i Brescia i norra Italien. Hans far, som var ridande postiljon, mördades, när Niccolo var bara 6 år. Familjen var fattig innan fadern dog och hans död försämrade förhållandena. En dramatisk händelse 1512 fick ett avgörande inflytande på Niccolo Fontanas liv. Fransmännen erövrade Brescia och styrde staden med vapenmakt. En milis från staden förödmjukade fransmännen och befälhavaren för den franska armén hämnades. Över 46 000 av staden invånare dödades. Den tolvårige Niccolo sökte tillsammans med sin mor och yngre syster skydd i stadens katedral. Fransmännen trängde in i kyrkan och en fransk soldat högg Niccolas ansikte med sin sabel och skadade allvarligt Niccolas käke och gom. Först trodde man att han var död men hans mor upptäckte livstecken och genom hennes vård kunde han överleva. Han fick emellertid stora ärr i ansiktet och när han blev äldre anlade han skägg för att dölja dem. Det var skadan i gommen som gav upphov till hans talsvårigheter.

Figur 6.5: Niccolo Tratag-lia. (Bild: `30XIOm5`)

Tartaglia började skolan redan som fyraåring. Han var självlärd i matematik och han visade stor fallenhet för ämnet. Efter den tragiska händelsen 1512 lyckades hans mor finna en mecenat som tog hand om Nicolas. Han fick möjligheter att studera i Padua och återvände till Brescia efter några år för att undervisa i matematik. Omgivningen i staden upplevde honom som arrogant. Han kände sig utfryst och flyttade 1516 till Verona. Under åren i Verona gifte han sig och bildade familj. År 1534 flyttade han till Venedig. Hela tiden hade han försörjt sig genom matematikundervisning. Samtidigt gjorde han sig känd som en skicklig matematiker med framgångar i ett stort antal matematiktävlingar.

Det var en sådan tävling som arrangerades 1535 mellan del Ferros elev Fior och Tartaglia. Fior, som på del Ferros dödsbädd fick ta del sin mästares metoder att lösa tredjegradsekvationer, var säker på att vinna. Vi har tidigare beskrivit hur tävlingen gick till; Fiori konstruerade 30 problem som Tartaglia skulle lösa och omvänt. Som exempel ger vi två av de problem Fior ställde.

1. Bestäm ett tal sådant att om man adderar det till sin kub så blir summan 6.

15. En man säljer en safir för 500 dukater och gör en vinst som motsvarar kuben på hans kapital. Hur stort var kapitalet?

Vi har i avsnitt 6.3 beskrivit utgången av tävlingen och efterspelet, som slutade med att Cardano publicerade lösningen av den allmänna tredjegradsekavtionen i *Ars Magna* som kom ut 1545 och att det gjorde Tartaglia rasande. Tilläggas kan att Tartaglia i ett arbete *Quesiti et Inventioni diverse de Nicolo Tartalea* ("Diverse frågor och upptäckter av Niccolo Tartaglia") som kom ut 1546 gick till angrepp mot Cardano och gav sin syn på processen. För säkerhets skull lade han till några illvilliga personangrepp. Ferrari skrev ett brev till Tartaglia där han tog sin mästare i försvar. Han skrev:

> "Ni är gemen nog att påstå att Cardano är okunnig i matematik och ni kallar honom simpel och okultiverad, utmålar honom som en lågt stående man med ett grovt språk och liknande förolämpande tillmälen som är allt för tröttade för att upprepa. Då hans ställning hindrar honom och då saken berör mig personligen eftersom jag är hans verktyg, har jag tagit på mig att offentliggöra ert svek och er illvilja."

Tartaglia ville ha till stånd en tävling mellan honom och Cardano men Cardano var inte intresserad. Det var däremot Ferrari. År 1548 arrangerades till slut en tävling mellan de båda i Milano. Tartaglia med sin stora rutin var säker på att vinna, men efter första dagen insåg han att Ferrari förstod tredje- och fjärdegradsekvationerna bättre än vad han gjorde och lämnade Milano på kvällen och tävlingen upplöstes. Ferrari utsågs som segrare.

Tartaglia återvände till Brescia och undervisningen. Förlusten i Milano fick konsekvenser. Han fick inte det stipendium han förväntade sig. Efter ett antal rättegångar var han utan pengar och han återvände till sitt tidigare arbete som lärare i Venedig. Hans avsky mot Cardano upphörde aldrig. Han dog i fattigdom i sitt hem i Venedig 1557.

Det är som upptäckare av den formel som löser tredjegradsekvationen som Tartaglias namn gått till eftervärlden. Formeln kallas idag *Tartaglias-Cardanos formel*. Han bidrog emellertid också med en matematisk skrift för artillerister som beskrev nya ballistiska metoder och instrument, han var den förste som översatte Euklides *Elementa* till italienska och han översatte Arkimedes arbeten till latin. Han står staty i Rom.

Girolamo Cardano (1501–76) föddes utom äktenskapet i Milano. Hans far var till yrket advokat men han var också en erkänt duktig matematiker. Han undervisade i geometri först vid universitetet i Padua och sedan vid Piattiinstitutet i Milano. Han var dessutom rådgivare åt Leonardo da Vinci i frågor om geometri. Han var i femtioårsåldern när han träffade Girolamos mor som var änka med tre barn. De gifte sig några år efter Girolamos födelse.

Som ung var Girolamo assistent åt sin far. Så småningom började han studera medicin först vid universiteten i Pavia och Padua. Girolamo var en lysande student men samtidigt frispråkig och han drog sig inte för att framföra kritiska synpunkter. Han upplevdes av många som arrogant. Han blev emellertid så småningom vald till rektor vid universitetet i Padua.

När Cardanos far dog fick han ett arv som han snart gjorde slut på. Han försökte dryga ut inkomsterna med spelande. Hans kunskaper i matematik gjorde att han kunde värdera chanserna för att vinna och riskerna för att förlora. Han kunde genomskåda vilka alternativ som var mest troliga och satsa på dem. Under några år vann han mer än han förlorade. Till slut hjälpte emellertid inte hans förmåga att räkna. Trots allt var spelen oförutsägbara och även om det var troligt att han skulle vinna så var det inte säkert. Slumpen var inte på hans sida och han var tvungen att sälja sin hustrus juveler och deras dyrbara möbler för att betala sina spelskulder. Det gick så långt att familjen fick flytta till fattighuset. Men lyckan vände snart. Redan efter några månader fick Cardano en tjänst som matematiklärare vid Piattiinstitutet i Milano.

Cardano var nu 33 år och tjänsten vid Piattiinstitutet blev en vändpunkt i hans liv. På lediga stunder kunde han dryga ut sina inkomster med hjälp av sina medicinska kunskaper. Han hade studerat medicin och hade doktorerat då han var 24 år men hans ansökan om att bli invald i stadens läkarsällskap och därmed bli legitimerad avslogs gång på gång. Hans frispråkighet och arrogans hade skaffat honom alltför många fiender. Formellt motiverades avslagen med att Cardano var född utanför äktenskapet. Det var svårigheterna att försörja sig som läkare som delvis hade lett honom till spelande. Men nu hade han en fast tjänst som matematiklärare och han praktiserade på fritiden som läkare trots att han inte var godkänd av sina kollegor. Han var skicklig och fick allt fler patienter och patienterna var förmögna och inflytelserika. Hans rykte spreds långt utanför Italiens gränser och den skotske ärkebiskopen John Hamilton kallade honom till sig för att bota sin astma. Till slut blev Cardanos medicinska kunskaper så omvittnade att läkarförbundet inte längre kunde neka honom medlemskap.

Cardano blev också ryktbar som matematiker. Han publicerade 1537 två böcker om det nya decimalsystemet som hade revolutionerat aritmetiken. Han ägnade sig under ett antal år att försöka lösa tredje- och fjärdegradsekvationer. Vi har tidigare beskrivit hur Cardano 1539 tog kontakt med Tartaglia, efter dennes seger i tävlingen mot Fior, för att få reda på hans metoder och hur Tartaglia först vägrade men så småningom avslöjade den formel han använde mot att att Caradano lovade att inte föra den vidare. När Cardano tillsammans med sin elev Ferrari upptäckte att del Ferro trettio år tidigare hade samma metoder ansåg han sig löst från sitt tysthetslöfte och presenterade den algebraiska lösningen av tredjegradsekvationen i det som skulle bli han stora verk *Ars Magna*. I den publicerades också lösningen på fjärdegradsekvationen som Ferrari hade upptäckt några år tidigare. Cardano framhåller i texten att del Ferro, Tartaglia och Ferrari är de egentliga upphovsmännen till lösningarna.

Figur 6.6: Titelbladet på Cardanos *Ars Magna* med ett porträtt av författaren. (Bild: `2UR2DHy`)

I *Ars Magna* räknar Cardano med negativa tal. De uppkommer som rötter till ekvationer. Men inte nog med. Han räknar också med kvadratrötter av negativa tal. Det är i *Ars Magna* som komplexa tal förekommer för första gången. Cardano ställer problemet: ”Bestäm de tal för vilka summan är 10 och produkten 40”. Lösningarna är

$$5 + \sqrt{-15} \quad \text{och} \quad 5 - \sqrt{-15}$$

med våra beteckningar och Cardano räknar med dem trots ”den intellektuella plåga det innebär”.

Det blev några framgångsrika år som matematiker och läkare i Milano men redan 1542 hade han sagt upp sig från sin tjänst som matematiklärare till förmån för Ferrari. Han började undervisa i medicin vid universiteten i Milano och Padua och under flera perioder ägnade han sig på heltid åt spelande men utan att äventyra sin ekonomi.

När han var drygt femtio år började han arbeta med en bok om hasardspel. Spelandet hade varit en stor del av hans liv och det blev ett sätt att glömma. Han hade haft motgångar och varit invecklad i många stridigheter. Hans äldste son hade av svartsjuka mördat sin fru och blivit kastad i fängelse, torterad och avrättad. Han skriver:

> ”. . . i tider som präglas av stor fruktan och sorg, när även de största av själar är djupt oroade, är hasardspel vida effektivare för att motverka ångest än spel som schack, eftersom det finns en ständig förväntan vad ödet kan ha i beredskap . . .”

Han skriver också om de svåra erfarenheterna:

> ”... förluster innebär förlorat anseende, speciellt för den som tidigare haft mycket gott renommé; till detta kan läggas tidsförlust ... försummelse av de egna affärerna, faran av att spelandet blir en inrotad vana, tiden som går åt att efter spelet planera hur man kan vinna tillbaka förlusterna och erinra sig hur illa man spelat.”

Efter att ha diskuterat de psykologiska och sociala sidorna av spelande tar han itu med de matematiska. Han beskriver graden av rättvisa och ger ett rättvist spel graden 1. Om man kastar en tärning och en spelare satsar på att antalet ögon är jämnt och den andra på att antalet ögon är udda så är spelet rättvist förutsatt att tärningen inte är manipulerad utan helt symmetrisk. Om den ene spelaren satsade på att antalet ögon är fler än två och den andra att de är högst två så är inte spelet rättvist. Han sätter graden av rättvisa till $2/3$.

Boken, som fick titeln *Liber de ludo aleae* blev så småningom färdig men Cardano lät aldrig trycka den. Kanske ansåg han att intresset var för litet och kostnaderna för höga. Den blev liggande och först hundra år senare upptäckte man manuskriptet och boken publicerades 1663. Verket betraktas som det första verk som systematiskt försökt mäta grader av sannolikheter.

Även vid hög ålder var Cardano kontroversiell och han kunde inte låta bli att utmana den tidens konventioner. År 1570 blev han satt i fängelse för hädelse. Han hade skrivit ett horoskop för Jesus Kristus och publicerat en bok där han lovordade **Nero**, kejsaren som ägnade sig åt tortyr av de kristna martyrerna. Cardano släpptes emellertid efter bara några månader men förbjöds att publicera sig och bannlystes från tjänster vid universitet.

Cardano dog i Rom den 21 september 1576. Han blev 75 år. Det sägs att han förutsade den exakta dagen för sin död men ryktet säger också att han begick självmord.

Lodovico Ferrari (1522–65) föddes i Bologna. Hans far mördades och han togs om hand av sin farbror. Farbroders son Lodovicos kusin var äventyrslysten, rymde hemifrån till Milano där han fick arbete som betjänt till Cardano. Kusinen trivdes inte och åkte tillbaka hem till Bologna. Cardano kontaktade Lodovicos farbroder och bad honom skicka tillbaka den betjänt han anställt, men farbrodern skickade istället Lodovico.

Lodovico anlände till Cardanos hem som fjortonåring och började sitt arbete som betjänt. Cardano insåg snart att Lodvico var begåvad och han befriades från enkla göromål och blev Cardanos sekreterare. Cardano började undervisa Lodovico i matematik. Så småningom började Lodovico hjälpa Cardano med hans manuskript och han blev mer och mer involverad i Cardanos arbete. Åt 1540 hittade han en metod för att lösa fjärdegradsekvationer men metoden förutsatte att man behärskade tredjegradsekvationen så Ferraris upptäckt kunde inte publiceras förrän 1543 i *Ars Magna*. År 1541 avgick Cardano från sin tjänst som matematiklärare vi Piattiinstitutetet och han efterträddes av den då 19-årige Ferrarri, som hade varit en mycket lojal medarbetare. Som vi tidigare nämnt tog han Cardano i försvar med anledning av Tartaglias anklagelser.

Vi har tidigare beskrivit Ferraris roll i striden i samband med publiceringen av lösningen av tredjegradsekvationen och som slutade med Ferraris seger över Tartaglia i en tävling 1548. Segern gav eko i samhället och han översvämmades av anbud. Han antog ett anbud som ekonomisk rådgivare åt guvernören i Milano. Han slutade tjänsten efter ett antal år som en rik man och återvände till sin hemstad Bologna. Han kallades till en professur i matematik vid universitetet i Bologna 1565 men avled strax efter det han börjat sina nya tjänst.

Rafael Bombelli (1526–72) föddes i Bologna. Han var äldst av sex syskon. Fadern var köpman och handlade med textilier och modern var dotter till en skräddare. Rafael hade ingen universitetsutbildning. Han gick i lära hos en känd ingenjör och tillsammans med denne deltog Bombelli i lyckosamma restaureringar av våtmarker i norra Italien. Han fick gott rykte och engagerades i en rad uppdrag som ingenjör.

Bombelli var tidigt intresserad av matematik men det är oklart hur han började lära sig mer avancerad matematik. Norra Italien där Bombelli växte upp var då ett matematiskt centrum med dramatiken kring de algebraiska lösningarna till tredje- och fjärdegradsekvationer. Det var kanske inte så konstigt att en begåvad ung man kom att intressera sig för matematik. Han tyckte att del Ferros, Tartaglias, Cardanos och Ferraris arbeten skulle samlas och framställas så att de blev begripliga för en större krets. Han var en stor beundrare av Cardanos *Ars Magna* men ansåg samtidigt att framställningen var alltför svår och att den bara riktade sig till ett fåtal specialister. I ett uppehåll mellan två ingenjörsarbeten bestämde han sig för att skriva en bok i algebra där resultaten presenterades mer överskådligt och med mer struktur.

Vid ett av Bombellis besök i Rom visade en vän, som var lärare i matematik vid universitetet i Rom, honom ett manuskript av Diofantos *Arithmetica*. De blev imponerade och planerade att göra en översättning. Den blev emellertid inte av men Bombelli lånade material från *Arithmetica* till den bok han höll på att skriva. Boken *L'agebra opera* planerades omfatta fem delar och de tre första kom ut 1572. Han angav i förordet att han lånat material från Diofantos.

Bombelli dog bara några månader efter det att de tre första delarna av hans algebrabok kom ut och han hann aldrig fullborda de två sista. Manuskript till dem återfanns i ett bibliotek i Bologna 1923 och det trycktes två år senare. Några av de geometriska metoder som Bombelli använder där har stora likheter med dem som Omar Khayyam använde.

I *L'algebra opera* ger Bombelli struktur åt de landvinningar som gjorts av hans landsmän några decennier tidigare. Han räknar systematiskt med negativa och komplexa tal. I *L'algebra opera* finner man teckenreglerna ”plus gånger plus ger plus”, ”plus gånger minus ger minus”, ”minus gånger plus ger minus” och ”minus gånger minus ger plus”. Den sistnämnda regeln, som är ett problem att motivera i dagens elementarundervisning, visar Bombelli geometriskt. Bombelli inför också addition och multiplikation av komplexa tal. Han inför också ändamålsenliga beteckningar och förkortningar vilket gör framställningen mer överskådlig. Hans beteckningssystem överensstämmer inte med vårt men det är angeläget att påpeka att boktryckarkonsten trots allt inte var så gammal och att införa typer för speciella matematiska tecken kunde vara kostsamt. Än idag kan det vara bekymmer med matematiska symboler i ordbehandlingssystem.

Bombelli använde negativa tal och komplexa tal för att skapa struktur åt ekvationslösning. Därigenom kunde Tartaglias, Cardanos och Ferraris lösningar till tredje- och fjärdegradsekvationerna ges en mer enhetlig form. Det kan synas märkligt att det är en ingenjör med förankring i högst reella och vardagliga problem som till fullo accepterar de abstrakta komplexa talen. Han såg hur de kunde användas för att skapa överskådlighet och enhetlighet. Bombellis *L'algebra opera* är viktigt steg mot den mer symboliska algebran som skulle vara en förutsättning för matematikens utveckling under de närmaste seklerna.

Francois Viète (1540–1603) föddes i Fontenay-le-Comte ett litet samhälle i västra Frankrike elva mil söder om Nantes. Hans far var jurist och det var naturligt att också Francois började studera juridik. Han tog examen 1560 vid universitetet i Poitier och arbetade som jurist i fyra år. Han bytte inriktning och försörjde sig under perioden 1564–70 som informator. Han flyttade till Paris 1570. Trots att han aldrig var anställd vare sig som vetenskapsman eller matematiker arbetade han kontinuerligt med frågeställningar i matematik och astronomi och han publicerade sitt första matematiska arbete 1571.

Frankrike skakades under andra halvan av 1500-talet av de s.k. hugenottkrigen mellan olika katolska fraktioner och de protestantiska hugenotterna. Trots att Viète var hugenott utnämnde den katolskvänlige **Karl IX** honom till guvernör i Bretagne 1573. Karl IX efterföljare **Henrik III** hade en mer liberal syn på religiösa frågor och Viète anställdes som rådgivare åt kungen och fick också en plats i parlamentet. När Henrik III dog ökade spänningarna mellan olika religiösa och politiska grupperingar och Viète drog sig tillbaka sin hemstad Fontenay-le-Comte. Under fem år kunde han ägna sig helt åt matematik och det var under denna tid han gjorde sina viktigaste insatser i ämnet.

Figur 6.7: Francois Viète. (Bild: `3fwnIiz`)

Viète kallades 1589 tillbaka till Paris som rådgivare åt Henrik IV eller **Henrik av Navarra**. Den nya kungen var protestant men han övergick 1592 till katolicismen och Viète följde hans exempel. Henrik IV omvändelse, som förmodligen var mer politisk än religiös, betecknas som slutet på hugenottkrigen. Dessförinnan hade Frankrike utkämpat ett krig mot det katolska Spanien. Under det hade Viète utmärkt sig genom att forcera krypterade spanska meddelanden som fransmännen kommit över. Viète var i kungens tjänst till 1597 då han flyttade hem till Fontenay-le-Comte. Han återkom till Paris och var i tjänst några år men 1600 avskedades han av kungen. Han dog i Paris två år senare.

Även om Viète inte var matematiker till professionen så var han produktiv inom ämnet. År 1571 publicerades *Canon Mathematicus* som behandlar matematik som är viktig vid studiet av astronomi, bl.a. trigonometri. Det verk som han är mest känd för och som är banrytande är *In artem analyticam isagoge* som kom ut 1591. En svensk översättning av titeln är ”Introduktion till den analytiska konsten”. Den handlar bl.a. om ekvationslösning och Viète betecknar obekanta och bekanta storheter med bokstäver och han räknar också med dem. Tidigare matematiker som Al Khwarizmi och Cardano formulerade sina ekvationer med ord eller ibland med förkortningar. Bombelli använde mer systematiskt förkortningar. Men Viète går alltså ett steg längre och räknar med symbolerna. Ett exempel får belysa Viètes metoder. Det är hämtat från en engelsk översättning *In artem analyticam isagoge* från 2006 som jag i min tur översatt till svenska.

> ”En ekvation ändras inte vid reduktion.
>
> Låt
> $$BA^2 + D^p A = Z^s.$$
> Då påstår jag att
> $$A^2 + \frac{D^p A}{B} = \frac{Z^s}{B}$$
> eftersom alla volymerna dividerats med samma divisor, som, och det har fastslagits, inte ändrar en ekvation.”

Viète skriver alltså om en ekvation genom att dividera alla termer med ett och samma tal. För oss är detta en vanlig och enkel procedur. Men att räkna med symboler var då något nytt och det skulle visa sig vara mycket effektivt. Det är början till den symboliska algebran. Det måste anmärkas att vårt exempel är en förenkling av Viètes text. Han använder inte likhetstecken och plustecken utan motsvarande latinska ord. Han avvänder inte heller exponenter utan skriver ”A kvadrat”. Exponenterna p och s skall tolkas som att D är en plan storhet och Z är en volym. Viète var mycket noga med att alla termer i en likhet skulle ha samma dimension. Han tillät inte additioner av t.ex. areor och längder vilket var fallet i flera av de ekvationer som Cardano arbetade med.

I *In artem analyticam isagoge* löser Viète tredje och fjärdegradsekvationerna algebraiskt, han visar också hur man kan lösa dem numeriskt och han känner till sambandet mellan rötter och koefficienter. Ordet ”koefficient” har för övrigt Viète som upphovsman.

År 1592 undervisade Viète i matematik vid universitetet i Tours och året efter gav han ut böcker om geometri och trigonometri. Han diskuterade kubens fördubbling och vinkelns tredelning, konstruerade tangenter till Arkimedes spiral, beräknade π med 10 decimaler samt visade hur man kan framställa π som en oändlig produkt.

Viète har kommit att kallas algebrans fader och hans metoder banar väg för en ny era i matematiken. Det måste emellertid sägas att han inte var ensam om sina idéer. En engelsman **Thomas Harriot** (1560–1621) presenterade ungefär samtidigt liknande metoder men man vet att Harriot har tagit del av Viètes arbeten och det kan vara så att att de utbytt tankar brevledes. Två matematiker från olika länder gör under samma period liknande banbrytande insatser inom algebra. Tiden var kanske helt enkelt mogen för den symboliska algebran. Om inte dessa båda lanserat den hade förmodligen någon annan gjort det.

Peter Ramus (1515–72) föddes i Vermandois i norra Frankrike. Hans föräldrar var visserligen adliga men de måste försörja sig som arbetare. De förlorade alla sina medel när Liège förstördes under fransk-burgundiska kriget 1465–8. Peter Ramus undervisades hemma till dess han blev 12 år då han började studera vid Collège de Navarra i Paris. Han tog magisterexamen 1536 då han försvarade en avhandling om Aristoteles.

Efter magisterexamen undervisade Ramus i filosofi vid olika collège i Paris. Han var starkt kritisk mot Aristoteles och speciellt mot hans logik. Han publicerade sin kritik i tre arbeten från 1543 och det medförde att han av **Frans I** förbjöds undervisa i filosofi. Han övergick då till att undervisa i matematik. Eftersom pestens härjningar hade åderlåtit lärarkåren fanns många vakanser och han kunde återgå till läraryrket. Frans I efterträddes av **Henrik II** och han hävde bannlysningen av Peter Ramus, som anställdes vi Collège de Presle där han så småningom blev dess föreståndare. Han började publicera sig igen. Trots att han skrifter var kontroversiella utnämndes han 1551 till professor i filosofi och vältalighet vid Collège de France.

Ramus blev mer och mer politiskt och religiöst engagerad och det gjorde avtryck i hans undervisning. Han konverterade från katolicismen till kalvinismen. Han föreslog en mängd förändringar av undervisningen och organisationen av universitetet i Paris. Han var övertygad om att matematiken var fundamental för allt lärande och han föreslog att en professur i ämnet skulle inrättas vid universitetet och senare skulle han bekosta en sådan med egna medel.

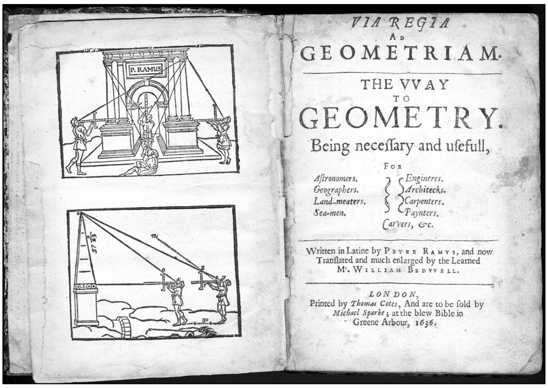
När hugenottkrigen bröt ut 1562 tvingades Ramus, som var protestant, fly från Paris. Året därpå hade situationen förbättrats för protestanterna och Ramus kunde återvända. Han sökte en tjänst i matematik men den gick till en av hans konkurrenter. Han överklagade men förlorade. När de religiösa spänningarna ökade 1567 såg sig Ramus nödsakad att en gång fly från Paris. Situationen för kalvinsterna försämrades men trots det återvände han till Paris bara för att finna sitt bibliotek vandaliserat. Han fick tillstånd att resa till Tyskland och var där i två år. Läget i Paris verkade då ha förbättrats. Den 23 augusti 1572, en dag som tillägnats helgonet Bartolomeus, hade tretusen hugenotter samlats i Paris för att fira bröllopet mellan Henrik av Navarra och **Marguerite de Valois**. På Bartolomeinatten mördades de och massakern var godkänd av **Karl IX**. Ramus blev mördad i sitt hem på femte våningen och hans kropp kastades ned från fönstret.

Peter Ramus dog som en martyr för protestantismen och det bidrog förmodligen till att hans verk fick stor uppmärksamhet. De trycktes i nya upplagor och fick långt in på 1600-talet stor betydelse i akademiska kretsar i Storbritannien, i Tyskland och i New England på den nordamerikanska kontinenten. Hans efterföljare kallas ofta *ramister*.

Vad betydde då Ramus för matematiken? Det finns inga tecken på att han gjorde några nya rön inom ämnet. Hans betydelse ligger på det pedagogiska planet och han ansåg att undervisningen inte bara i matematik utan rent generellt behövde förnyas. Han hade också periodvis en ställning som innebar att han kunde genomföra åtminstone några av sina idéer. Ramus beskrev sin metod i allmänna termer på följande sätt:

> ” . . . olika ting måste organiseras så att hela ämnet lättare kan förstås och läras ut.”

Ramus skrev läroböcker i aritmetik och geometri. Han var angelägen om att teorin skulle knytas till praktiken. Det skulle vara de praktiska behoven som skulle styra innehåll och metodik i undervisningen. Han studerade också de metoder som hantverkare och handelsmän använde för att få material till sina läroböcker. Han var ingen vän av Euklides *Elementa* som han uppfattade som alltför teoretisk. Stränga bevis hade liten betydelse för Ramus. Han ansåg förvisso att teori var viktigt men den skulle knytas till tillämpningar.



Figur 6.8: Bilden till vänster är ett porträtt av Peter Ramus och till höger ser vi titelsidan i en av hans läroböcker i geometri. (Bild: `3OSvFdK`, `3ftGVkM`)

Även i Sverige kom Ramus läror att få betydelse för matematikämnet men först på 1600-talet. **Sten Lindroth** skriver i *Svensk lärdomshistoria*:

> ”Först kring 1600 började aritmetiken och geometrin utövas med något allvar, vi får äntligen en matematisk litteratur. Med stadsnäringarnas och det handlande borgerskapets frammarsch ökade behovet av matematiska hjälpredor för det ekonomiska livets behov. Samtidigt florerade ramismen med sin hänförelse för matematiken som den samhällsnyttigaste av alla vetenskaper. De första matematiker i modern mening var ramistiskt skolade och detsamma gäller författarna av våra äldsta räkneläror för skolbruk.”

Robert Recorde (1510–58) föddes i Wales och fick möjligheter att studera medicin i Cambridge och Oxford och det är troligt att han också undervisade där. Så småningom flyttade han till London där han praktiserade som läkare. Han kom att uppmärksammas av ledande ämbetsmän och blev besiktningsman för silvergruvor i Wetford. Han var också kontrollör vid myntverket i Bristol och var den förste i England att prägla mynt med hinduarabiska siffror i stället för romerska.

Mitten av 1500-talet var en turbulent tid i Englands historia. I det allmänna tumultet blev Recorde anklagad för förtal och dömd till böter. Förmodligen kunde han inte betala bötessumman eftersom han sattes i fängelse 1557 där han dog året därpå.

Parallellt med verksamheten som läkare och med övriga uppdrag skrev Recorde läroböcker i framför allt aritmetik och men också i geometri. De mest kända är *The Ground of Artes* och *The Whetstone of Witte*. Ordet ”Whetstone” är namnet på en slipsten som används för att vässa rakknivar. Bokens titel talar alltså om att innehållet är ett redskap för att skärpa tanken. Det kan anmärkas att det är i detta verk som likhetstecknet införs och används för första gången.

Det är uppenbart att Recorde måste ha haft erfarenheter som lärare. Alla hans läroböcker utom den i geometri är utformade som dialoger mellan lärare och elev. Dialogerna visar förtrogenhet med elevernas sätt att tänka och de ger honom möjligheter att förklara och motivera de metoder som han vill lära ut. Detta står i kontrast till de flesta andra läroböcker där algoritmer och metoder presenteras och exemplifieras utan närmare diskussion. De flesta av Recordes dialoger handlar om hur man tillgodogör sig matematisk kunskap och teknik. Läraren låter eleven ställa frågor så att läraren för möjlighet att förtydliga och han låter eleven göra fel så läraren för möjlighet att rätta. Ett avsnitt i *The Ground of Artes* handlar om nyttan med aritmetik. Eleven tycker det verkar meningslöst att lära sig matematik. Det utspinner sig en dialog och läraren lyckas till sist övertyga eleven om vikten av att kunna räkna. Slutet av dialogen får illustrera både Recordes framställningskonst och hans pedagogiska idéer.

> ”Eleven: . . . Nu ber jag er istället att ge mig del av denna förträffliga lärdom så att jag kan dra nytta av den. . . .
>
> Läraren: Jag är mycket glad åt din begäran och skall genast gå till verket eftersom du är så ivrig att lära dig detta.
>
> Eleven: Då lovar jag att helt underkasta mig er auktoritet och hålla allt vad ni säger för sant.
>
> Läraren. Det är för mycket; ingen bör bli trodd i allt utan att framlägga sina skäl. Även om jag vill att min elev skall sätta tro till vad jag säger, så gäller det endast när jag ger belägg för mina påståenden. . . .”

Den sista kommentaren speglar Recordes syn på undervisning. Den får aldrig bli auktoritär.

Simon Stevin (1548–1620) föddes i Brügge i nuvarande Belgien. Hans föräldrar var inte gifta. Hans mor gifte sig senare med en mattförsäljare som var kalvinist och Simon uppfostrades i kalvinistisk anda.

Några ord om det politiska läget i Nederländerna under denna tiden ger en bakgrund till Stevins verksamhet. Området som då omfattade både nuvarande Holland och Belgien stod under spanskt styre. Spanien var katolskt men i den norra delen av Nederländerna var majoriteten av invånarna kalvinister och stridigheter mellan katoliker och de protestantiska kalvinisterna kom att prägla Nederländerna under stora delar av 1500-talet. År 1568 ledde konflikterna till det som skulle komma att kallas för det åttioåriga kriget. En av de ledande krigsherrarna var **Vilhelm av Oranien**. Han tjänstgjorde först för den spanske kungen men kom senare att ta parti för de protestantiska rebellerna. Han mördades 1584 av en katolsk sympatisör men av hans söner, **Moritz av Oranien**, tog några år senare över ledningen för rebellernas armé. Kriget slutade i och med den Westfaliska freden 1648 då Spanien gav upp sin överhöghet över Nederländerna.

Stevin gjorde i sin ungdom resor i Nordeuropa. Han återvände till Brügge och arbetade som tjänsteman mellan 1577 och 1581. Han sökte sig därefter norrut till Leiden där han började studera vid stadens universitet. Det finns inga bevis på att Stevin tog någon examen men han blev bekant med Vilhelm av Ornaiens son Moritz och det blev avgörande för hans fortsatta verksamhet. Han kom att bli generalkvartermästare åt Moritz armé med bland annat ansvar för landets väg- och vattenbyggnader. Stevin kom emellertid att bli mer än ingenjör och administratör. Han var också militär, uppfinnare, matematiker, fysiker och ekonom. Han var välkänd i Europa och han brevväxlade bland annat med den svenska kungen **Gustaf II Adolf**.

Inom fysiken skrev han om jämviktsproblem och han introducerade kraftparallellogrammen. Han hade, före Galilei, teorier om det lutande planet och han hade ett embryo till energisatsen. Han visade också att kulor av olika tyngd i fritt fall på samma tid tillryggalägger samma sträckor, också detta före Galileis berömda försök.

Han skrev en rad böcker om matematik. Det verk som var mest banbrytande och med vilket Stevin skrev in sig i matematikens historia är ett litet häfte på 29 sidor och som hade titeln *La Thiende* (”Tiondet”). I den introducerade Stevin decimalbråken i Europa. I arabvärlden och i Kina hade de använts sedan länge. I förordet skriver han att han att har givit ut boken;

> ”. . . till nytta för stjärnskådare, lantmätare, mattillverkare, vinhandlare, mynträknare och alla sorters köpmän.”

Stevin skrev så gott som alla sina böcker på holländska. Han förespråkade att vetenskaplig litteratur skulle skrivas på modersmålet för att fler skulle kunna ta del av innehållet. Endast en av hans böcker – en bok om aritmetik – är skriven på franska. En bok om geometri är inspirerad av Euklides och Arkimedes men också av Dürer.

Förutom böcker om matematik och fysik skrev Stevin böcker om byggnadskonst och om navigering. Han diskuterade i några arbeten hur medborgare skulle förhålla sig till myndigheter och han skrev en bok om sångteknik.

Stevin blev en förmögen man. Sina sista år tillbringade han tillsammans med sin fru i Haag där han avled 1620.

John Napier (1550–1617) föddes på Merchistor slott nära Edinburgh. Hans far var lord och en högt uppsatt man i Skottland. Hans mor var syster till biskopen på Orkney. John skrevs in vid S:t Andrews universitet i Edinburgh när han var tretton år. Han avlade inte någon examen och troligen fortsatte han sina studier i Europa. Han återvände hem 1571 för att planera sitt giftemål. Då hade han fått ta över de flesta av familjens egendomar och han bosatte sig med sin fru i ett slott i Gartness i södra Skottland. Han engagerade sig i förvaltningen av ägorna och prövade nya mer vetenskapliga jordbruksmetoder.

Figur 6.9: John Napier. (Bild: 2YIPBx3)

Napier hade under sina studier i Edinburgh fått ett stort intresse för teologi och deltog aktivt i den tidens religiösa dispyter och varnade för att katolicismen skulle återta den religiösa makten i Storbritannien. Han blev känd genom sina kommentarer till Uppenbarelseboken *Plaine Discovery of the Whole Revelation of St. John* som är skriven i strikt matematisk logisk form med definitioner, postulat och bevis. Han härleder bl.a. att påven är antikrist och att jordens undergång kommer att äga rum mellan 1688 och 1690. Boken kom ut 1593 och fick stor spridning. Den översattes till holländska, tyska och franska.

Matematiken var en hobby för Napier och han studerade bl.a. sfäriska trianglar. Han använde sig av decimalbråk men fann att det var svårt att mellan de dagliga plikterna hinna med att göra de beräkningar som behövdes. Rutinmässiga multiplikationer, divisioner och kvadratsrotsberäkningar tog kraft och tid. Han skapade ett system med räknestavar som underlättade multiplikation. Men det är genom logaritmerna som han kom att revolutionera räknetekniken. Det sker i verket *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* som gavs ut 1614. Titeln kan översättas med ”Beskrivning av de underbara logaritmerna” och i förordet skriver han:

> ”Då det (högt älskade studenter i matematik) inte är någonting som är till så mycket besvär och är så störande och hindrande för den som räknar än multiplikationer, divisioner, kvadrat- och kubikrotsberäkningar av stora tal, som förutom att de är tröttsamma och tidsödande också är en källa till många slarvfel, började jag fundera på hur jag skulle kunna eliminera dessa hinder. Efter många funderingar fann jag till slut några utmärkta och koncisa regler som hädanefter (kanske) kan användas. Det visar sig vara lönsamt att ersätta talen med andra tal så att multiplikationer, divisioner och rotutdragningar motsvaras av addition, subtraktion och divisioner med 2 och 3 för de nya talen.”


MIRIFICI
Logarithmorum
Canonis descriptio,
Ejusque usus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
omni Logistica Mathematica,
Amplissimi, Facillimi, &
expeditissimi explicatio.
Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchistonii,
&c. Scoto.
EDINBURGI,
Ex officinâ ANDREÆ HART
Bibliopôlæ, CIↃ. DC. XIV.

MIRIFICI
Logarithmorum canonis descriptio, eiusque usus in utrâque Trigonometria, ut etiam in omni Logistica mathematica, amplissimi, facillimi, & expeditissimi explicatio.
LIBER I.
CAPVT. I.
De Definitionibus.
1. Def. Linea æqualiter crescere dicitur, quum punctus eam describens, æqualibus momentis per æqualia intervalla progreditur.
Sit punctus A, à quo ducenda sit linea fluxu alterius puncti qui sit B. fluat ergo primo momento B ab A in C.
B Secun-

Figur 6.10: Titelsidorna till två upplagor av *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. (Bild: 2XQSWLm)

Ordet ”logaritm” kommer från de båda grekiska orden ”logos”, som i detta fall kan översättas med ”förhållande”, och ”arithmos”, som kan översättas med tal. Napier skapade en tabell där till varje tal ordnades ett nytt tal det ursprungliga talets logaritm. Logaritmen för ett tal x är med vårt sätt att se det tal y ett givet tal a, logaritmens bas, skall upphöjas till för att vi skall få x d.v.s. vi har

$$a^y = x.$$

De vanligaste baserna är idag e, som ger de s.k. naturliga logaritmerna, samt 10 och ibland 2.

Napier hade inte tillgång det algebraiska symbolspråk som vår definition förutsätter. Han gav en geometrisk definition och tänkte sig två sträckor AB, som inte är begränsad, och $A'B'$ som är begränsad. En punkt P rör sig från A med konstant hastighet på den första linjen. En annan punkt P' rör sig på den andra linjen med samma utgångshastighet som den första men hastigheten avtar så att den är proportionell mot avståndet $P'B'$. Då är längden av $A'P'$ lika med logaritmen för AP. Det visar sig att logaritmen för en produkt av två tal är lika med summan av talens logaritmer och logaritmen av en kvot mellan två tal är skillnaden mellan talens logaritmer.

Med våra beteckningar skulle de logaritmer Napier definierat ha basen $1/e$. Vidare antog Napier att sträckan $A'B'$ var lika med 10 000 000. *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* gav eko i den vetenskapliga världen och verket översattes till engelska. I London lästes det av Henry Briggs som var professor i geometri vid Greshams college i London. Briggs insåg att det beräkningsarbete som krävdes för att utarbeta tabellerna skulle förenklas om man istället använde 10 som bas och satte utgångsvärdet logaritmen för 1 lika med 0. Briggs föreslog Napier en sådan ändring och Napier svarade att han själv hade tankar åt det hållet men att han nu var för sjuk för att genomföra det arbete som krävdes. Briggs besökte Napier två gånger 1615 och 1616 för att diskutera arbetet och det skulle ha blivit ett tredje besök 1617 men Napier dog på våren samma år.

Henry Briggs (1561–1630) föddes i Halifax i Yorshire. Efter studier vid ett lokalt läroverk började han studera vid Saint Johns College vid universitetet i Cambridge 1577 och avlade magisterexamen där 1585. Han började föreläsa i fysik vid samma lärosäte 1592. År 1596 utsågs han som den förste professorn i geometri vid det då nybildade Gresham College i London. Han kom att föreläsa där i nästan 23 år och kom att bli en av de engelska auktoriteter som stödde Keplers teorier om planetrörelserna.

Briggs ägnade en stor del av sin tid åt astronomi och han var speciellt intresserad av solförmörkelser. Undersökningarna kom att leda till tidsödande och tunga beräkningar. Det var under denna tid som Briggs kom i kontakt med Napiers *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* och han förstod vilket underbart hjälpmedel logaritmerna innebar. Han tog, som vi tidigare nämnt, kontakt med Napier och gjorde två resor till Edinburgh för att personligen träffa Napier. Han hade då kommit till slutsatsen att tabellerna skulle förenklas om man istället använde basen 10 och lät utgångsvärdet logaritmen för 1 vara lika med 0. Napier höll med om detta men avled innan Briggs hann färdigställa tabellerna. Den första versionen, *Logarithmorum Chilias Prima* (”Logaritmerna för de första tusen talen”), kom ut 1617. År 1624 publicerades *Arithmetica Logarithmica* som innehöll logaritmerna för talen 1 till 20 000 samt 20 000 till 100 000 med 15 decimaler. I verket finns också logaritmerna för trigonometriska funktioner med 10 decimaler. Nio år senare gav Briggs ut *Trigonometria Britannica* där han lagt till logaritmerna för talen 20 000 till 90 000 med 15 decimaler.

Briggs arbetade inte bara med logaritmerna under sin tid som professor. Han gav ut en upplaga av Euklides *Elementa*. Han skrev arbeten inom geometri och aritmetik som aldrig publicerades bl.a. ett om cirkelns kvadratur. Briggs var mycket respekterad som professor i geometri och han bidrog också med en del resultat, men det var kanske mest på grund av sin sociala kompetens han åtnjöt ett sådant stort förtroende. I boken *Intellectual origons of the English revolution* från 1965 skriver författaren **C. Hill**:

> ”... även om Briggs var en självständig och betydande matematiker, så har hans största betydelse varit som kontaktskapare och informationsspridare.”

Det var kanske tack vare sina kommunikativa egenskaper som Briggs kunde samarbeta med Napier och avsluta dennes arbete med de tabeller som skulle revolutionera räknearbetet. Den franska matematikern **Pierre Simon de Laplace** skrev tvåhundra år senare att

> ”... logaritmerna genom att förkorta arbetet, kunde fördubbla astronomens liv.”

Hänvisningar till del 2 Peter Ramus insatser och Robert Recordes dialoger belyses ytterligare i avsnitt 12.4.7. I avsnitt 12.4.8 behandlas Stevins *De Thiende*. Avsnitt 12.5 ägnas åt logaritmerna. Avsnitt 14.3.1 ägnas åt Cardanos *Ars magna*, 14.3.2 åt Bombellis *L'Algebra* och 14.4 14.4 åt Viètes *In artem analyticam isagoge*.

Kapitel 7

1600-talet

De religiösa konflikterna mellan katoliker och protestanter ledde tillsammans med politiska stridigheter till det trettioåriga kriget som varade mellan 1618 och 1648. Det kom att prägla Europa under första halvan av 1600-talet. Det tysk-romerska riket, som bestod av ett antal större och mindre stater, kom efter reformationen att delas upp i två grupper, en katolsk och en protestantisk, och spänningarna mellan dem ledde till det långvariga kriget där inte bara tyska stater deltog utan också Frankrike, Spanien, Sverige och Danmark. Efter den Westfaliska freden 1648 ritades Europas karta om. Det tysk-romerska riket kom att minska i betydelse. Sverige blev en stormakt som inkluderade Finland, delar av de baltiska staterna och delar av Tyskland.

I Ryssland tillträder ätten **Romanov** tronen efter vad som kallas ”den stora oredans tid”. De kom att regera i över 300 år. I Frankrike är **Richelieu** rikskansler och han centraliserar makten till kungen och hans närmaste rådgivare. Han skapar förutsättningar för en envåldig monarki där kungen är ”konung av Guds nåde” med monarker som **Ludvig XIV** och **Ludvig XV**.

Det Holländska Ostindiska kompaniet bildas 1601 och Holland blev en ekonomisk stormakt. Ostindiska kompaniet etablerade sig i Nordamerika och grundade Nieuw-Amsterdam som senare intogs av engelsmännen och döptes om till New York. En rad krig om herraväldet över handeln, haven och kolonierna utkämpades mellan Holland och England. Det osmanska riket försökte utvidga sin makt. Efter ett svidande nederlag i slaget om Wien förlorade de i den efterföljande freden Ungern, Transylvanien och Slavonien till Österrike.

Under första delen av 1600-talet hade några av Shakespeares mest kända dramer som *Hamlet* och *Macbeth*, premiär. I Frankrike uppfördes **Molières** komedier och i Spanien gav **Miguel Cervantes** ut *Don Quijote*. Inom måleri och musik gjorde barocken sitt intåg med konstnärer som **Rembrandt Harmenszoon van Rijn**, **Johannes Vermeer**, **Frans Hals** och **Diego Velázquez** och kompositörer som **Claudio Monteverdi**, **Henry Purcell** och **Dietrich Buxtehude**.

Två av de tongivande filosoferna under 1600-talet gjorde också banbrytande insatser inom matematiken. År 1637 gav René Descartes eller Cartesius ut *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (”Avhandling om metoden att rätt vägleda sitt förstånd och söka sanningen i vetenskapen”), som ofta för enkelhets skull kallas *Discours de la méthode*, och i det verket återfinns de berömda orden ”Cogito ergo sum” eller ”Jag tänker alltså är jag till”. Tvivlet är centralt i hans teorier. Han granskar kritiskt både äldre teorier och sinnlig erfarenhet. Det går inte att tvivla utan att tänka och det går inte att tänka utan att finnas till. Han banar väg för en rad nya filosofer bland annat Gottfrid Wilhelm von Leibniz, som verkade under andra halvan av 1600-talet. För Leibniz är verkligheten uppbyggd obegränsat många oändligt små självständiga monader. I England hävdar filosofen **John Locke** (1632–1704) att vi får all vår kunskap genom erfarenheten. Han bekämpar ett patriarkaliskt kungadöme av Guds nåde och framhåller att statsmakten måste vara i folkets händer.

7.1 Något om utvecklingen i Sverige

Sverige blev som tidigare nämnts en stormakt under 1600-talet. Efter Gustav II Adolfs död blev hans dotter **Kristina** drottning, men hon var omyndig och en förmyndarregering under ledning av **Axel Oxenstierna** ledde landet. Axel Oxenstierna hade en central position under flera decennier och han genomförde ett stort antal reformer. Han lade bl.a. grunden till vår nuvarande länsindelning. Som regent var drottning Kristina intresserad av kulturella frågor och hon bjöd bl.a. in Descartes som gav henne lektioner i filosofi. Descartes dog på Stockholms slott 1650. År 1654 övergick drottning Kristina till katolicismen, abdikerade och flyttade till Rom, något som gav eko i Europas kulturella kretsar.

1600-talet innebar en islossning för utbildning och vetenskap i Sverige. Upppsala universitet öppnades efter att ha varit stängt under Gustav Vasas regemente. Lunds universitet grundas. **Olof Rudbeck** upptäckte lymfsystemet. Han anatomiska teater i Uppsala blev berömd, han grundade Uppsala botaniska trädgård och han skrev verket *Atlantica*, där han hävdar att Europas och en stor del av Asiens kultur utgått från Sverige. Det är också under början av 1600-talet som de första svenska läroböckerna i matematik ges ut. Den första dateras till 1601 och är skriven av **Hans Larsson Rizenansanders** och har titeln *Recknekonsten*. Den trycktes aldrig och ett handskrivet exemplar finns i Uppsala universitetsbibliotek Carolina Rediviva. År 2018 utgavs en tolkning av handskriften av matematikdidaktikern **Reza Russel Hatami** och historikern **Adam von Scheele**. Den första tryckta svenska räkneläran är **Ægidius Aurelius** *Arithmetica Eller Een Kort och Eenfaldigh Räknebook*, som gavs ut i elva upplagor mellan 1614 och 1705.

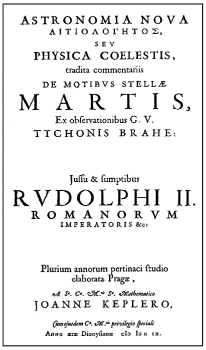
Hänvisningar till del 2 Exempel från Aurelius räknelära finns i avsnitten 12.4.2, 12.4.3 och 12.4.5.

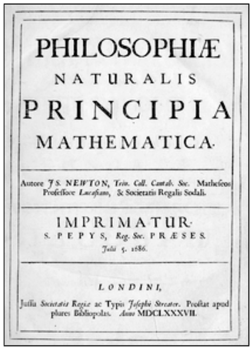
7.2 En ny världsbild

Två vetenskapliga giganter skulle i början av 1600-talet lägga grunden till en ny och logiskt sammanhängande förklaring av både planeternas rörelse på himlavalvet och av kroppars rörelse på jorden. Den tyske astronomen och matematikern **Johannes Kepler** publicerade två arbeten i början av 1600-talet, *Astronomia nova* ("Nya astronomin") (1609) och *Harmonices mundi* ("Världens harmoni") (1619) där han ger den modell av planetrörelserna som vi använder än i dag. Han formulerade tre lagar där den första säger att planeterna rör sig i elliptiska banor med solen i ena brännpunkten. De båda övriga beskriver planeternas hastigheter samt förhållandet mellan omloppstider och ellipsernas storaxlar. Modellen stämmer med experimentella iakttagelser. Genom att inte låsa sig vid att planetbanorna skulle byggas upp med hjälp av cirklar kunde Kepler formulera lagar som stämde med de observationer han utgick från. De problem som Ptolemaios brottades med för över femtonhundra år sedan och som gäckat många astronomer hade fått en lösning.

Den andre giganten, **Galileo Galilei**, kunde bekräfta teorierna genom observationer med en kraftfull kikare som han själv byggt. I en berömd skrift *Dialog om två världssystem* som gavs ut 1632 tog Galilei tydligt ställning för Keplers teorier och avfärdade den världsbild som var accepterad av den katolska kyrkan. Boken skapade kaos och Galilei kallades till inkvisitionen och fick ta tillbaka sina påståenden. Han fick husarrest och i den skrev han *Samtal och matematiska bevis rörande två nya vetenskaper*. Boken smugglades ut och publicerades 1638. I den senare ger han bl.a. teorier för kroppar i rörelse. Han studerar kroppar i fritt fall och han härleder kastparabeln.

Nästan femtio år senare, 1687, publicerar Isaac Newton sin berömda *Philosophiæ naturalis principia mathematica* (”Naturvetenskapens matematiska principer”), som ofta för enkelhets skull kallas *Principia*, där han härleder både Keplers lagar och Galileis rörelselagar. Newton inför begreppet kraft och formulerar ett antal grundläggande egenskaper hos kraftbegreppet som utgångspunkt för sina teorier. *Principia* är ett av de viktigaste verken som någonsin publicerats. Det har legat till grund för den klassiska mekaniken som fortfarande är en oundgänglig del av all undervisning i fysik och teknik. Teorin är deterministisk vilket t.ex. innebär att om man känner en kropps utgångsläge och de krafter som den påverkas av så kan man förutsäga dess förlopp. Verket fick därför en stor betydelse för filosofins utveckling. Kan man se världen som en maskin som en gång satts igång av någon okänd kraft och där förloppen är förutbestämt?





Figur 7.1: Tre verk som banade väg för en ny världsbild: Keplers *Astronoma Nova* med två av hans lagar, Galileis *Dialog om två världssystem*, samt Newtons *Principia*. (Bild: 2ChZ4E4, 30QCcpm, 3hEWNDd)

Kraftbegreppet är centralt i *Principia* och då speciellt gravitationskraften. En av Newtons teser är att två kroppar attraherar varandra och han ger en formel för hur stor attraktionskraften är. Det är gravitationskraften mellan solen och en planet som håller planeten i en elliptisk bana. Tanken var inte ny. Redan Kepler talade om en gudomlig kraft. Newton såg emellertid att samma kraft som höll jorden i en bana runt solen och som håller månen i en bana runt jorden också är orsak till att kroppar här på jorden faller till marken. Det sägs att tanken slagit honom när han såg ett äpple falla från ett träd. Det är med säkerhet en förenkling av det tankearbete som det måste ha inneburit att formulera gravitationslagen även i dess enklaste form, men den ger ändå en bra bild av vad det är fråga om. Gravitationslagen tillskrivs Newton men **Robert Hooke**, som var samtida med Newton och som också var en framstående vetenskapsman, ska ha haft samma idéer. Det var emellertid Newton som först publicerade sina teorier mycket tack vare en annan framstående vetenskapsman **Edmond Halley**, som var till stor hjälp med det praktiska arbete som en tryckning innebar.

Keplers, Galileis och Newtons arbeten handlar, som vi nämnt, om astronomi och mekanik. Hur kommer matematiken in i bilden? Både Kepler och Galilei använder matematiken för att beskriva och härleda sina resultat. Galilei skriver i *Il saggiatore* (”Analytikern”):

> ”Naturfilosofin är skriven i den stora bok som alltid ligger öppen inför våra ögon – jag menar universum; men den kan inte läsas förrän vi lärt oss språket och känner till de bokstäver med vilka den är skriven. Den är skriven på ett matematiskt språk och dess bokstäver är trianglar, cirklar och andra geometriska figurer och utan dessa hjälpmedel är det omöjligt för människan att förstå ett enda ord.”

Keplers och Galilei använder med stor skicklighet matematiken. De är väl förtrogna med klassiker som naturligtvis Euklides men också med Apollonius böcker om kägelsnitten. Men den klassiska matematiken räcker inte till för Newton. Han behöver skapa en sorts kalkyl för att på ett ändamålsenligt sätt beskriva sina resultat. Han utformar en teori för att räkna med oändligt små storheter eller infinitesimaler och den kalkylen är en av 1600-talet stora uppfinningar.

Hänvisningar till del 2 I avsnittet 13.4.5 behandlas Galileis härledning av kastparabeln.

7.3 Analytisk geometri och infinitesimalkalkyl

Ett av de viktigaste matematiska verken i matematikens historia är Descartes *La Géométrie*. Den kom ut samma år 1634 som hans *Discours de la méthode* och i den utvecklar han Viètes symboliska algebra ytterligare. Hans beteckningar är mer genomtänkta. Ekvationer och samband liknar mer dagens matematiska texter. Verket är starten för den analytiska geometrin. Han beskriver geometriska objekt och satser algebraiskt samtidigt som algebraiska samband tolkas geometriskt. *La Géometrie* är ett viktigt steg mot den nya kalkyl som skall visa sig så effektiv.

Några år senare beskriver den franske juristen och matematikern
Pierre de Fermat i ett brev till en fransk filosof, matematiker och munk, **Marin Mersenne**, en metod att beräkna maximum, minimum och tangenter till kurvor. Mersenne var en centralfigur bland den tidens franska matematiker. Han skapade kontakter mellan vetenskapsmän genom att arrangera möten och genom att förmedla brev. Brevet från Fermat innehåller grundtankarna om det som vi nu kallar derivata. Han bestämmer bl.a. den maximala arean av en rektangel med en given omkrets. Det problemet är i princip löst med rent geometriska metoder i Euklides *Elementa* men Fermat löser problemet algebraiskt. Han inför en beteckning a för halva den konstanta omkretsen och en beteckning x för en av rektangelns sidor som alltså varierar. Han ger x ett litet tillskott t och tecknar skillnaden mellan areorna av de båda rektanglarna med sidorna $x + t$ och x. Den är

$$(x + t)(a - x - t) - x(a - x) = at - 2tx - t^2.$$

Fermat påstår att vid ett maximum varierar arean mycket liten och att vi kan sätta den till 0 om t är nästan lika med 0. Vi har alltså

$$at - 2tx - t^2 = 0$$

vilket efter division med t ger

$$a - 2x - t = 0$$

och om vi nu sätter $t = 0$ så får vi att $x = a/2$. Arean är alltså störst då alla rektangelns sidor är lika med $a/2$ d.v.s. då rektangeln är en kvadrat. Resultatet är korrekt men det finns problem i resonemanget. Talet t är inte lika med noll, eftersom ekvationens alla termer divideras med t, efter att i nästa moment vara lika med 0. Det är oändligt litet men ändå inte 0.

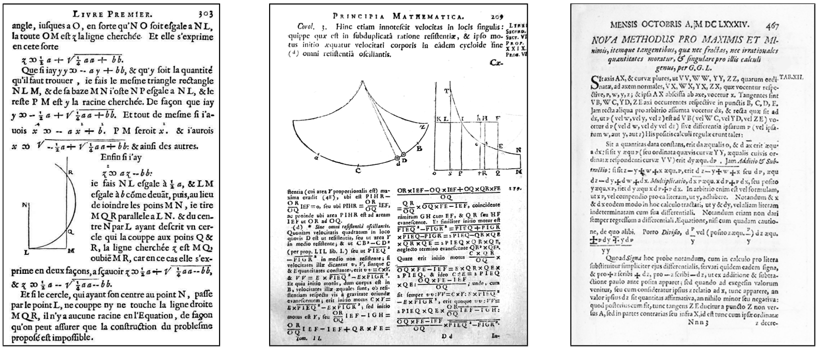
Det är inte första gången som man räknar med oändligt små tal eller infinitesimaler. Arkimedes använder sig av den tekniken när han beräknar sfärens volym och arean av ett parabelsegment, men han är noga med att verifiera sina resultat i Euklides anda med hjälp av Eudoxos uttömningsprincip. En rad matematiker under 1600-talet använder samma teknik för att beräkna volymer och areor. Man adderar oändligt många oändligt små delar och hittar metoder för att få fram ett korrekt resultat. Italienaren **Bonaventura Cavalieri** (1598–1647) angav principer hur man skulle kunna räkna med infintesimaler. Hans landsman **Evangelista Torricelli** (1608–47), mest känd för sina studier om lufttryck, använde hans metoder för att visa att den obegränsade kropp som uppkommer då den ena grenen av en liksidig hyperbel roterar kring en av dess asymptoter har en ändlig volym. Många matematiker studerade cykloiden, som är den kurva en punkt på en cirkel beskriver om cirkeln rullar längs en rät linje. Fransmannen **Giles de Roberval** (1602–75) beräknade arean av området mellan kurvan och den räta linjen. **Blaise Pascal** beräknade volymen av den kropp som uppkommer då cykloiden roteras kring den räta linje som cirkeln som alstrar cykloiden rullar på. Han beräknade också arean mellan den kurva som beskrivs av $y = \sin x$ och x-axeln. Newtons lärare **Isaac Barrow** (1630–77) formulerade en föregångare till integralkalkylens huvudsats.

Det producerades av olika matematiker delresultat som alla på något sätt använde sig av oändligt små storheter. Det blev en engelsman Isaac Newton och en tysk Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) som skulle skapa en sammanhängande teori för infinitesimaler och den skulle kallas *infinitesimalkalkylen* eller helt enkelt *kalkylen*. De gjorde det oberoende av varandra, men med olika utgångspunkter och de avvände olika beteckningar. De studerade kvoten mellan två infinitesimala storheter. Newton kallade dem för fluxioner och Leibniz kallade dem för derivator. De studerade summor av oändligt många infinitesimaler. Newton kallade dem för flöden och Leibniz kallade dem integraler. De härledde båda det samband mellan integraler och derivator som vi brukar kalla integralkalkylens huvudsats och som med våra beteckningar säger att

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

där $F(x)$ är en funktion sådan att $F'(x) = f(x)$. De använde inte funktionsbegreppet som vi gör nu men innehållet är detsamma. När det gäller beteckningar har Leibniz system överlevt. Tecknet $\int$ är ett utdraget S som i summa. Om y varierade med x betecknade Leibniz en infinitesimal i x-led med dx och den i y-led med dy. Han kallade dx och dy för differentialer och kvoten $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ för derivata. Båda härledde deriveringsreglerna för summor och produkter och de visade att derivatan av x^n är nx^{n-1}. De arbetade också med fluxioner eller derivator och differentialer av högre ordning.

Infinitesimalkalkylen eller kalkylen blev ett effektivt hjälpmedel inom många ämnesområden. Problem inom fysiken kunde formuleras och bearbetas matematiskt på ett helt annat sätt än tidigare. Många problem ledde till samband mellan en funktion och dess derivator, s.k. *differentialekvationer*. En av de första som förstod och använde Leibniz version av kalkylen var **Jacob Bernoulli** och han skulle få flera efterföljare under nästa sekel bl.a. genom sina



Figur 7.2: Utdrag ur tre viktiga verk som banade väg för kalkylen. Till vänster en sida ur Descartes *La Géometrie* där det framgår att symbolspråket är i stort sett detsamma som vi använder idag. Man kan bl.a. skönja lösningen till andragradsekvationen. I mitten en sida ur Newtons *Principia*. Till höger är förmodligen härledningen av det vi idag kallar integralkalkylens huvudsats. Bilden till höger är första sidan av Leibniz arbete *Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus* ("Nya metoder att beräkna maxima och minima jämte tangenter"). Man kan bl.a. hitta formeln för derivatan av en kvot. (Bild: `3dV2Pxc`, `2AXSjXh`, `3dVUlpl`)

bröder och deras barn och barnbarn.

Kalkylen är en viktig milstolpe i matematikens utveckling och det är kanske inte så konstigt att det uppstod en strid vem som egentligen var dess upphovsman. Var det Newton eller Leibniz? Frågan engagerade inte bara de båda vetenskapsmännen utan den ledde också till häftig debatt mellan England och kontinenten. Newton hade ett färdigskrivet verk redan 1671 men det publicerades aldrig. Leibniz besökte London 1673 och lär då ha fått reda på att Newton arbetade med infinitesimalerna. Leibniz inledde sitt arbete i mitten av 1670-talet och producerade sina resultat i två artiklar 1684 och 1686. Newton publicerade sina resultat 1687 i *Principia*. Striden om prioritetsrätten var stundom hård och Royal Academy tillsatte under början av 1700-talet utredningar för att bringa klarhet i frågan. Man har nu kommit till slutsatsen att Newton antagligen var först med teorin medan Leibniz var den som först publicerade den, men att båda arbetade oberoende av varandra.

De begreppsmässiga svårigheter som vi nämnde i samband med Fermats räkningar finns kvar hos Newton och Leibniz. En infinitesimal är inte lika med 0 men sätts ändå ibland lika med 0. Trots det var många imponerade av den nya kalkylen och dess effektivitet. Men det fanns kritiker. En av dem var biskop **George Berkely** som 1734 publicerade en pamflett, *The Analyst*, som är skriven till till en "otrogen matematiker". Han gör en lista på tvivelaktiga slutsatser i den nya kalkylen och skriver:

> "... Vissa av dem som fordrar klara bevis i religiösa ting och säger sig inte tro på annat än vad de själva kan se, sätter faktiskt tro till alla dessa punkter. Att de som endast varit förtrogna med klara fakta bör ha svårt att gå med på dunkla punkter förefaller inte helt oförklarligt. Men den som kan smälta en andra- eller tredje fluxion och andra- och tredje skillnad, behöver enligt min mening inte vara kräsmagad då det gäller någon teologisk fråga. ..."

Men invändningarna skulle inte bekymra matematiker nämnvärt. Kalkylen fungerade och gav nya intressanta resultat både inom matematik och fysik även om det ibland måste ha varit svårt att hålla tungan rätt i mun när man räknade med infinitesimaler av olika ordning. Det var först på 1800-talet som det uppkom svårigheter som krävde att att man tog itu med grundvalarna och formulerade skarpare definitioner. Gränsvärdesbegreppet gavs en konkret definition och en princip från antiken fick stå modell – Eudoxos uttömningsmetod.

Hänvisningar till del 2 I avsnitt 14.4.2 behandlas Descartes *La Géométrie*. Avsnitten 15.2.1, 15.2.2, 15.2.3 och 15.2.4 ägnas åt Cavalieris integrationsmetoder, Fermats beräkningar av maximum, Pacsals integration av sinusfunktionen respektive Barrows variant av integralkalkylens huvudsats. Avsnitt 15.3 ägnas åt Newtons och Leibniz versioner av kalkylen.

7.4 Sannolikhetslärans födelse

En fransk adelsman **Chevalier de Méré** som var en passionerad spelare och intresserad av matematik hade kommit i kontakt med följande problem: Två spelare A och B kastar ett mynt. Om det blir krona vinner A och om det blir klave B. De satsar lika stora summor var och kommer överens om att den som först vinner tre gånger skall få hela summan. Men hur skall potten fördelas om spelet blir avbrutet i förtid? Om A och B vunnit lika många gånger får de naturligtvis halva summan var. Men hur skall fördelningen ske om det står 2–1, 2–0 respektive 1–0 till endera parten? För att få råd gick de Méré till sin vän Blaise Pascal, som trots att han bara var 31 år hade ett stort anseende i matematiska kretsar. Pascal tog sig an problemet och han delgav sina tankar till Pierre de Fermat och det blev upprinnelsen till den korrespondens som brukar betecknas som sannolikhetslärans födelse. Pascal bodde i Paris och Fermat i Toulouse och det innebar att alla kontakter skedde via brev och de flesta av dem finns bevarade.

Korrespondensen, som började på våren eller sommaren 1654, visar att problemet inte var enkelt. Pascal ställde sig tveksam till Fermats ansats och Fermat påpekade några felaktigheter i Pascals resonemang. Under arbetets gång hittade Pascal samband inom kombinatoriken, bl.a. det som vi nu kallar Pascals triangel. Till slut kom de till samförstånd om en lösning till problemet och i ett brev från den 24 oktober 1654 skriver Pascal till Fermat att ”vi är på nytt samklang med varandra”.

Tre år efter brevväxlingen mellan Pascal och Fermat gav den holländske fysikern och matematikern **Christiaan Huygens** ut en text med titeln *De ratiociniis in ludo aleae* (”Att resonera om chanser vid spel”). Den är på bara fjorton sidor men är den första systematiska verk om sannolikheter som publicerats. Huygens börjar med att slå fast några postulat och bevisar sedan ett antal propositioner. Arbetet avslutas med ett antal problem som kan lösas av läsaren. Stilen är kortfattad och uppbyggnaden av arbetet för tankarna till Euklides. Varken Huygens, Pascal eller Fermat använder begreppet sannolikhet. De talar om hur stor del av ett satsat kapital man förväntas få beroende på spelets utgång. Några enkla exempel får illustrera Huygens resonemang.

> ”Om en person har 3 skilling i en hand och 7 i den andra och ber mig välja en av händerna så säger jag att det är samma sak som han ger mig 5 shilling.
>
> Om jag förväntar mig a eller b och har samma chans att vinna någon av dem så är min förväntade vinst $(a + b)/2$.”

Det andra exemplet visar att Huygens använder sig av symboliska algebra.

Det är troligt att Huygens kände till Pascals och Fermats korrespondens. Han var personligen bekant med Pascal. Intresset för den matematik som mäter chanser för spel hade kommit i förgrunden i och med insatserna av de respekterade vetenskapsmännen Pascal, Fermat och Huygens. Det kan vara en anledning till att Cardanos *Liber de ludo aleae* publicerades 1663 nästan hundra år efter hans död. Det kan också nämnas att även Galilei hade skrivit en kort artikel om tärningsspel någon gång mellan 1613 och 1623.

Teorin för hasardspel skulle utvecklas och fördjupas av den schweiziske matematikern Jacob Bernoulli. Släkten Bernoulli bidrog med många stora matematiker och Jacob är den äldsta. Hans största verk är *Ars conjectandi* ("Konsten att gissa") och det publicerades 1713 åtta år efter författarens död. I detta verk använder sig Bernoulli av begreppet sannolikhet men han definierar det inte på samma sätt som vi gör idag. Sannolikheten för en händelse sätter han lika med kvoten mellan antalet gynnsamma utfall och antalet ogynnsamma utfall. Sannolikheten att få en sexa vid kast med träning är med Bernoullis sannolikhetbegrepp alltså 1/5 och sannolikhet att antalet prickar på tärningen är jämnt är lika med 1.

Ars conjectandi består av fyra delar. Den första innehåller en genomgång av Huygens *De ratiociniis in ludo aleae* med kommentarer, den andra behandlar kombinatorik och den tredje tillämpar kombinatoriken på olika spel. I den fjärde, som är epokgörande, formulerar och visar han vad som senare skall kallas *De stora talens lag*. Vi kan formulera den på följande sätt och för enkelhets skull använder vi oss av vår definition av sannolikhet d.v.s. kvoten mellan antalet gynnsamma och möjliga utfall.

> Anta att vi upprepar ett försök (t.ex. kast med en tärning) och att sannolikheten för en gynnsam händelse är p (t.ex. $1/6$ om händelsen är att få en femma). Då kommer kvoten mellan antalet lyckade försök och totala antalet försök att närma sig p med en sannolikhet som närmar sig 1 då antalet försök växer obegränsat.

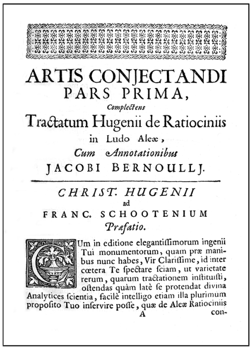
Bernoulli visar sitt påstående, genom avancerade kombinatoriska resonemang och algebraiska beräkningar. Han förutsätter att han har försök med utfall som inträffar slumpvis och det innebär att varje utfall har lika stor sannolikhet. Han framhåller i ett diskuterande avsnitt att denna förutsättning innebär en stor begränsning och säger:

> "Vi har nu nått den punkt där det förefaller som om det för att göra en korrekt gissning om en händelse vilken som helst bara är nödvändigt att beräkna det exakta antalet möjliga fall, och sedan bestämma hur mycket mera sannolikt det är att ett fall kommer att inträffa än ett annat. Här reser sig emellertid genast vår största svårighet, ty denna procedur är tillämplig endast på mycket få fenomen, faktiskt uteslutande på dem som har att göra med hasardspel. [. . .] Men jag undrar, vilken dödlig som skulle kunna utröna antalet sjukdomar, alla möjliga fall inberäknade, som drabbar den mänskliga kroppen i var och en av dess många delar och vid varje ålder, och som skulle kunna säga hur mycket större troligheт det är att en sjukdom medför döden än en annan – pest än vattusot t.ex. eller vattusot än feber – och på den grunden göra en förutsägelse om förhållandet mellan liv och död i kommande generationer."

Men om det mått på sannolikhet som används i hasardspel inte är tillämplig på mer komplexa situationer så finns det en väg runt problematiken. Han skriver:

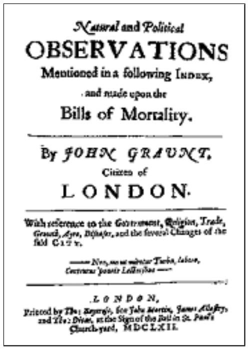
> "Det måste i detta sammanhang antagas, att, under liknande villkor, inträffandet (eller icke-inträffandet) av en händelse i framtiden kommer att följa samma mönster som iakttogs för liknande händelser i det förflutna."

"De stora talens lag" borde gälla för mer komplicerade försök än de rena hasardspelen. En uppfattning om sannolikheten för en händelse, t.ex. att ett nyfött barn är en flicka, skulle man i så fall kunna få genom att beräkna dess relativa frekvens efter ett stort antal observationer. En konsekvent teori med denna utgångspunkt formulerades 150 år senare av den engelske logikern **John Venn** (1834–1923) i verket *The Logic of Chance*.


ARTIS CONJECTANDI
PARS PRIMA,
Complectens
Tractatum Hugenii de Ratiociniis
in Ludo Aleæ,
Cum Annotationibus
JACOBI BERNOULLI.

CHRIST. HUGENII
ad
FRANC. SCHOOTENIUM
Præfatio.

Um in editione elegantissimorum ingenii Tui monumentorum, quam præ manibus nunc habes, Vir Clarissime, id inter cætera Te spectare sciam, ut varietate rerum, quarum tractationem instituisti, ostendas quàm latè se protendat divina Analytices scientia, facilè intelligo etiam illa plurimum proposito Tuo inservire posse, quæ de Aleæ Ratiociniis
A con-


Natural and Political
OBSERVATIONS
Mentioned in a following INDEX,
and made upon the
Bills of Mortality.

By JOHN GRAUNT,
Citizen of
LONDON.

LONDON,
MDCLXII.

Figur 7.3: Bilden till vänster är titelbladet till Jakob Bernouiillis *Ars conjectandi*. I mitten visas ett porträtt av John Graunt som kan betraktas som statistikens fader. Bilden till höger är titelbladet till hans studier av Londons dödslängder. (Bild: `3cNwyqs`, `2Cbmn2c`, `2Cbmn2c`)

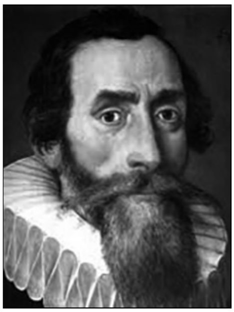
Att skaffa en tillförlitlig statistik skulle kunna vara en nyckel till att bedöma sannolikheter för kommande händelser. Mitten av 1600-talet innebar inte bara sannolikhetslärans födelse utan också starten för den vetenskap som vi idag kallar statistik. En framgångsrik engelsk köpman **John Graunt** studerade ”Dödslängderna” som publicerades varje vecka i London. Han samlade in så mycket material han kunde och gav materialet struktur genom att reducera det i tabeller för att få en bättre överblick och för att kunna göra olika former av jämförelser. Arbetet publicerades 1662 och har titeln *Naturhistoriska och politiska iakttagelser rörande Londons dödslängder* och anses vara det första försöket att tolka fenomen och sociala förhållanden med utgångspunkt från numeriska data. Graunt som var framgångsrik som affärsman hade inflytelserika vänner. Hans arbete och framför allt hans arbetsmetoder kom att användas av politiska makthavare och inom försäkringsbranschen. Statistiska metoder kom att användas inom allt fler områden och i början av 1900-talet gavs ämnet en matematisk grund genom sannolikhetsteorin.

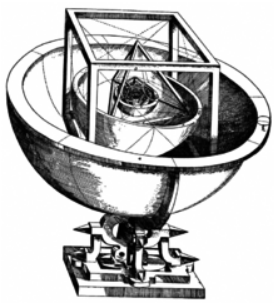
Hänvisningar till del 2 Avsnitten 16.1.1, 16.1.2, 16.1.3 och 16.1.4 ägnas åt Cardanos *Liber de ludo aleae*, brevväxlingen mellan Pascal och Fermat, Huygens *De ratiociniis in ludo aleae* respektive Jacob Bernoullis *Ars conjectandi*. Avsnittet 16.2.1 behandlar Graunts arbete om Londons dödslängder. I avsnitt 17.2.1 behandlas Pascals triangel.

7.5 Några matematiker och deras verk

Under 1600-talet blir forskningen i matematik alltmer professionaliserad. Professurer inrättas vid olika universitet och kontakterna mellan forskarna ökar. Fler ägnar sig åt matematisk verksamhet och listan på matematiker i t.ex. *MacTutor History of Mathematics Archive* blir längre. Det har därför varit nödvändigt att sovra hårt bland de vetenskapsmän som bidragit till matematikens utveckling och många som gett betydelsefulla insatser har av utrymmesskäl inte tagits med. En av dem, som jag har tagit upp, har inte själv gjort betydande arbeten inom matematik nämligen Marin Mersenne, men han står för något annat som skulle bli betydelsefullt; organisation av möten och skapandet av kontakter – föregångare till dagens konferenser och seminarier.

Johannes Kepler (1571–1630) föddes i Würtenberg. Hans far var legosoldat och hans mor var dotter till en värdshusägare. Fadern dog när Johannes var liten och han tillbringade stora delar av sin barndom på morfaderns värdshus. Efter grundläggande utbildning vid den lokala skolan började Kepler studera vid universitetet i Tübingen. Meningen var att han skulle bli luthersk präst. I universitetsstudierna var quadrivium, som bestod av aritmetik, geometri, astronomi och musik, en obligatorisk del. Keplers lärare i astronomi var en av den tidens ledande astronomer **Michael Mästlin**, som var en varm förespråkare av Copernicus heliocentriska världsbild. Han påverkade Kepler vars intresse alltmer riktades mot astronomi och matematik och precis som sin lärare accepterade Kepler Copernicus heliocentriska modell.





Figur 7.4: Johannes Kepler och *Mysterium cosmographicum*. (Bild: `2Ci0f6s`)

År 1594 flyttade Kepler till Graz i nuvarande Schweiz där han uppehöll en tjänst som lärare i matematik. I Graz skrev han *Mysterium cosmographicum* (”Kosmos mysterium”) som gavs ut 1596. Han beskriver de sfärer han antar planeterna rör sig på med hjälp av de fem platoniska kropparna, tetraedern, kuben, oktaedern, dodekaedern och ikosaedern. Han antar att Saturnus rör sig på en sfär som är omskriven en kub. Jupiter rör sig på en sfär som är inskriven i kuben. En regelbunden tetraeder skrivs in i den nya sfären och en ny sfär är inskriven i tetraedern och på denna nya sfär rör sig Mars. Han fortsätter och låter Jorden röra sig på en sfär som är inskriven tetraedern och omskriven en dodekaeder, Venus rör sig på en sfär som är inskriven i dodekaedern och omskriven en ikosaeder och slutligen rör sig Merkurius på en sfär som är inskriven ikosaedern. Tanken speglar Keplers övertygelse att Gud skapat ett lagbundet harmoniskt universum. Även om tanken verkar bisarr idag är faktiskt felen mindre än 10 procent.

Mysterium cosmographicum imponerade på Tycho Brahe som då var kejserlig matematiker i Prag. Brahe anställde Kepler som sin medhjälpare med tillgång till det stora material som Tycho Brahe förfogade över. När Brahe dog 1601 övertog Kepler platsen som kejserlig matematiker. Det är under tiden i Wien som Kepler gör sina epokgörande verk. Han koncentrerar sig på att bestämma banan för planeten Mars och han upptäcker att Mars rör sig i en elliptisk bana med solen i en brännpunkt samt att sträckan från solen till Mars på lika långa tider genererar områden med lika stora areor. Upptäckten publiceras i verket *Astronoma Nova* 1609. Tiden i Prag innebar att Kepler fick möjligheter att arbeta ostört med vetenskapliga frågor. Förutom *Astronoma Nova* publicerade han arbeten i optik. Han studerade ljusbrytning och ögats konstruktion och han konstruerade en kikare.

År 1612 lämnade Kepler Prag och flyttade till Linz i nuvarande Österrike. De sista åren i Prag hade varit svåra för Kepler. En av han söner avled endast fem år gammal och kort därefter avled hans fru. I Linz gifte han om sig och han fortsatte sitt vetenskapliga arbete. Han utvecklade *Astronoma Nova* (”Nya astronomin”) och publicerade *Harmonices mundi* (”Världens harmoni”) 1619. I den finns Keplers tredje lag som anger förhållandet mellan en planets omloppstid och planetbanans storaxel. Verket innehåller också en fantasifull teori om hur planetrörelserna återspeglar musikaliska harmonier.

Kepler bestämde också volymer av rotationskroppar genom en indelning i infinitesimaler med en metod som senare skulle utvecklas av Bonaventura Cavalieri, en av de matematiker som förberedde infinitesimalkalkylen. Keplers sista stora verk var ett astronomiskt tabellverk med planeternas positioner, som han skapade både med hjälp av den enorma mängd observationer som Tycho Brahe lämnade efter sig och sina egna lagar om planetrörelserna. Sammanställningen krävde tunga beräkningar och logaritmerna blev ett ovärderligt hjälpmedel. Tabellverket publicerades 1627 och har titeln *Tabula Rudolphinae* (”De rudolfinska tabellerna”) efter **kejsar Rudolf** som hade anlitat Kepler som hovastronom och de var 30 gånger noggrannare än tidigare tabeller. Kepler hade genom sitt gigantiska tabellverk gett ytterligare ett bevis på att hans heliocentriska modell var korrekt.

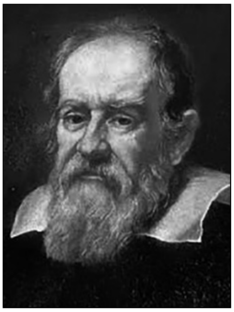
Kepler var en komplicerad person. Han var samtidigt en hårt arbetande vetenskapsman med stor respekt för empiriska fakta men också en mystiker. Han blandade skarp iakttagelseförmåga med talmystik och storslagna men felaktiga idéer om universum. Han talade om en ”gudomlig kraft” som höll planeterna i sina banor och den kraften skulle Newton konkretisera i *Principia*. Han var rådgivare till **Albrecht von Wallenstein**, som var en framgångsrik fältherre. Han var en djupt troende lutheran men hans övertygelse om den heliocentriska världsbilden sågs inte med blida ögon av hans egen kyrka och han måste flytta från det lutherska Tübigen. Han blev bannlyst av den katolska kyrkan.

Keplers sista år präglades av sjukdomar och andra problem. Han befann sig ofta på resande fot och vid ett tillfälligt besök i Regensburg insjuknade han och dog den 30 november 1630. Han begravdes på den lokala kyrkogården, som förstördes under trettioåriga kriget, förmodligen av en svensk här. Det finns ingenting kvar av Keplers grav.

Galileo Galilei (1564–1642) föddes i Pisa i Italien. Hans föräldrar var från Florens och hans far var musiklärare och en framstående lutspelare. Det var för övrigt böcker av Galileis far som låg till grund för Keplers mer fantasifulla teorier om universum. Föräldrarna flyttade tillbaka till Florens när Galilei var åtta år men Galilei stannade kvar i Pisa och bodde hos en släkting till sin mor. Efter två år flyttade han till sina föräldrar för att börja studera vid ett kloster i Vallonbrosa. Gailei trivdes med klosterlivet och ville bli novis men hans far hade andra planer. Galileo skulle bli läkare.

Sjutton år gammal började han studera medicin vid universitetet i Pisa, men ämnesområdet engagerade honom inte. Hans intresse var matematik och naturvetenskap. Så småningom övergav han medicinstudierna och ägnade sig helt åt matematik. En av hans lärare i matematik var elev till Tartaglia och Galilei studerade Euklides och Arkimedes arbeten genom Tartaglias böcker. Galilei började undervisa i matematik och skrev också några matematiska arbeten. Han gjorde sig känd som både lärare och matematiker. Han var framgångsrik och var professor i matematik i Pisa 1589–92 och sedan i Padua 1592–1610. Under denna tid gjorde han experiment med kulor på ett lutande plan och 1604 formulerade han lagar för fallrörelse. Han försökte också formulera en teori om tidvattnet något som skulle följa honom genom åren.

År 1610 återvände han till Pisa där han blev ”matematico primario” samtidigt som han var anställd som matematiker och filosof hos storhertigen av Toscana. Ett år tidigare hade han konstruerat en kikare med vars hjälp han kunde studera stjärnhimlen på en detaljnivå som inte tidigare varit möjligt. Kikaren hade också kommersiella och militära tillämpningar och Galilei kunde stärka sin ekonomi. Den gav Galilei möjligheter att göra systematiska studier av himlakropparna och de övertygade honom om riktigheten av det kopernikanska systemet där planeterna inklusive jorden kretsade kring solen. Galilei var bekant med Keplers banbrytande arbete om planetrörelserna och han skrev ett personligt brev till honom där han stödde hans idéer. Han publicerade sina iakttagelser 1610 i skriften *Sidereus Nuncius* (”Budbäraren från stjärnorna”) som blev mycket uppmärksammad.



Figur 7.5: Galileo Galilei. (Bild: 2Cl4qyx)

Galilei är nu en stor auktoritet och han mottas 1611 kungligt vid en middag i Rom arrangerad av Collegio Romanus. Han är också ledamot av ”De loögdas akademi”, något han själv skattade mycket högt. Han skriver en rad delvis provokativa skrifter som *Lettere sulle macchie solari* (”Breven om solfläckarna”) från 1613 och *Il saggiatore* (”Analytikern”) från 1623. Han propagerar med entusiasm för den heliocentriska världsbilden, diskuterar ljusets natur och atomläran och går till angrepp mot ledande auktoriteters uppfattning om meteorer. Han besöker Rom och får audiens hos påven **Urban VII**.

År 1632 presenterade Galilei sina tankar i *Dialog rörande världens två huvudsystem – det Ptolemaiska och det Kopernikanska*. Tankarna i boken stred mot den katolska kyrkans världsbild som byggde på Aristoteles teorier från 300-talet före Kristus. Kort efter utgivningen förbjöd inkvisitionen försäljning av boken och kallade Galilei till förhör. Han blev dömd till livstids fängelse som omvandlades till husarrest. Han återvände till sitt hem nära Florens där han övervakades av inkvisitionens tjänstemän. Under husarresten skrev han verket *Samtal och matematiska bevis rörande två nya vetenskaper* som smugglades ut och publicerades i Holland 1638. Båda verken är som titeln anger skrivna i samtalsform. Deltagarna är Salviati, uppenbarligen Galileis alter ego, Sagredo, en god vän med god kännedom om den problematik som diskuteras samt Simplicio, representant för den av kyrkan sanktionerade världsåskådningen.

Galilei är en av de största vetenskapsmännen någonsin men han var inte bara forskare utan han var en också en stor pedagog och en lysande skribent. Under sina sista år var han blind och han dog i husarresten 78 år gammal.

Marin Mersenne (1588–1648) föddes i Oizé en liten by i Loiredalen i centrala Frankrike. Hans föräldrar var arbetare men trots deras mindre goda ekonomiska situation fick Marin börja studera vid Collège du Mans. Vid 16 års ålder erbjöds Mersenne att börja på jesuitskolan i La Flèche, en skola som gav barn möjligheter till studier oberoende av familjernas ekonomiska situation. Några år senare skulle Descartes börja på samma skola. Det finns emellertid inga tecken på att Mersenne och Descartes umgicks under tiden i jesuitskolan. Det var först senare de blev bekanta.

Figur 7.6: Marin Mersenne. (Bild: `3hD7u9f`)

Efter jesuitskolan lämnade Mersenne La Flèche för att studera i Paris och han avlade 1611 examen i filosofi. Mersenne hade tidigare kommit i kontakt med munkorden Minims och han blev nu en medlem av den. Han blev så småningom först lärare och sedan överhuvud vid klostret Place Royale i Paris där han stannade ända till sin död 1648.

Mersenne studerade Keplers och Galileis skrifter som han från början tog avstånd från men han ändrade sig och blev en anhängare av de nya tankarna. Han bidrog i hög grad till att Galileis tankar kom att spridas i Europa och Galilei uttryckte sin tacksamhet över dessa insatser.

Mersenne som uppenbarligen hade lätt för att få kontakt med olika vetenskapsmän ägnade mycket av sin tid till diskussioner av vetenskapliga problem. Han träffade eller brevväxlade regelbundet med t.ex. Descartes, Étienne och Blaise Pascal, Roberval, Torricelli, Fermat och Huygens. Han organiserade nationella och internationella möten där vetenskapsmän studerade och diskuterade vetenskapliga artiklar, utbytte erfarenheter och planerade experiment. Verksamheten kom så småningom att kallas Académie Parisiensis och ibland Académie Mersenne. Mötena ägde rum varje vecka i medlemmarnas hem och mot slutet då Mersenne var sjuk i hans cell i klostret. Listan över Mersennes korrespondenser ökade hela tiden och han drog sig inte för att resa för att träffa vetenskapsmän på olika ställen i Europa. Mersenne skapade på det viset ett av de mest kreativa intellektuella centrumen i Europa.

Även om Mersennes stora insats är som skapare och organisatör av nätverk mellan vetenskapsmän i Europa så arbetade han med egna problem. Han studerade akustik och i *L'harmonie universelle* ("Den universella harmonin") studerade han den svängande strängen. Han gjorde också undersökningar om lufttryck. Inom matematiken studerade han cykloiden. Han intresserade sig också för talteori och tal av formen $2^p - 1$ kallas *Mersennska*. Han visade att ett Mersennskt tal kan vara ett primtal bara om p själv är ett primtal.

När Mersenne dog hittade man i hans cell brev från 78 vetenskapsmän. Man samlade alla hans brev och gav ut dem i en volym. Det visade sig att han kände till nästan all naturvetenskaplig forskning som pågick och vad de flesta vetenskapsmännen arbetade med. Hans stora önskan var att få dem att arbeta tillsammans för att utveckla naturvetenskapen.

René Descartes (1596–1650) föddes i en ort i Touraine som då hette La Haye och nu heter Descartes. Hans far var jurist och politiker vid parlamentet i Bretagne. Hans mor var dotter till en militär i Poitiers. Modern dog då Réné var bara ett år och han växte upp hos sin mormor. När han var elva år gammal började han studerade vid jesuitskolan i La Flèche i Anjou. Han läste filosofi, logik, matematik och naturvetenskap. Hans hälsa var svag och han fick tillåtelse att stanna kvar i sängen till elva på förmiddagen medan de övriga eleverna måste gå upp klockan fem. Vanan att tillbringa förmiddagen i sängen skulle han ta med sig nästan hela livet. Han arbetade företrädesvis i sängen och ägnade resten av dagen åt social samvaro. Han lämnade skolan i La Flèche 1614. Han skulle senare återkomma till sina studieår i jesuitskolan och fundera över vad han egentligen lärt och vilka kunskaper som var säkra.

Descartes arv från föräldrarna kom att göra honom ekonomiskt oberoende under hela sitt vuxna liv. Efter jesuitskolan tog han juristexamen i Poitier. Han bodde en tid Paris och gjorde resor i Holland. Under det trettioåriga kriget tog han värvning i den bavariska armén 1619 och deltog 1620 som observant för den katolska ligan under slaget vid Vita Berget nära Prag. Han lämnade därefter armén för resor i Europa där han besökte Böhmen, Ungern, Tyskland, Holland, Frankrike, Schweiz och Italien. Han träffade flera av den tidens vetenskapsmän. År 1625 återkom han till Paris och umgicks i kretsen kring Marin Mersenne. Hans hem blev mötesplats för den tidens intellektuella och Descartes blev en upptagen man. År 1628 tröttnade han på det hektiska livet i Paris. Han flyttade till Holland för att i lugn och ro kunna tänka och skriva men behöll kontakten med Mersenne.

Figur 7.7: René Descartes. (Bild: 2Va8ZST)

Det var i Holland han skrev *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (”Avhanling om metoden att finna orsaken och söka sanningen i vetenskaperna”) som innehåller de berömda orden ”Cogito, ergo sum”, som kan översättas med ”Jag tänker alltså är jag till”. Han funderar över vilka kunskaper som är säkra och finner att han varken kan lita på gamla teorier eller på sina iakttagelser. Den enda vetenskapen med en fast grund är matematiken men den har å andra sidan begränsad tillämpbarhet. Den kan användas för att lösa problem inom teknik och naturvetenskap och kan inte ge svar på filosofiska frågor. *Discours de la méthode* gavs ut 1637 och till den fogade han tre appendix; *La Dioptrique*, *Les Météores* och *La Géométrie*. De båda första handlar om optik respektive meteorologi.

Den tredje, *La Géométrie*, är en av de viktigaste böckerna i matematikens historia. Descartes kopplar här samman geometri och algebra. Geometriska konstruktioner och teorem formuleras algebraiskt och algebraiska samband tolkas geometriskt. En översikt av innehållet kan ge en mer konkret bild. Boken består av tre delar. I den första diskuteras konstruktioner med passare och linjal och den inleds med att visa hur de fyra räknesätten och rotutdragning kan realiseras geometriskt. I den andra delen tar Descartes upp kurvor och den tredje ägnas väsentligen åt ekvationslösning där bl.a. tredje- och fjärdegradsekvationerna behandlas. Formelspråket har utvecklats och det är inte svårt för dagens matematiker att känna igen sig.

Descartes gav under tiden i Holland ut flera verk där han behandlar filosofiska, teologiska och naturvetenskapliga frågor. Det mest omfattande arbetet är *Principia Philosophiæ* som gavs ut 1644. År 1649 övertalade drottning Kristina Descartes att komma till Stockholm. Han fick bryta sina vanor med att arbeta i sängen på morgnar och förmiddagar och istället stiga upp klockan fem för att undervisa drottningen. Men efter fem månader fick han lunginflammation och avled den 11 februari 1650. Han begravdes först på Adolf Fredriks kyrkogård men kvarlevorna flyttades till Paris och finns numera i Saint-Germain-des-Pres. I Adolf Fredriks kyrka har man ett minnesmonument av honom.

Några ord om Descartes ur **Bertrand Russels** *A History of Western Philosophy* (1945) får avsluta denna korta beskrivning av Réné Descartes och hans verk:

> ”Han var alltid välklädd och bar svärd. Han var inte flitig; han arbetade bara några korta timmar om dagen och han läste litet. När han reste till Holland tog han bara med några få böcker och bland dem var Bibeln och Thomas Aquinos. Hans arbete verkar ha utförts under stark koncentration under korta perioder; men kanske för uppehålla bilden av en

gentlemannamässig amatör kan han ha låtsats arbeta mindre än han i själva verket gjorde, något annat verkar osannolikt med tanke på hans bidrag.”

Pierre de Fermat (1601–65) var född i Beuamont-de-Lomagne i södra Frankrike drygt sex mil nordväst om Toulouse. Hans far var en välbärgad köpman. Fermat fick sin grundläggande utbildning vid en klosterskola och läste därefter något år vid universitetet i Toulouse innan han flyttade till Bordeaux 1620. I Bordeaux studerade han matematik och intresserade sig bl.a. för Apollonius verk. Han kom i kontakt med andra matematikintresserade och hans arbete genererade viktiga resultat om maxima och minima. Från Bordeaux flyttade Fermat till universitetet i Orleans där han avlade examen i juridik. Han blev 1631 jurist och tjänsteman i Toulouse och kunde ändra namn från Pierre Fermat till Pierre de Fermat. Han blev sedan Toulouse trogen i hela sitt liv. Fermat var alltså jurist till yrket och han sysslade med matematik på fritid. Men brukar ibland kalla Fermat för världens främste amatörmatematiker.

Figur 7.8: Pierre de Fermat. (Bild: 3hCnB70)

Ryktet om Fermats matematiska undersökningar nådde Mersenne, som bad honom skicka anteckningar så att de kunde spridas i Mersennes nätverk. Fermat skickade 1638 *Metod för att bestämma maxima och minima och tangenter till kurvor*, en modernisering av en text av Apollonius samt ett arbete om algebraisering av geometrin. Hans rykte som en av världens ledande matematiker spreds men hans arbeten publicerades inte, förmodligen därför att Fermat aldrig tog sig tid att putsa sina texter. Några var mycket kritiska till hans metoder inte minst Descartes, som i Fermat såg en konkurrent. Fermats teknik påminde om den som Descartes lanserat i *La Géométrie* och Descartes ville inte gärna dela äran. Fermat hade också kritiska synpunkter på delar av Descartes *La Dioptrique*.

Under perioden 1643–54 hade inte Fermat kontakt med sina kollegor i Paris. Förmodligen tog arbetet i domstolen alltför mycket av hans tid. Ett inbördeskrig påverkade under denna tid Toulouse och 1651 drabbades staden av pesten och Fermat blev felaktigt dödförklarad. Det var under denna tid han ägnade sig åt talteori som blev hans stora intresse. Några av hans resultat har fått stor betydelse för modern krypteringsteknik. Han är kanske mest berömd för Fermats gåta eller Fermats stora sats som säger att det inte finns några positiva heltal x, y och z som uppfyller ekvationen

$$x^n + y^n = z^n$$

om n är ett heltal och $n \geq 3$. Han skrev ner satsen i marginalen till Diofantos *Arithmetica* och tillade att han hittat ett underbart bevis men att han inte fick rum med det. Beviset återfanns aldrig och förmodligen var det felaktigt. Ett korrekt bevis gavs först 1995 av den brittiske matematikern **Andrew Wiles**.

År 1654 ägde den brevväxling mellan Pascal och Fermat rum som anses vara upprinnelsen till sannolikhetsläran. Fermat var under senare år involverad i en diskussion om optik och han bevisade i det sammanhanget brytningslagen genom att utgå från att ljuset tog den snabbaste vägen mellan två punkter. Han inledde också en korrespondens med Huygens om sannolikhetslära och talteori.

Det finns inte så många tryckta verk av Fermat. De flesta av hans resultat är bevarade genom brev till kollegor. Det var kanske hans arbete som hög tjänsteman som gjorde att han inte fick tid att utarbeta manuskript som kunde publiceras. Kanske låg det också i hans natur.

I boken *The Mathematical Career of Pierre de Fermat (1601–1665)* (1994) skriver författaren **M. S. Mahoney** om Fermat: ”Hemlighetsfull och tystlåten tyckte han inte om att tala om sig själv och var ovillig att avslöja alltför mycket om hur han tänkte.”. Han dog 1665 i Castre, en liten by sju mil öster om Toulouse. Han har fått en månkrater uppkallad efter sig.

En översättning av hans berömda marginalanteckning får avsluta denna korta beskrivning av Fermat och hans verk.

> ”Att dela upp en kub i två andra kuber, en fjärdepotens eller allmänt varje potens större än två i två potenser av samma ordning är omöjligt och jag har funnit ett underbart bevis av detta, men marginalen är för liten för att rymma det.”

Blaise Pascal (1623–62) föddes i Clermont i regionen Auvergne i centrala Frankrike. Hans mor dog när han var bara tre år gammal. Hans far **Étienne Pascal** (1588–1651) var en känd vetenskapsman som tillhörde Marin Mersennes krets. År 1632 flyttade familjen som bestod av far och fyra syskon till Paris. Blaise fick en förstklassig utbildning men i ett avseende var kanske Étiennes metoder en aning besynnerliga. Sonen skulle inte få läsa matematik innan han blev 15 år och huset rensades från matematisk litteratur. Det gjorde Blaise nyfiken och han började arbeta med geometri på egen hand utan böcker. När fadern upptäckte att sonen kunde bevisa att vinkelsumman i en triangel är två räta gav han upp och skaffade en kopia av Euklides *Elementa* till Blaise.

Figur 7.9: Blaise Pascal. (Bild: 2UTbQzg)

När Blaise var 14 år fick han följa med sin far på Mersennes sammankomster och han kom på det sättet i kontakt med gräddan av den tidens matematiker. Han blev en beundrare av geometrikern **Girard Desargues** och presenterade 1639 på ett av Mersennes möten ett arbete om sexhörningar inskrivna i ett kägelsnitt. Det kallas nu *Pascals sats*.

I mitten av 1640-talet gjorde Pascal en serie experiment om lufttryck. Han visade att lufttrycket avtog med höjden över havet och drog slutsatsen att det var vakuum utanför atmosfären. Descartes som besökte Pascal under några dagar 1647 trodde inte att vakuum existerade. Efter besöket skrev han i ett brev till Huygens att ”Pascal har för mycket vakuum i huvudet”. Pascal gav samma år ut verket *Experiences nouvelles touchant le vide*, ”Nya experiment om vakuum”. Han övergick till att studera trycket i vätskor och formulerade det vi idag kallar Pascals princip som säger att ett tryck som utövas i någon del av en vätska i vila överförs utan förlust till alla delar av vätskan. Det är hans banbrytande studier av tryck i gaser och vätskor som gjort att Pascal har gett namn åt en enhet för tryck.

Under 1650-talet försämrades Pascals hälsa men han fortsatte ändå att arbete med vetenskapliga problem. Han skrev en artikel om det vi nu kallar Pascals triangel. Den publicerades först efter hans död. Brevväxlingen med Fermat 1654 lade grunden till sannolikhetsläran. I november 1654 fick han religiösa uppenbarelser och han kom därefter att ägna huvuddelen av sin verksamhet åt välgörenhet och teologiska studier. Han skrev under denna tid sitt kanske mest berömda verk *Pensées* (”Tankar”) som handlar om mänskligt lidande och tro på Gud. Det är i detta verk han skriver sin berömda motivering varför man skall tro på Gud:

> ”Om man tror på Gud och han inte finns har man inget förlorat, men om man inte tror på Gud och han finns har man förlorat allt.”

Pascal tog emellertid upp matematiken igen och studerade problem om rotationsvolymer och tyngdpunkter som skulle föregripa infinitesimalkalkylen.

Brevväxlingen med Fermat om hasardspel upphörde på hösten 1654. Fermat söker emellertid på nytt kontakt i ett brev från den 25 juli 1660. Han vill gärna att de träffas men han har inte kraft att ta sig från Toulouse till Paris. Han vet att Pascals hälsa inte heller är så god och föreslår att de möts på halva vägen. I ett svar några veckor senare den 10 augusti avböjer Pascal inbjudan. Hans hälsa är mycket dålig och dessutom har han inte längre samma intresse för matematiken. Det är religiösa frågor och välgörenhetsarbete som upptar hans tid. Han säger:

> ”För att tala uppriktigt till er om matematik (geometri), så är den för mig den allra bästa intellektuella träning; men på samma gång anser jag den vara så oanvändbar så att jag inte kan finna någon skillnad mellan en matematiker och en duktig hantverkare. Även om jag anser den vara det bästa hantverket i världen så är den ändå bara ett hantverk och jag har ofta sagt att det är bra att träna sig på men inte att ägna hela sin kraft åt.”

Pascal dog två år senare i svåra plågor.

Christiaan Huygens (1629–95) föddes i Haag i Holland. Hans far var diplomat och hade studerat naturvetenskap. Christian fick genom fadern kontakt med vetenskapliga kretsar på högsta nivå. Fadern var god vän med Descartes och brevväxlade regelbundet med Mersenne. Christian undervisades hemma till dess han var 16 år och Descartes tog del i hans utbildning. Han studerade därefter matematik och juridik först vid universitetet i Leiden och därefter vid Oraniens college i Breda. År 1649 besökte Huygens Köpenhamn och han hade hoppats fortsätta till Stocholm för att besöka Descartes men dåligt väder hindrade resan. Han gjorde därefter flera resor i Europa bl.a. till Rom.

Sina första arbeten publicerade Huygens i början av 1650-talet. De handlade om geometri närmare bestämt om cirkelns kvadratur. År 1657 publicerade han den lilla skriften *De ratiociniis in ludo aleae* efter att ha studerat Pascals och Fermats brevväxling. Det är den första tryckta boken om sannolikhetslära.

Figur 7.10: Christiaan Huygens. (Bild: `2YNlMeT`)

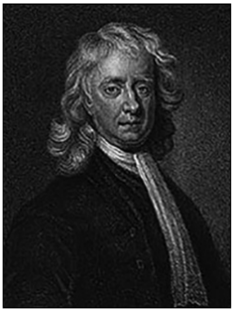
Huygens intresse täcker många områden. Han studerade linser, han konstruerade ett teleskop, han upptäckte en av Saturnus månar och kunde ge en korrekt beskrivning av Saturnus ringar. Han kom att intressera sig för tidmätning och konstruerade ett pendelur som innebar att att man kunde mäta tiden med mycket större noggrannhet än förut. I konstruktionen använde han sig av egenskaper hos cykloiden som han studerat inspirerad av Pascal. Han fick patent på pendeluret 1656 och beskrev det 1673 i *Oscillatorium sive de motu pendulorum* (”Oscillerande rörelser hos en pendel”). Han utarbetade en teori för ljusets natur som han publicerade 1678 i *Traité de la lumière* (”Avhandling om ljuset”). I det verket polemiserade han mot Newton, som ansåg att ljuset bestod av små partiklar. Huygens ansåg att ljuset var en vågrörelse och formulerade det vi idag kallar Huygens princip som säger att varje punkt på en vågfront är källa till en ny våg som utbreder sig sfäriskt.

Huygens var inte bara en framstående vetenskapsman. Han deltog också aktivt i det vetenskapliga samtalet som då började ta allt mer fasta former. Hans matematiska undervisning hade han delvis fått av av Descartes, han var en del av kretsen kring Mersenne, han reste till London där han träffade brittiska vetenskapsmän, bl.a. Newton och han träffade Leibniz i Paris.

År 1663 valdes han in Royal Society och 1666 accepterade han en inbjudan från Académie Royale des Sciences. När han anlände till Paris visade det sig att sällskapet inte var organiserat. Han ledde uppbyggnadsarbetet och blev sällskapets förste ordförande.

De sista åren tillbringade Huygens i Holland. Han kände sig isolerad från den vetenskapliga världen men fortsatte arbeta med att förbättra linser och att utveckla sitt pendelur. Han skrev också en bok om musik och en om utomjordiskt liv. Den senare publicerades efter hans död.

Isaac Newton (1643–1727) föddes i Woolsthorpe en liten by i Linolnshire i England. Hans far dog några månader innan Newton föddes. Fadern var välbärgad men praktiskt taget analfabet och lär inte ha kunnat skriva sitt namn. Isaacs mor gifte efter några år om sig med en präst. När Isaac var tio år dog styvfadern och han kom att växa upp i en familj som bestod av modern, mormodern, en halvbror och två halvsystrar. Familjens ekonomi var enligt uppgift god.



Figur 7.11: Isaac Newton. (Bild: `2YKM8ht`)

Newton fick sin grundläggande utbildning i en grannby där han blev inackorderad. Han visade inte något speciellt intresse för studier utan betecknades som lat och ouppmärksam. Efter några år flyttade han hem för att hjälpa till att sköta egendomen men han hade varken intresse eller fallenhet för det arbetet. Han återvände till studierna.

Newton började läsa juridik vid Trinity college 1661. Under det tredje året hade han möjligheter att fritt välja ämnesområde. Han studerade då filosofiska verk av bl.a. Descartes, **Thomas Hobbes** (1588 –1679) och **Robert Boyle** (1627–91), han satte sig in Copernicus heliocentriska världsbild och han läste skrifter av Galilei samt Keplers *Optics*. Det är oklart när han på allvar började studera matematik. Det sägs att hans intresse väcktes då han skulle läsa en bok om astrologi och märkte att han inte kunde tillgodogöra sig den eftersom han inte kunde trigonometri. Han började läsa trigonometri men fann att han först måste lära sig geometri och på det viset kom han att studera Euklides *Elementa*. Han läste sedan bl.a. Descartes *La Géometrie*, Viètes samlade skrifter och **Wallis** *Algebra*.

År 1663 inrättades en professur i matematik vid universitetet i Cambridge tack var en donation av **Henry Lucas**, en engelsk politiker och präst. Dess förste innehavare var Isaac Barrow, som tidigt såg att Newton var en matematisk begåvning och som tog honom under sina vingars beskydd. Newton kunde väljas in som lärare 1664 och han avlade examen 1665. Under sommaren 1665 utbröt pesten i Cambridge och universitetet måste stängas. Newton blev tvungen att flytta hem till Linconshire där han bodde i två år. Det är under denna tid som han gör sina revolutionerande arbeten i matematik, optik, mekanik och astronomi. Han lägger grunderna till infinitesimalkalkylen och han inser att integration är en invers operation till derivation. Han kallar sin teori för ”Metoden med fluxioner” och han sammanfattar den senare 1671 i skriften *De Methodis Serierum et Fluxionum* (”Om metoden med serier och fluxioner”). Boken trycktes först i en engelsk översättning efter Newtons död 1736. Infinitesimalklakylen är naturligtvis Newtons viktigaste bidrag till matematiken men han har också behandlat många andra områden. Några exempel är approximation av rötter och binomialutvecklingen av $(1+x)^a$ där a inte behöver vara ett positivt heltal.

Efter det att universitets öppnat igen avlade Newton magisterexamen. Han steg i graderna och det innebar bl.a. att han fick äta middag vid ”The Fellows’ Table”. År 1669 avsade sig Barrow sin professur och på hans förslag utsågs Newton som efterföljare. Newtons första arbete som professor rörde optik och han publicerade sin första artikel i ämnet 1672 i *Philosophical Transactions of the Royal Society*. Artikeln blev väl mottagen men Huygens och

Robert Hooke (1635–1703) hade invändningar. Hooke, som hade stort inflytande i Englands vetenskapliga kretsar, beskyllde dessutom Newton för att ha stulit hans idéer. Newton hade svårt att tåla kritik och hans relationer till Hooke blev allt mer ansträngda. Han vände sig från Royal Society där Hooke hade en ledande position och han väntade med att publicera sitt stora verk *Opticks* till 1704 efter Hookes död.

Newtons största vetenskapliga insats skulle emellertid bli inom mekanik och astronomi. Redan under vistelsen hemma i Lincolnshire hade han formulerat de tre kraftlagar som skulle ligga till grund för hans teorier. Så småningom kunde han genom att analysera Keplers lagar formulera gravitationslagen:

> ”Varje massa attraherar varje annan massa med en kraft som är proportionell mot produkten av deras massor och omvänt proportionell mot kvadraten på avståndet mellan dem.”

Newtons lagar förklarade en rad vitt skilda fenomen som planetbanorna, kometernas banor, månens rörelse och tidvattnet. Hans teorier publiceras 1687 i det stora arbetet *Philosophiæ naturalis principia mathematica* (”Naturvetenskapens matematiska principer”), som ofta för enkelhets skull kallas *Principia*. Det är ett av de viktigaste vetenskapliga verken, kanske det viktigaste, som någonsin skrivits. Verket gavs ut mycket tack vare Edmond Halley som var ledamot av Royal Society. Han uppmuntrade Newton att ge en sammanhängande framställning av sina resultat och han bidrog med korrekturläsning och andra praktiska uppgifter i samband med utgivningen.

Newton stod nu på höjden av sin karriär. Han var en ledande personlighet vid universitetet i Cambridge och en av världens främsta matematiker. När den katolskvänlige kungen **Jakob II** ville politisera tillsättningen av vetenskapliga tjänster protesterade Newton. Det stärkte hans ställning inom universitetet och när sedan Jakob II avsattes erbjöds han 1689 en av universitetets platser i parlamentet.

Newton hade tidigare 1678 drabbats av ett nervöst sammanbrott i samband med debatterna kring hans arbete i optik. När han 1693 drabbades av ett nytt sammanbrott upphörde han med sitt vetenskapliga arbete. Han lämnade Cambridge och bosatte sig i London där han blev chef för myntverket – ett arbete han engagerade sig mycket i. Han blev 1703 vald till ordförande i *Royal Society* och han stannade på den posten till sin död 1727. Newton adlades 1705 och det var första gången en vetenskapsman hedrades på detta sätt.

Isaac Newton är en av de största vetenskapsmännen i historien. Men han var svårtillgänglig och kunde få häftiga raseriutbrott. Han hade två nervösa sammanbrott som innebar tider av återhämtning. Samtidigt som han var mycket uppskattad och verkade tycka om det, hade han svårt att tåla kritik. Prioritetsstriden med Leibniz om infinitesimalkalkylen tog på hans krafter. Newtons assistent **William Whiston**, som tog över Newtons professur, skrev: ”Newton var till sitt sinnelag den mest räddhågade, mest försiktiga och mest misstänksamma människa jag någonsin känt.” Men hans inställning till naturvetenskapen präglades av ödmjukhet vilket följande ofta använda citat får visa:

> ”Jag vet inte vad världen säger om mig, men för mig själv har jag varit en liten pojke som leker vid stranden till ett stort hav och roar mig med att hitta en slätare sten eller en vackrare snäcka, medan den stora oceanen av sanning ligger outforskad framför mig.”

Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646–1716) föddes i Leipzig. Hans far var professor i moralfilosofi och hans mor var dotter till en jurist. Fadern dog när Leibniz bara vara sex år gammal och han uppfostrades av sin mor. Han började skolan vid sju års ålder men han hade redan innan på egen hand lärt sig läsa både latin och grekiska. Vid åtta års ålder lär han ha läst den romerska historikern **Livius** verk på originalspråket.

Figur 7.12: Gottfried Wilhelm von Leibniz. (Bild: `2Cbnj6I`)

Vid fjorton års ålder började Leibniz på universitetet i Leipzig där han läste filosofi och matematik. Han avlade kandidatexamen 1663. Efter en kort vistelse i Jena där han studerade matematik återvände han till Leipzig och avlade magisterexamen i juridik och doktorsexamen i filosofi på en avhandling med titeln *Dissertatio de arte combinatoria* ("Avhandling om den kombinatoriska konsten"). Han vill skapa ett tankealfabet, ett slags teckenspråk, där de grundläggande elementen är siffror, bokstäver, ljud och färger. Genom kombinationer av dem skall man utan språk kunna kommunicera över hela världen. Formellt var Leibniz avsikt att läsa juridik men hans studier fick bredare inriktning som slutade med doktorsexamen i filosofi. Han fullföljde emellertid sina juridikstudier men på grund av sin låga ålder fick inte Leibniz avlägga doktorsexamen i juridik i Leipzig utan han flyttade till universitetet i Altdorf där han disputerade 1666.

Leibniz är nu 20 år och han har redan högt anseende i den akademiska världen. Han erbjuds en professur men tackar nej. Han har andra planer. Han gör sitt inträde i den stora världen och deltar aktivt i politiken. Han träffar diplomater och furstar. Han får i uppdrag av kurfursten i Mainz att omarbeta lagboken och han utnämns till ledamot av högsta domstolen. Han utarbetar på eget bevåg ett förslag till den franske kungen Ludvig XIV om en militär expedition till Egypten. Syftet var att minska det franska trycket mot Tyskland. Han beger sig 1672 till Paris för att lämna över den men får aldrig tillfälle till det.

Vistelsen i Paris blev ingen diplomatisk framgång för Leibniz. Istället kom han i kontakt med den intellektuella eliten i Paris. Han studerade Pascals skrifter och intresserar sig för den franska litteraturen, främst Molière. Han blir god vän med Huygens som ledde in honom på matematiska studier. Det var genom diskussioner med Huygens han började det arbete som skulle leda till hans version av differentialkalkylen. Leibniz skulle stanna i Paris i fyra år.

Leibniz hade under några år funderat på en konstruktion av en räknemaskin. Under sin tid i Paris besökte han London och presenterade den för Royal Society. Den var emellertid inte färdigutvecklad och Hooke hade kritiska synpunkter. Leibniz blev medlem av Royal Society 1673.

Det var infinitesimalkalkylen som skulle bli Leibniz viktigaste bidrag till matematiken och det var under tiden i Paris som han på allvar började arbeta med den. Han sökte ett beteckningsystem som skulle förenkla arbetet. De första beteckningarna var klumpiga och man kan genom hans dagsboksanteckningar följa hur de förändrades. Den 21 november 1675 har han infört beteckningen $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ och på hösten 1676 har han infört beteckningen för differential, visat formeln för differentialen av en produkt och härlett den bekanta formeln $\mathrm{d}x^n = nx^{n-1}\,\mathrm{d}x$. Han publicerade sina resultat några år senare i en nystartad tidskrift *Acta Eruditorum*. Först 1684 i artikeln *Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus* ("Nya metoder att beräkna maxima och minima jämte tangenter"), där bl.a. lagarna för differentialen för en produkt och kvot finns med, och sedan i en artikel 1686 där han introducerar integraltecknet.

Inom matematiken bidrog han inte bara med infinitesimalkalkylen. Han studerade det binära talsystemet och han hade ett embryo till en teori för determinanter. Han brevväxlade med många av den tidens främsta matematiker och diskuterade flera typer av problem. Matematik var emellertid bara en del av Leibniz verksamhetsfält. Han är förmodligen mest känd som filosof och då speciellt för sin monadteori, men han hade många strängar på sin lyra. Han korrespondens omfattade enligt uppgift 600 adressater. Ett citat från ett brev till en god vän får illustrera hans mångsidighet och hans rastlöshet.[1]

> ”Det är fabelaktigt hur splittrade på alla håll mina arbeten äro! Jag rotar igenom arkiv, undersöker gamla handskrifter, samlar otryckta manuskript. Jag söker däri få ljus över Braunschweigs historia. Därjämte skriver och mottar jag ett otal brev. Jag har så mycket nytt i matematiken, så många tankar i filosofin, så många andra litterära iakttagelser, som jag icke gärna skulle vilja låta råka i glömska, att jag med denna mångfald uppgifter ofta icke vet, var jag skall gripa in och skulle vilja sägas med Ovidius: 'Min rikedom gör mig fattig'. Jag skulle vilja lämna en beskrivning av min räknemaskin, men saknar tid till det. . . .”

Från 1676 vistas Leibniz i Hannover. Under 1700-talet första decennium står han på höjden av anseende. De sista åren fördystras av sjukdom och förmodligen av prioritetsstriden med Newton om kalkylen. Han dog 1716. Någon av hans samtida lär ha sagt att ”Han begrovs snarare som en landstrykare än som en man, som varit sitt fäderneslands prydnad”. På hans gravsten står det: ”Pars vitae, quoties perditur hora, parit” som betyder ”Var gång en timme förspills går en del av livet förlorat”.

Jacob Bernoulli (1654–1705) föddes i Basel i Schweiz. Släkten Bernouilli bidrog med flera framstående matematiker under 1600- och 1700-talet. Jacob är den äldsta av dem. Hans förfäder invandrande från Nederländerna till Schweiz under 1500-talet för att undkomma det spanska förtrycket. De arbetade sig upp och blev ansedda i Basel. Jacobs far hade ärvt en kryddaffär och var medlem i stadens råd och magistrat. Jacobs mor kom från en förmögen bankirfamilj. Faderns önskan var att Jacob skulle studera teologi och Jacob gick honom motvilligt till mötes. Han blev teologie doktor 1676. Under hela studetiden läste han emellertid matematik och astronomi mot sina föräldrars vilja.

Figur 7.13: Jacob Bernoulli. (Bild: 3OSKeOU)

Efter doktorsexamen flyttade Jacob Bernoulli till Geneve där han en tid arbetade som informator. Därefter gjorde han en omfattande resa i Europa och besökte Frankrike, Nederländerna och England. Han kom under resan i kontakt med många matematiker och fysiker bl.a. Robert Boyle och Hooke. Många av dem skulle han brevväxla med under många år. Han återvände till Basel 1683 och gav där uppmärksammade föreläsningsserier i fasta kroppars och vätskors mekanik. Han studerade under denna tid också viktiga matematiska verk som Descartes *La Géometrie* och började intressera sig för infinitesimalkalkylen.

Jacob Bernoulli blev 1687 professor i matematik vid universitetet i Basel. Några år tidigare hade han börjat undervisa sin yngre bror Johann i matematik och bröderna studerade tillsammans Leibniz artikel *Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus* som publicerats 1684 i *Acta Eruditorum*. De var bland de första som försökte förstå och tillämpa Leibniz teorier. Samarbetet började efter en tid att kärva och stämningen mellan bröderna blev

[1]Citatet är hämtat från Alf Ahlberg *Filosofiens historia*.

alltmer infekterad. De smutskastade varandra offentligt. Johann flyttade till Holland 1695 och brytningen mellan dem blev definitiv 1697.

Jacob Bernoulli publicerade en rad resultat där han använde Leibniz kalkyl på problem inom fysiken. Han visade att en isokron kurva är en cykloid. En isokron kurva är avtagande och har egenskapen att en partikel som glider ner för den påverkad av tyngdkraften och utan friktion når sin lägsta punkt på lika lång tid oavsett var den startar. Bernoulli visade att kurvan $y = y(x)$ måste uppfylla en differentialekvation av första ordningen och han lyckades också lösa den. Han gav också allmänna metoder att beskriva evolutan till en kurva d.v.s. den kurva som beskrivs av den ursprungliga kurvans krökningscentrum. Krökningscentrum till en given punkt på en kurva är medelpunkten i den cirkel som bäst ansluter till den ursprungliga kurvan i den aktuella punkten.

De tillämpningar av infinitesimalkalkylen på olika fysikaliska och matematiska problem som Jacob Bernoulli gjorde var banbrytande och denna typ av undersökningar skulle karakterisera en stor del av den matematiska forskningen under nästa århundrade. Jacob Bernoulli studerade också oändliga serier och han gav bidrag inom algebra och geometri. Hans mest betydelsefulla bidrag arbete är emellertid det verk vi beskrivit tidigare, nämligen *Ars conjectandi* ("Konsten att gissa"), som ännu är ett viktigt arbete inom sannolikhetsläran. Den gavs ut först 1713, åtta år efter författarens död. Inititavtagare till utgivningen var Jacobs brorson Nicolaus.

Jacob Bernoulli uppehöll sin professur till sin död 1705 och han efterträddes av sin bror Johann. Jacob hade en son och en dotter. Ingen av dem skulle gå i faderns fotspår och bli matematiker eller fysiker. Det visade sig vara ovanligt i släkten Bernoulli.

På Jacob Bernoullis gravsten finns på hans egen begäran en logaritmisk spiral inristad samt orden ”Eadem Mutata Resurgo” som betyder ”Jag skall uppstå som densamme men förändrad”.

Kapitel 8

1700-talet

Upplysningstiden nådde sin kulmen under 1700-talet. Den förnuftstro som hade proklamerats av Descartes och de idéer om folkviljan som John Locke förfäktade fick efterföljare genom samhällskritiska författare som **Voltaire** och **Rousseau**. Voltaire var starkt kritisk mot den katolska kyrkan. ”Krossa den skändliga” var ett av hans slagord. Han presenterade också tillsammans med den franska markisinnan **Émilie de Chatelet** Newtons *Principia* för den franska publiken. Newtons teorier stämde väl med Voltaires rationalism. Voltaire var inte riktigt lika vänligt stämd mot Leibniz som han raljerar med i sin berömda roman *Candide*. Rousseau ifrågasätter i sin roman *Emile* den traditionella uppfostran. Han var som Voltaire kritisk mot religionen. Ett annat betydelsefullt verk under upplysningstiden är den stora franska encyklopedin vars fullständiga titel är *Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et des métiers* som ofta förkortas *Encyclopédie*. Verket redigerades av **Denis Diderot** tillsammans med **Jean le Rond d'Alembert**.

Upplysningen präglade också styrelseskicket i många av Europas länder. Många av regenterna som **Fredrik den store** i Preussen, **Katarina den stora** i Ryssland och Ludvig XIV i Frankrike kunde med skäl kalla sig upplysta monarker. De hade alla ett stort intresse för vetenskap och kultur. De var emellertid starkt knutna till kyrkan eftersom deras makt ansågs komma från Gud. Det innebar att det fanns gränser för yttrandefriheten. Rousseau tvingades leva stora delar av sitt liv i Schweiz. Många av Voltaires böcker förbjöds och fick ges ut i hemlighet.

De samhällskritiska åsikter som framfördes av många av upplysningstidens ledande tänkare bidrog till två omstörtande händelser som i hög grad har påverkat historien. Det nordamerikanska frihetskriget 1775–83 innebar att ett antal nordamerikanska delstater gjorde sig fria från sina kolonisatörer. I krigets inledningsskede formulerades den självständighetsförklaring som än i dag är en symbol för de principer som det amerikanska samhället skall bygga på. I den deklareras att ”Alla människor har skapats lika med okränkbara rättigheter. Bland dessa rättigheter är rätten till liv, frihet och strävan till lycka.”

Den andra händelsen är den franska revolutionen som startade 1789 med att Bastiljen stormades av Paris borgerskap. En ny ordning inrättades. Första franska republiken utropades 1792 och Frankrikes motto ”Frihet – Jämlikhet – Broderskap” antogs 1793. Revolutionen ledde till att feodala privilegier avskaffades och samhället sekulariserades. Nya mått infördes som byggde på decimalsystemet. Utbildningsväsendet ombildades och inom den högre utbildningen öppnades en ny enhet, l'École Nomale Supérieure. Den franska revolutionsarmén var framgångsrik och flera europeiska monarkier kom att ersättas med republiker. Revolutionen urartade emellertid och den nya republiken blev ett skräckvälde som kulminerade 1793–4. År 1799 tog **Napoleon Bonaparte** – en framgångsrik befälhavare – över makten genom en kupp. Han lät kröna sig själv till kejsare 1804 och gjorde slut på schismen med den katolska kyrkan.

Upplysningstidens förnuftstro hade skapat en grund som fått politiska verkningar. Men det saknades inte kritiker. Den tyske filosofen **Immanuel Kant** gav 1787 ut verket *Kritik der reinen Vernunft* ("Kritik av det rena förnuftet") som hävdar att det måste finnas gränser för det mänskliga förnuftet och han fick efterföljare. Själva ifrågasättandet av förnuftet öppnade dörren för en ny mer romantisk era under nästa århundrade.

En mer fredlig revolution förbereds. År 1764 uppfinner engelsmannen **James Hargreaves** spinnmaskinen Spinning Jenny och året därefter uppfinner skotten **James Watt** den dubbelverkande ångmaskinen. Tjugo år senare konstruerar engelsmannen **Edmund Cartwright** en ångmaskinsdriven vävstol och 1786 konstruerar **Andrew Meikle** tröskmaskinen. Den industriella revolutionen har inletts.

Det var inte bara inre revolutioner som präglade 1700-talet. Det österrikiska tronföljdskriget 1740–8, där en rad länder i Mellaneuropa deltog, slutade med att **Maria Teresia** blev arvinge till det habsburgska österrikiska väldet och att hennes man **Frans I** blev kejsare. I seklets början utkämpade Sverige under ledning av **Karl XII** krig mot en rad länder som Danmark-Norge, Ryssland och Preussen. När Karl XII blir skjuten 1718 är Sveriges tid som stormakt över.

1700-talet var en guldålder för musiken med barockmästare som **Johann Sebastian Bach** och **Georg Friedrich Händel** under den första halvan. Under den andra halvan utvecklades Wienklassisismen med **Joseph Haydn** och **Wolfgang Amadeus Mozart** och mot slutet av århundradet skrev **Ludwig van Beethoven** sina första pianosonater. Inom konsten märks namn som **Antoine Watteau** och **Francisco de Goya**. Författarna **Daniel Defoe** och **Jonathan Swift** gav ut *Robinson Crusoe* (1719) respektive *Gullivers resor* (1726). Mot slutet av århundradet skrev **Johan Wolfgang von Goethe** *Den unge Werthers lidande* (1774) och **Mary Wollstonecraft** *Till försvar för kvinnans rättigheter* (1792).

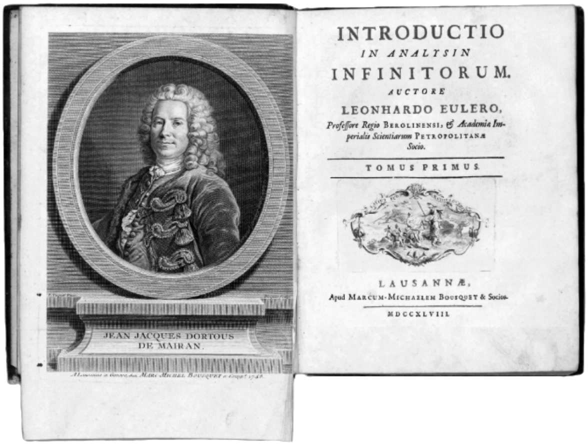
8.1 Något om den vetenskapliga utvecklingen i Sverige

Även om Sveriges tid som politisk stormakt tar slut vid början av seklet så placerar sig Sverige på den vetenskapliga kartan under 1700-talet och det framför allt genom **Carl von Linné** och hans lärjungar. Den första utgåvan av Linnés *Systema Naturae* kommer ut 1735. **Anders Celsius** presenterar i en uppsats från 1742 det förslag till termometerskala som vi använder idag. **Carl Wilhelm Scheele** upptäcker under perioden 1772–81 en rad kemiska grundämnen bl.a. syre. **Emanuel Swedenborg** blir internationellt ryktbar genom sina böcker om andeskådning. Vetenskapsakademins ständige sekreterare **Per Wargentin** bygger med start 1749 upp Tabellverket, en organisation för att sammanställa befolkningsstatistik för hela Sverige. Han statistiska metoder är nyskapande och blir internationellt uppmärksammade. De två matematikerna **Samuel Klingenstierna** och **Erland Samuel Bring** bidrar med forskning inom internationellt aktuella områden, Klingenstierna inom analys och Bring inom teorin för ekvationer. Den första svenska översättningen av Euklides *Elementa* utges av **Mårten Strömer**.

8.2 Analysen utvecklas och tillämpas

8.2.1 Analys blir ett område inom matematiken

Infinitesimalkalkylen eller differential- och integralkalkylen utvecklades under 1700-talet till ett effektivt hjälpmedel. Problem inom fysiken och matematiken som förut var svåra att tackla kunde formuleras algebraiskt ofta genom en ekvation, som innehöll både en okänd funktion och dess derivator. Ett nytt område, differentialekvationer, skapades. Ett annat område som kom alltmer i förgrunden var oändliga serier. Det handlar om oändligheter – oändligt små storheter infinitesimaler eller differentialer, oändligt många oändligt små storheter eller integraler och summor med oändligt många termer. Seklets store matematiker **Leonhard Euler** gav 1748 ut en lärobok *Introductio in analysin infinitorum* (”Inledning till analys av det oändliga”) där han kallar det nya området för analys och att det handlar om analys av hur en variabel varierar med andra.



Figur 8.1: Titelsidan till Eulers *Introductio in analysin infinitorum* med ett portätt av författaren. (Bild: `2ztQy3S`)

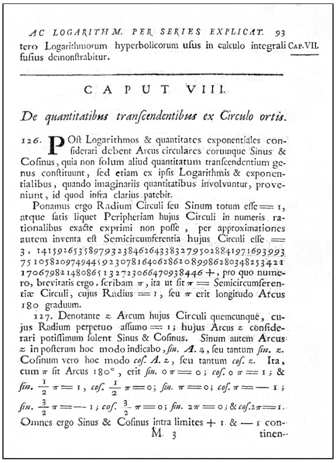
Några problem som kunde behandlas framgångsrikt med de nya analytiska verktygen får illustrera delar av forskningsverksamheten.

- Många matematiker bl.a. **Johann Bernoulli** bestämde ekvationen för den kurva ett hängande homogent rep beskriver om den är fäst i ändpunkterna och bara påverkas av tyngdkraften. Kurvan kallas en *catenaria*.

- Man beräknade tyngdpunkter av olika rotationskroppar.

- Det var möjligt att formulera och lösa s.k. isoperimetriska problem vilket innebar att man jämförde olika plana områden som begränsas av en kurva med given längd. Man kan t.ex. bestämma vilket av dessa områden som har störst area.

- Ett problem som engagerade och löstes av många av den tidens framstående matematiker är det som kallas *brachistochronproblemet*. Det kan formuleras på följande sätt: Två punkter i ett vertikalplan är givna. En partikel rör sig mellan de båda punkterna längs en kurva i planet och påverkas endast av tyngdkraften. Hur skall kurvan väljas om vi


AC LOGARITHM. PER SERIES EXPLICAT. 93

tero Logarithmorum hyperbolicorum usus in calculo integrali fusius demonstrabitur. CAP. VII.

CAPUT VIII.

De quantitatibus transcendentibus ex Circulo ortis.

126. Post Logarithmos & quantitates exponentiales considerari debent Arcus circulares eorumque Sinus & Cosinus, quia non solum aliud quantitatum transcendentium genus constituunt, sed etiam ex ipsis Logarithmis & exponentialibus, quando imaginariis quantitatibus involvuntur, proveniunt, id quod infra clarius patebit.

Ponamus ergo Radium Circuli seu Sinum totum esse $= 1$, atque satis liquet Peripheriam hujus Circuli in numeris rationalibus exacte exprimi non posse, per approximationes autem inventa est Semicircumferentia hujus Circuli esse $= 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651327230664709384446+$, pro quo numero, brevitatis ergo, scribam π, ita ut sit $\pi =$ Semicircumferentiæ Circuli, cujus Radius $= 1$, seu π erit longitudo Arcus 180 graduum.

127. Denotante z Arcum hujus Circuli quemcunque, cujus Radium perpetuo assumo $= 1$; hujus Arcus z considerari potissimum solent Sinus & Cosinus. Sinum autem Arcus z in posterum hoc modo indicabo, *sin. A. z*, seu tantum *sin. z*. Cosinum vero hoc modo *cos. A. z*, seu tantum *cos. z*. Ita, cum π sit Arcus 180°, erit $sin.\, 0\pi = 0$; $cos.\, 0\pi = 1$; & $sin.\, \frac{1}{2}\pi = 1$, $cos.\, \frac{1}{2}\pi = 0$; $sin.\, \pi = 0$; $cos.\, \pi = -1$; $sin.\, \frac{3}{2}\pi = -1$; $cos.\, \frac{3}{2}\pi = 0$; $sin.\, 2\pi = 0$; & $cos.\, 2\pi = 1$. Omnes ergo Sinus & Cosinus intra limites $+1$ & -1 continen-

M 3 tinen-

Figur 8.2: En sida ur *Introductio in analysin infinitorum*. Det är början av ett kapitel om trigonometri och vi kan bl.a. se definitionen av π. (Bild: `2YJU7LN`)

vill att partikelns restid skall bli så kort som möjligt? Namnet ”brachistochron” kommer från grekiskan, ”brachistos” betyder ”kortast” och ”chronos” betyder ”tid”.

- Engelsmannen **James Stirling** (1692–1770) studerade ortogonala trajektorier till en kurvskara d.v.s. han bestämde de kurvor som skär alla kurvorna i den ursprungliga skaran vinkelrätt.

- Flera matematiker, bland dem Euler, Jean le Rond d’Alembert och Joseph-Louis Lagrange studerade en svängande sträng och d’Alembert formulerade det vi idag kallar vågekvationen.

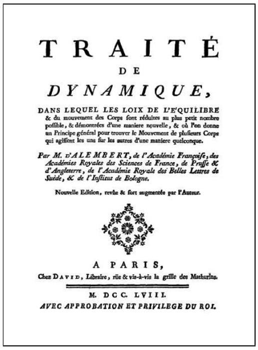
- Man fann summationsformler för trigonometriska och hyperboliska funktioner.

- Beräkning av summor av oändliga serier ägnades stor uppmärksamhet och det var speciellt serien
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$
som utmanade många matematiker. Problemet att bestämma dess summa kallas *Baselproblemet*. Till slut lyckades Euler visa att summan var $\pi^2/6$. Han bestämde också summan av $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^{2s}$ där s är ett godtyckligt positivt heltal.

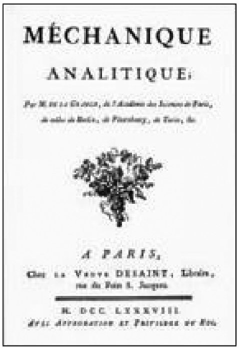
Ovanstående är bara en liten del av de problem som behandlades och de resultat man kom fram till. För att nå resultaten utvecklades metoder som t.ex. partiell integration och variabelsubstitution. Man studerade funktioner av flera variabler och införde partiella derivator. Man approximerade de vanligaste funktionerna med polynom för att kunna bestämma värdena av dem och engelsmannen **Brook Taylor** visade hur man kunde serieutveckla en funktion med hjälp av det vi idag kalla Taylors formel. För logaritmfunktionen innebar det att man kunde förfina de tabellverk som var av så stor betydelse för beräkningstekniken.

8.2.2 Fysiken framställs matematiskt

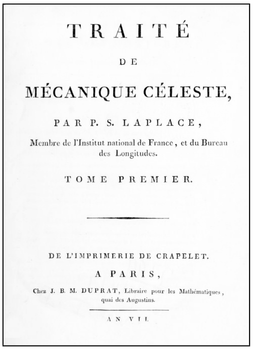
Med hjälp av den nya analysen kunde fysiken ges en mer matematisk framställning. Flera betydande verk inom matematisk fysik kom till under 1700-talet. Vätskors mekanik behandlades både av Johann Bernoulli i *Hydraulica* och av hans son **Daniel Bernoulli** i *Hydrodymanica*. Båda verken publicerades 1738. Ungefär samtidigt publicerade Leonard Euler boken *Mechanica* där Newtons dynamik presenteras för första gången i form av matematisk analys. Trettio år senare gav han ut ett verk om teorin för stela kroppars rörelser, *Theoria motus corporum solidorum*. År 1743 publicerade d'Alembert *Traité de dynamique* och året efter *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides* ("Avhandling om jämvikt och vätskors rörelse"). d'Alembert såg mekaniken som en gren av matematiken vid sidan av geometri och algebra. Lagrange gav i *Mécanique analytique* (1788) en matematisk sammanställning av det arbete som gjorts inom mekanik sedan Newton och han använder sig i stor utsträckning av differentialekvationer för att formulera lagar och samband. Det är anmärkningsvärt att boken inte innehåller några figurer. Framställningen är genomgående algebraisk. Pierre Simon de Laplace ger i *Traité de mécanique céleste*, som kom ut 1799, en fullständig teori för planetsystemet baserad på Newtons allmänna gravitationslagar och i det verket återfinns det som nu kallas *Laplaces ekvation*. Verket var matematiskt komplicerat och han hade tre år tidigare gett ut en mer populär framställning i *Exposition du système du monde*.



TRAITÉ
DE
DYNAMIQUE,
DANS LEQUEL LES LOIX DE L'EQUILIBRE & du mouvement des Corps sont réduites au plus petit nombre possible, & démontrées d'une maniere nouvelle, & où l'on donne un Principe général pour trouver le Mouvement de plusieurs Corps qui agissent les uns sur les autres d'une maniere quelconque.
Par M. D'ALEMBERT, de l'Académie Françoise, des Académies Royales des Sciences de France, de Prusse & d'Angleterre, de l'Académie Royale des Belles Lettres de Suède, & de l'Institut de Bologne.
Nouvelle Edition, revûe & fort augmentée par l'Auteur.
A PARIS,
Chez DAVID, Libraire, rüe & vis-à-vis la grille des Mathurins.
M. DCC. LVIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.



MÉCHANIQUE
ANALITIQUE;
A PARIS,



TRAITÉ
DE
MÉCANIQUE CÉLESTE,
PAR P. S. LAPLACE,
Membre de l'Institut national de France, et du Bureau des Longitudes.
TOME PREMIER.
DE L'IMPRIMERIE DE CRAPELET.
A PARIS,
Chez J. B. M. DUPRAT, Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins.
AN VII.

Figur 8.3: Titelsidorna till tre betydelsefulla arbeten inom matematisk fysik: d'Alemberts *Traité de dynamique*, Lagranges *Mécanique analytique* och Laplaces *Traité de mécanique céleste*. (Bild: `2YO11Ql`, `3hJOlmf`, `3dVuwVL`)

8.2.3 Läroböcker i analys

Med analysen introducerades nya metoder inom matematiken. De visade sig vara effektiva inte minst inom fysiken. Fysikaliska lagar kunde formuleras med hjälp av ekvationer som ibland kunde lösas algebraiskt och som ibland gav upphov till nya matematiska problem. Det uppstod ett behov att ge en sammanhängande framställning av den nya matematiken. Det första arbetet med den inriktningen gavs ut redan 1696 av fransmannen **Guillaume de l'Hopital** och hade titeln *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* ("Infinitesimalkalkyl för att förstå krökta linjer"), ofta bara kallad *Analyse des infinitesiment petits*. Det är den första läroboken om infinitesimalkalkylen och l'Hopital försöker bygga upp framställningen axiomatiskt. I förordet betonar han särskilt sin tacksamhetsskuld till Leibniz samt Jacob och Johann Bernoulli. I Storbritannien gav den skotske matematikern **Colin MacLaurin** år 1742 ut *A Treatise of Fluxions*. Verket omfattar två volymer och det är den första systematiska framställningen av Newtons teori om fluxioner. MacLaurin argumenterar i arbetet mot biskop Georg Berkleys kritik mot infinitesimalkalkylen.


ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
Pour l'intelligence des lignes courbes.
A PARIS,
DE L'IMPRIMERIE ROYALE.
M. DC. XCVI.

INSTITUZIONI
ANALITICHE
AD USO
DELLA GIOVENTU' ITALIANA
DI D.NA MARIA GAETANA
AGNESI
MILANESE
Dell' Accademia delle Scienze di Bologna.
TOMO I.
IN MILANO, MDCCXLVIII.
NELLA REGIA-DUCAL CORTE.
CON LICENZA DE' SUPERIORI.

Figur 8.4: Två läroböcker i analys. Från vänster l'Hopitals *Analyse des infiniment petits* och Maria Agnesis *Instituzione analitiche ad uso della gioventù italiana*. (Bild: `37mnBmG`, `3hCiWBZ`)

I Italien gav den kvinnliga matematikern **Maria Agnesi** ut en läro-bok om differentialkalkylen. Den är skriven på italienska och titeln är *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* ("Analytiska metoder för den italienska ungdomen"). Verket består av två delar och kom ut 1748–9. Det är berömt för sina väl valda exempel som på ett pedagogiskt sätt illustrerade den nya analysen.

Den främste läroboksförfattaren under seklet var också den främste matematikern, nämligen Leonhard Euler. Han gav förutom *Introductio in analysin infinitorum* ut *Institutiones calculi differentialis* (1755) och *Institutiones calculi integralis* (1768–70). Han skrev också en elementär lärobok i algebra 1765. I sina läroböcker inför Euler en rad symboler som vi använder än idag. Han introducerar talet e och de naturliga logaritmerna, summatecknet $\sum$, beteckningen π för förhållandet mellan en cirkels omkrets och dess diameter och han inför begreppet funktion som han betecknar med $f(x)$.

Hänvisningar till del 2 I avsnitten 15.4.1 och 15.4.2 behandlas l'Hopitals *Analyse des infiniment petits* respektive MacLaurins *A Treatise of Fluxions*.

Avsnitt 15.5 ägnas åt oändliga serier; Newtons binomialutveckling (15.5.1), Taylorutvecklingen (15.5.2), den harmoniska serie $1 + 1/2 + 1/3 + \ldots$ (15.5.3) och Eulers lösning av Baselproblemet (15.5.4).

Avsnitt 15.6 ägnas åt Eulers *Introductio in analysin infinitorum*. Avsnitt 14.4.3 behandlar Eulers bok i algebra.

Avsnitt 15.7.1 behandlar brachistochronproblemet. Vågekvationen och Laplaces ekvation tas upp i avsnitt 15.7.2.

8.3 Komplexa tal och algebraiska ekvationer

Cardano hade i sin *Ars Magna* räknat med tal vars kvadrater var negativa trots ”den intellektuella plåga det innebär”. Han kunde inte ge talen en geometrisk innebörd. Den ökande användningen av algebra innebar att man i större utsträckning räknade formellt utan att i varje steg göra en geometrisk tolkning. Man vande sig vid att hantera det vi idag kallar komplexa tal. Den fransk-engelske matematikern **Abraham de Moivre** upptäckte genom formella räkningar sambandet

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx + \sqrt{-1}\sin nx$$

som vi idag kallar de Moivres formel. Formeln kan dateras till 1707. Leonard Euler satte räknandet med komplexa tal i system och han införde så småningom beteckningen i för ett tal vars kvadrat var lika med -1. Han studerade serieutvecklingarna av e^x, $\sin x$ och $\cos x$ och kom fram till att

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

ett samband som vi idag kallar Eulers formel. Sätter vi $x = \pi$ får vi

$$e^{i\pi} = -1.$$

Dessa samband finns med i *Introcuctio in analysin infinitorum*. Euler och flera med honom började också studera funktioner av en komplex variabel. Under 1800-talet skulle det resultera i teorin för analytiska funktioner.

Så småningom uppstod ett behov att realisera de nya komplexa talen geometriskt. En dansk lantmätare, **Caspar Wessel** (1745–1818), som i sitt arbete med att kartlägga Oldenburg, började fundera över de matematiska aspekterna av lantmäteri fick idéer om hur de komplexa talen skulle kunna tolkas geometriskt. Han publicerade 1799 ett arbete om detta med titeln *Om directionens analytiske betegning* (”Om riktningens analytiska representantion”). Eftersom artikeln var skriven på danska fick den ingen spridning. År 1806 publicerade fransmannen **Jean-Robert Argand** (1768–1822) samma metod. Medan lantmätaren Wessel utgick från geometrin och fann att de komplexa talen kunde representera storheter med riktning så utgick Argand från de komplexa talen som algebraiska storheter som skulle representeras geometriskt. Inte heller Argands arbete rönte någon större uppmärksamhet. Det var först när **Carl Friedrich Gauss** och **Augustin Louis Cauchy** började använda sig av Wessels och Argands metod som den blev allmänt accepterad.

Det var alltså studiet av ekvationer som gav upphov till räkning med komplexa tal. De formler som ger lösningarna till en andragradsekvation ger ibland kvadratroten ur negativa tal. Istället för att förkasta dem började man acceptera dem som en ny typ av tal och det visade sig ha fördelar. Italienska matematiker hade under 1500-talet funnit lösningarna till de allmänna tredje- och och fjärdegradsekvationerna. Med den nya algebran och med metoder från analysen började man studera ekvationer av godtyckligt gradtal. Den schweiziske matematikern **Gabriel Cramer** (1704–52) gav 1750 ut verket *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébraiques*. I det klassificerar han olika typer av algebraiska kurvor d.v.s. kurvor av typen $y = p(x)$ där $p(x)$ är ett polynom vars koefficienter är rationella tal. Han studerar transformationer som förenklar kurvorna och han visar att man kan bestämma ett polynom $p(x)$ av graden n så att kurvan $y = p(x)$ går genom $n+1$ givna punkter. Han leds då till studier av linjära ekvationssystem och determinanter.

Joseph Louis Lagrange studerar rötterna till algebraiska ekvationer i *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* som gavs ut 1770 och han är den första som ser rötterna som abstrakta storheter och inte som numeriska tal. Han studerar också permutationer av rötterna. Året efter publicerade **Alexandre Vandermonde** (1735–96) en artikel med titeln *Mémoire sur la résolution des équations* ("Avhandling on ekvationslösning") i tidskriften *Académie de Science* Där visar han bl.a. hur summan av rötternas m:te potenser kan uttryckas med hjälp av ekvationens koefficienter. Han visar också hur man kan bestämma alla lösningar till ekvationen $x^n - 1 = 0$ om $n \leq 9$. Han är den förste som studerar funktioner av rötterna till en algebraisk ekvation som inte ändras om rötterna ändrar ordning eller med en mer matematisk vokabulär funktioner som är invarianta under permutation av rötterna. Båda Lagranges och Vandermondes arbeten förebådar den moderna algebra, som kom att utformas av **Evariste Galois** och Cauchy under första halvan av 1800-talet och där gruppteori är ett centralt begrepp.

I Cardanos *Ars Magna* visas hur man kan lösa ekvationer av andra, tredje och fjärde graden. Det är naturligt att ställa frågan: Finns det någon liknande metod för att lösa femtegradsekvationer? Kan rötterna till en femtegradsekvation fås genom att successivt använda de fyra räknesätten och rotudragningar på ekvationens koefficienter? Man använde sig av formuleringen: Är femtegradsekvationen lösbar med radikaler? Ett steg i försöket att lösa femtegradsekvationen togs av Erland Samuel Bring (1736–98), som var professor i historia vid Lunds universitet och en skicklig amatörmatematiker. Han visade att man genom transformationer kunde omvandla den allmänna femtegradskvationen till en ekvation av formen $y^5 + py + q = 0$. Resultatet publicerades 1786 i uppsatsen *Meletemata quaedam mathematica circa transformationem aequationum algebraicarum* ("Matematiska studier om algebraiska ekvationers transformationer") och Bring blev magister på arbetet. Brings resultat uppmärksammades inte förrän 1886 av den engelske matematikern **James Joseph Sylvester** men då hade **Niels Henrik Abel** sedan länge visat att den allmänna femtegradsekvationen inte är lösbar med radikaler.

Hänvisningar till del 2 Avsnitt 14.5.1 ägnas åt de Moivres och Eulers formel, avsnitt 14.5.2 ägnas åt geometrisk representation av komplexa tal och avsnitt 14.6.1 ägnas åt Lagranges arbeten om ekvationslösning. I avsnitt 14.7.2 behandlas Cramers arbete om algebraiska kurvor.

8.4 Talteori

En av 1600-talets stora matematiker, Pierre de Fermat, var speciellt intresserad av talteori och upptäckte en rad viktiga samband. Han formulerade också Fermats stora sats som skulle gäcka matematiker under århundraden. Fermat var då relativt ensam bland de mer framstående samtida matematiker som intresserade sig för området. Talteorin fick ett uppsving under 1700-talet mycket tack vare Leonard Euler som visade en rad samband. Lagrange bidrog också med intressanta resultat.

Euler visade Fermats stora sats då $n = 3$ d.v.s. att ekvationen $x^3 + y^3 = z^3$ saknar positiva heltalslösningar. Han motbevisade Fermats förmodan att $2^n + 1$ är ett primtal om n är en potens av 2 genom att visa att $2^{32} + 1 = 4\,294\,967\,297$ är delbart med 641, vilket måste inneburit svårigheter utan tekniska hjälpmedel. Han bevisade också Fermats påstående att $a^2 + b^2$ inte kan skrivas på formen $4n - 1$. Han införde det som senare skulle kallas *Eulers φ-funktion*. Funktionen $\varphi(n)$ är lika med antalet tal k sådana att $1 \leq k < n$ och som saknar gemensamma delare med n. Vi har t.ex. att $\varphi(15) = 8$ eftersom de positiva tal mindre än 15 som saknar gemensamma delare med 15 är 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13 och 14. Han gav också en formel för $\varphi(n)$. Funktionen har kommit att få stor betydelse inom modern talteori.

Lagrange gav under 1770–1 några bidrag till talteorin. Han visade bl.a. att varje jämnt tal kan skrivas som en summa av fyra kvadrater och han visade *Wilsons sats* som säger att talet $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-1) + 1$ alltid är delbart med p. Satsen hade formulerats utan bevis av **Edward Waring**, men han tillskrev den i sin tur sin kollega Wilson. Waring upprätthöll den professor i Cambridge som en gång Newton haft. I boken *Meditationes Algebraicae* från 1770 påstår han utan bevis att varje heltal är summan av högst fyra kvadrater eller högst nio kuber. Påståendet är känt som Warings sats och Waring frågade sig om det finns motsvarande sats för andra potenser än 2 och 3. **David Hilbert** bevisade detta så sent som 1909 och det resultatet gav upphov till flera intressanta resultat inom talteorin.

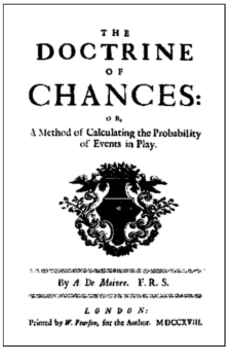
En person, som inte var av matematiker av professionen, skulle ge ett viktigt bidrag till talteorin. **Christian Goldbach** var född i Königsberg där han så småningom studerade juridik och matematik. Han gjorde omfattande resor i Europa och träffade många av de största matematikerna bl.a. Euler. Han blev så småningom professor i historia vid den ryska akademin och undervisade Peter den store. I ett brev till Euler 1742 formulerade han hypotesen att varje jämnt heltal större än eller lika med 4 kan skrivas som summan av två primtal. Han kunde inte bevisa den och det kunde inte Euler heller. Påståendet kallas *Goldbachs hypotes* och är ett av de mest berömda olösta problemen inom matematiken. Oberoende av Goldbach formulerades problemet också av Waring i sin bok från 1776 och det var första gången det kunde ses i tryck.

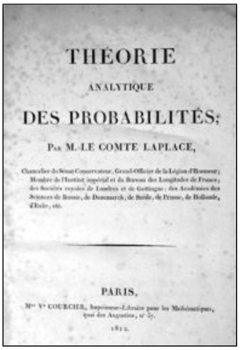
Hänvisningar till del 2 Avsnitten 17.1.3 och 17.1.4 ägnas åt Fermats respektive Eulers insatser inom talteorin. I avsnitt 17.1.6 kommenteras *Wilsons sats*, *Warings problem* och *Goldbachs förmodan*.

8.5 Sannolikhetslära

Jacob Bernouillis stora verk *Ars conjectandi*, som skrevs under 1690-talet och som gavs ut 1713 efter författarens död, är en milstolpe i sannolikhetslärans historia. Den väckte stor uppmärksamhet när den kom ut och den recenserades av Abraham de Moivre, som senare gav ut *The Doctrine of Chances* (”Läran om sannolikheter”), där han utvidgade Bernoullis teorier och visade att normalfördelningen är av stor betydelse för att beskriva fördelningen av sannolikheterna av antalet gynnsamma händelser vid ett stort antal försök. Den engelska prästen **Thomas Bayes**, som var intresserad av matematik och logik, skrev ett arbete, *Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances* (”Uppsats om lösningen av ett problem inom sannolikhetsläran”), som publicerades av Royal Society 1764, tre år efter hans död. I artikeln beskriver han hur sannolikheten för en händelse förändras om man vet att en annan händelse inträffat. Flera andra matematiker gav under 1700-talet viktiga bidrag till sannolikhetsläran och utvecklingen kulminerade med den franske vetenskapsmannen Pierre Simon Laplaces stora verk *Théorie analytique des probabilités* (”Analytisk teori om sannolikheter”).

Théorie analytique des probabilités är ett omfattande verk i två delar. I inledningen finns en historik där Laplace bl.a. tar upp Fermats, Pascals, Huygens, Bernoullis, de Moivres och Bayes arbeten. I den första delen utvecklar han den matematik som han behöver för att ge sannolikhetsläran en matematisk form. I den andra delen diskuterar han sannolikhetsbegreppet och visar hur man med avancerad matematik kan lösa problem inom sannolikhetsläran. Han diskuterar också tillämpningar inom naturvetenskap, demografi, etik och juridik. *Théorie analytique des probabilités* är teknisk och kräver att läsaren är förtrogen med den tidens matematik. I *Essai philosophique sur les probabilités* från 1814 ger han en mer lättillgänglig version av grundtankarna inom och tillämpningarna av sannolikhetsteori. Ursprunget till arbetet är en föreläsning han hållit för den tidens lärarkandidater.





Figur 8.5: Titelsidorna till de Moivres *The Doctrine of Chances* och Laplaces *Théorie analytique des probabilités*. (Bild: `2YLtdDm`, `2MRW3MC`)

I ett inledande kapitel om sannolikhet beskriver han några av de filosofiska utgångspunkter som ligger till grund för arbetet. Redan på andra sidan finns ett ofta citerat stycke där Laplace ger en mekanistisk syn på världen. Han skriver:

> ”Vi bör således betrakta universums nuvarande tillstånd som följden av dess föregående tillstånd och som orsaken till de kommande. Tänker vi oss ett intellekt som kan uppfatta alla krafter som besjälar naturen och tillståndet av alla de delar varav den är uppbyggd – ett tillräckligt omfattande intellekt för att kunna analysera alla dessa data – skulle det i samma formel kunna innefatta rörelserna hos universums största kroppar och dess lättaste atomer. För detta intellekt skulle ingenting vara ovisst och framtiden liksom det förgångna skulle ligga öppen inför dess ögon.”

Den mänskliga intelligensen kan, även om kunskapen om omvärlden hela tiden utvecklas, inte helt genomskåda orsakssammanhangen. Den kan inte alltid förutse vilka händelser som skall inträffa utan är ofta begränsad till att göra någon form av uppskattning av sannolikheterna för de olika utfallen. Sannolikhet är något relativt. Han säger: ”Sannolikhetsteorin är delvis förbunden med denna okunnighet, delvis med vår kunskap”.

Laplace utgår från tio grundläggande principer och utvecklar utifrån dem tankegångar från de matematiker som tidigare varit verksamma inom området. Laplace använder den definition av sannolikhet som vi nu använder när det är fråga om olika former av hasardspel. Hans första princip lyder:

> ”Den första av dessa principer är själva definitionen på sannolikhet, vilken som vi sett är förhållandet mellan antalet gynnsamma och totala antalet möjliga fall.”

Definitionen på sannolikhet har som Jacob Bernoulli påpekat endast tillämpning i hasardspelsliknande situationer. I andra fall då man vill bedöma sannolikheten för att en händelse skall inträffa fungerar den inte. Det inser också Laplace och det ligger under ytan i hans diskussioner om sannolikhetslärans tillämpningar.

Bernoulli hade angett en väg ur svårigheterna genom de relativa frekvensernas stabilitetet. Om man samlar stora datamängder och ordnar dem bör man kunna göra en bedömning av sannolikheter. Den typen av bedömningar är viktiga inom försäkringsbranschen. Den tyske prästen **Caspar Neumann** (1648–1715) var intresserad av demografiska frågor och gjorde tabeller över livslängder i staden Breslau och han skickade dem till Newton. Engelsmannen Edmond Halley, som var Newtons vän, fick ta del av innehållet och han visade i en artikel från 1693 hur data kan användas för att beräkna värdet av livförsäkringar. Under 1700-talet ökade användningen av statistiska data och universitetsämnet statistik bildades. Sverige blev ledande genom tillkomsten av Tabellverket som under ledning av astronomen Pehr Wargentin genomförde en stor befolkningsräkning.

Hänvisningar till del 2 Avsnitt 16.1.5 ägnas åt de Moivres och Bayes arbeten och avsnitt 16.1.6 ägnas åt Laplaces *Théorie analytique des probabilités*. Avsnitt 16.2.2 behandlar Caspar Neumanns och Haileys arbeten, i avsnitt 16.2.3 ges en kortfattad beskrivning hur statistiken blev ett akademiskt ämne och i avsnitt 16.2.4 beskrivs inrättandet av Tabellverket i Sverige.

8.6 Några matematiker och deras verk

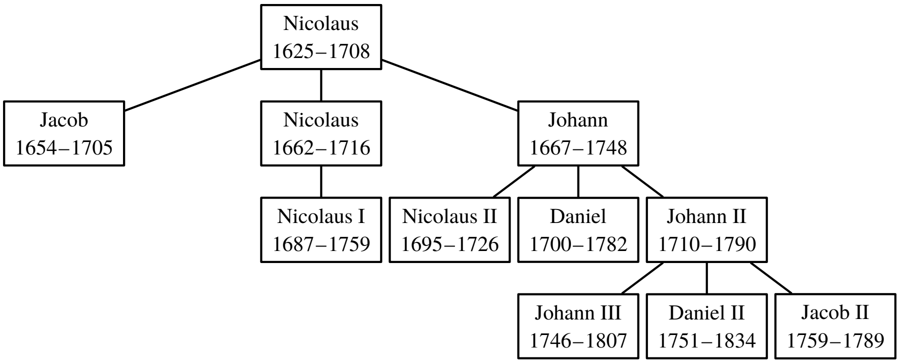
Antalet forskare inom olika grenar av matematik och dess tillämpningar ökar markant under 1700-talet. Urvalet i denna översikt måste därför begränsas. Det stora namnet är Leonhard Euler som är självskriven tillsammans med Johann och Daniel Bernoulli, d'Alembert, Lagrange samt Laplace. Det är Paris, Berlin, Basel och S:t Petersburg som blir centrum för den matematiska utvecklingen. Viktiga bidrag ges också av flera brittiska matematiker och av dessa har jag valt att ta upp Brook Taylor, Abraham de Moivre och Colin MacLaurin. Ytterligare två personer finns med i urvalet. De hade inte matematiken som yrke men gav ändå viktiga bidrag till ämnet. Italienskan Maria Agnesi skrev en vitsordad lärobok i analys men ägnade huvuddelen av sitt liv åt välgörenhet. Den engelske prästen Thomas Bayes gav genom ett postumt utgivet arbete ett viktigt bidrag till sannolikhetsläran.

Släkten Bernoulli Avsnittet om 1600-talets matematik avslutades med en beskrivning av Jacob Bernoulli och hans verk. Han var en av det seklets stora matematiker och inte minst hans *Ars conjectandi* har haft en enorm betydelse. Jacob var professor i Basel och han efterträddes av sin yngre bror Johann. Brödernas far Nicolaus var en välkänd och respekterad köpman i Basel och inte mindre än nio av hans barn, barnbarn och barnbarnsbarn skulle bli mer eller mindre framstående matematiker. Figur 8.6 visar Bernoullis släktträd.

Johann Bernouilli föddes 1667 och han var det tionde barnet i syskonskaran. Jacob var tolv år äldre. Föräldrarna ville att Johann skulle ägna sig åt handel men han var helt ointresserad och istället började han studera medicin vid universitetet i Basel.

Parallellt med medicinstudierna fick han undervisning i matematik av Jacob. De studerade tillsammans Leibniz texter om infinitesimalkalkylen och snart blev Johann sin broders jämlike som matematiker. Det goda samarbetet började snart knaka i fogarna. Rivaliteten urartade till fiendskap och bröderna började smutskasta varandra offentligt.

År 1691 flyttade Johann till Genève där han gav lektioner i differentialkalkyl. Han fortsatte till Paris där han blev bekant med ledande matematiker. Åren i Paris var mycket produktiva för Johann. Han utvecklade en mängd matematiska resultat. Han studerade kurvan $y = x^x$, han undersökte oändliga serier, han fann metoder att lösa olika typer av differentialekvationer och han bestämde summationsformler för trigonometriska funktioner. Han blev ett stort namn inom matematiken och blev erbjuden två professurer. Han accepterade till slut att bli professor i Groningen i Nederländerna.



Figur 8.6: Släkten Bernoulli.

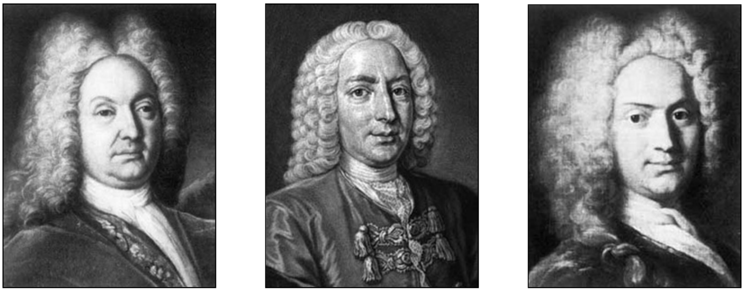
Det var emellertid till Basel han ville men där innehades professuren av hans bror Jacob. När Jacob dog 1705 övertog Johann Jacobs lärostol. Han fortsatte att ge viktiga bidrag till matematiken men arbetade också med problem inom fysiken. År 1735 publicerade han ett av sina stora verk inom mekaniken *Hydraulica*. Han kom i prioritetsgräl med sin egen son Daniel som gav ut ett verk, *Hydrodynamica* ungefär samtidigt. Bernoulli blev också indragen i konflikten mellan Newton och Leibniz och han stödde Leibniz.

Johann Bernoulli blev mycket berömd under sin livstid och han kallades för "sin tids Arkimedes", något som också står på hans gravsten. Samtidigt var han uppenbarligen snarstucken och mån om sin egen värdighet, vilket hans konflikter med brodern Jacob och sonen Daniel visar.

Jacob och Johann hade en bror Nicolaus, som visserligen inte ägnade sig åt matematik, men det gjorde hans son, som också hette Nicolaus och som i släktträdet kallas **Nicolaus I**. Han föddes 1687 och undervisades i matematik av sina farbröder. Han disputerade i Basel 1709 på en avhandling om sannolikhetsteori. Efter resor i Europa, där han träffade många av den tidens tongivande matematiker, blev han 1716 professor i Padua, samma professur som Galilei en gång haft. Han återvände till Basel 1722 och blev professor i logik och några år senare i juridik. Som matematiker intresserade han sig för geometri, differentialekvationer och sannolikhetslära. Han var emellertid inte särskilt produktiv men han medverkade till att *Ars conjectandi* samt Jacob Bernouillis samlade verk gavs ut. Nicolaus I var mycket respekterad både på sitt eget universitet, där han en längre tid var rektor, och utomlands. Han var medlem av Akademin i Berlin, av Royal Society i London och av Akademin i Bologna. Han förblev Basel trogen och dog 1759 vid en ålder av 72 år.

Johann hade tre söner som kom att ägna sig åt matematik. Den äldste **Nicolaus II** föddes 1695 och blev bara 31 år gammal. Han studerade matematik och juridik vid universitetet i Basel. Han hjälpte sin far med hans stora korrespondens och bidrog själv med arbeten om kurvor, differentialekvationer och sannolikhetslära. Han blev anställd vid universitetet i S:t Petersburg men dog efter bara 8 månader.

Johanns yngste son döptes till Johann efter sin far och vi kallar honom i fortsättningen **Johann II**. Han föddes 1710 och blev 80 år. Också han tog examen i juridik. Han arbetade med matematik både tillsammans med sin far och självständigt. Han vann den tävling i matematik som arrangerades av Parisakademin inte mindre än fyra gånger. Han övertog professuren i Basel när hans far dog 1748. Därefter avtog hans vetenskapliga produktion och hans arbeten blev mer sporadiska. Hans korrespondens var emellertid omfattande.



Figur 8.7: Från vänster: Johann, Daniel och Nicolaus (II) Bernoulli. (Bild: `30RTHpt`, `2YOa1Vm`, `2CeTvpP`)

Den tredje sonen **Daniel** föddes 1700 i Groningen. När han var fem år flyttade familjen till Basel där fadern blev professor. Johann ville egentligen att Daniel skulle bli köpman men han började vid 13 års ålder vid universitetet i Basel där han studerade filosofi och logik. Under tiden lärde Johann honom infintesimalkalkylen. Johann ansåg inte att det fanns några pengar att tjäna som matematiker och därför började Daniel studera medicin först i Basel och sedan i Heidelberg och Strasbourg. År 1720 återvände han till Basel för att avlägga doktorsexamen i medicin. Parallellt tillägnade han sig med hjälp av Johann teorier om kinetisk energi och han tillämpade dem i sin doktorsavhandling som handlade om andningens mekanik. Han for efter doktorsexamen till Venedig för medicinsk praktik. I Venedig fördjupade han sig i matematik och gav 1724 ut ett arbete med matematiska övningar. Boken innehåller ett exempel om sannolikhetslära, en studie av vattenflöde, en studie av en speciell differentialekvation och ett geometriskt problem om figurer begränsade av cirklar. Flödesproblemet har anknytning till Daniels medicinska studier av blodflöden. Han skickade in ett arbete till Parisakademins tävling och vann första pris. Han blev nu känd som matematiker och erbjöds och accepterade 1725 en professur i S:t Petersburg där han kom att arbeta tillsammans med sin äldre bror Nicolaus II. Hans brors död blev ett hårt slag för honom. Johann skickade sin bäste elev Leonhard Euler till S:t Petersburg för att ersätta Nicolaus II. Daniel och Euler arbetade tillsammans i S:t Petersburg mellan 1727 och 1733 och denna period blev den mest produktiva i Daniels karriär. Han studerade oscillerande system och visade att en vibrerande sträng kunde uppfattas som summan av harmoniska svängningar.

Trots samarbetet med Euler trivdes Daniel inte i S:t Petersburg och han återvände till Basel 1734. Han fick inte någon professur inom sitt specialområde så han försörjde sig genom att undervisa i botanik. Han fortsatte att skicka in bidrag till Parisakademin. Vid ett tillfälle konkurrerade han med sin far Johann och de fick dela priset. Johann blev rasande över att sonen blivit betraktad som hans jämlike och bröt kontakten med Daniel.

Daniel fortsatte att brevledes hålla kontakten med Euler. Han arbetade på sitt stora verk *Hydrodynamica* och Euler hjälpte honom att ge framställningen en strikt matematisk form. Verket kom ut 1738 ungefär samtidigt som Johanns *Hydraulica* och det kom att öka spänningen mellan far och son.

Efter vistelsen i S:t Petersburg minskade Daniels arbete inom matematiken. Han kunde byta ut undervisningen i botanik mot först en professur i fysiologi 1743 och sedan en i fysik 1750, båda vid universitetet i Basel. Han var framgångsrik och vann Parisakademins pris tio gånger. Han höll föreläsningsserier i fysik som blev berömda bl.a. för att han gjorde experiment under lektionerna. Ett av dem handlade om Coulombs lag inom elektrostatiken. Daniel var en mycket respekterad vetenskapsman och var medlem av de flesta av den tidens akademier.

Johann II Bernoulli hade tre söner varav två ägnade sig åt matematik. Den äldste **Johann III** (1744–1807) avlade examen i juridik och intresserade sig för matematik på fritid. Han blev professor i Berlin och på uppdrag av Fredrik den store ledde han återuppbyggnaden av Berlins astronomiska observatorium. Johann III skrev arbeten inom astronomi och matematik men de var av mindre betydelse. Hans mest kända arbete är en rapport från hans resor i Tyskland. Johann III donerade sin brevsamling till Kungliga vetenskapsakademin i Stockholm. Den yngste sonen **Jacob II** (1759–89) följde familjens traditioner och tog en examen i juridik och studerade matematik vid sidan av. Han fick en tjänst vid S:t Petersburgs akademi och skrev viktiga arbeten inom matematisk fysik. Han trivdes i staden och gifte sig med ett av Eulers barnbarn. Hans vistelse i S:t Petersburg slutade dramatiskt då han drunknade under en simtur i Neva.

Guillaume de l'Hôpital (1661–1704) föddes i Paris. Hans släkt hade anor från 1200-talet och hans fullständiga namn var Guillaume-François-Antoine Marquis de l'Hôpital, Marquis de Sainte-Mesme, Comte d'Entre-mont och Seigneur d'Ouques-la-Chaise. Hans far var officer och hans mor var dotter till en officer. Som liten visade Guillaume fallenhet och intresse för matematik men med hans bakgrund var det naturligt att göra en militär karriär. Men han gav emellertid inte upp matematiken. Det berättas att han studerade geometri i tältet under övningarna.

Figur 8.8: Guillaume de l'Hopital. (Bild: `3hD9tdH`)

Han blev tvingad att ta avsked från militären på grund av närsynthet och han inriktade sig därefter helt på matematik. År 1691 träffade han Johann Bernoulli och det blev helt avgörande för hans matematiska verksamhet. Han följde några föreläsningar som Bernoulli gav i Paris. År 1694 skrev l'Hopital till Johann Bernoulli och bad honom att mot betalning ägna några timmar i månaden för att svara på hans frågor och meddela sina nya rön. Bernuolli accepterade anbudet.

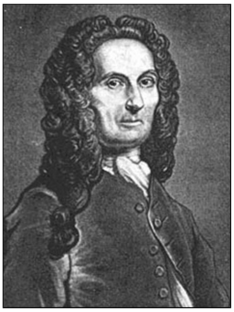
Det var korrespondensen med Bernoulli som låg till grund för den lärobok som d'Hôpital gav ut 1696. Den hade titeln *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* ("Infinitesimalkalkyl för att förstå krökta linjer"). Boken innehåller mycket av det som finns i dagens analysböcker. Han bestämmer tangenter till kurvor, maxima och minima, kurvors krökning och derivator av högre ordning. Han ger också exempel på tillämpningar inom mekanik och geografi. I ett av de sista kapitlen finns den regel som fått namn efter l'Hopital och den visar hur man kan beräkna gränsvärdet av en kvot om både täljare och nämnare går mot 0.

Boken kom att bli ett mycket viktigt bidrag till utvecklingen av analysen och den användes som introduktion i ämnet under en lång period. Den trycktes i många upplagor ända till 1781 och den var modell för många av de läroböcker som producerades därefter.

Läroboken blev väsentligen l'Hôpitals bidrag till matematiken. Hans övriga arbeten var relativt betydelselösa. Men läroboken hade, som tidigare sagts, stor betydelse. Johann Bernoulli ansåg att boken egentligen var hans men han framförde inte detta förrän efter l'Hôpitals död. Det visade sig att Bernoulli i stort sett hade rätt när hans manuskript återfanns 1921. l'Hôpital dog 1704 endast 43 år gammal. En matematikhistoriker karakteriserar honom på följande sätt:

> "Han var ett lysande exempel på en man av högsta anseende i samhället och vars kärlek till lärdom drev honom att ägna en stor del av sitt korta liv till vetenskapligt författande."

Abraham de Moivre (1667–1754) föddes i Vitry-le-Francois, ett samhälle i Champagne mellan Paris och Nancy. Hans familj var protestantisk men han började i en katolsk skola. När han var elva år skickades han till en protestantisk akademi i Sedan där han läste grekiska. Trots den trosfrihet som garanterades av ediktet i Nantes var protestanterna undertryckta. Akademin i Sedan lades ned och de Moivre flyttade till Saumer där han studerade logik. Matematik var inte en del av utbildningen men de Moivre läste matematiska texter på egen hand. Han studerade bl.a. Huygens *De ratiociniis in ludo aleae*. Så småningom flyttade han till Paris och där fick han för första gången formell undervisning i matematik. Under Ludvig XIV ökade förföljelserna av hugenotter och de Moivre sattes i fängelse i klostret Saint Martin på grund av sin religiösa övertygelse. Han kunde snart friges och 1688 lämnade han landet och reste till England och London där han skulle vara kvar resten av sitt liv. I London försörjde han sig som privatlärare i matematik.



Figur 8.9: Abraham de Moivre. (Bild: 3OY0oX7)

De Moivre var en mycket kompetent matematiker när han kom till London och han hade läst många av de viktigaste matematiska texterna. Nu fick han tillfälle att studera Newtons *Principia* och det blev en uppenbarelse. Han förstod att detta verk var djupare än något annat han läst och han hade alltid med sig något avsnitt ur *Principia* som han kunde fördjupa sig i när tid gavs. De Moivre fick snart ett gott rykte som matematiker och 1697 blev han invald i Royal Society. Han var god vän med Newton och han lärde också känna Halley, som hade stort inflytande inom Royal Society. Han blev invald i den kommitté som tillsattes av Royal Society och som skulle ge ett utlåtande i prioriteringsstriden mellan Newton och Leibniz. Royal Society fick det svar de ville ha.

De Moivre var en av pionjärerna för analytisk geometri. Hans kanske mest berömda arbete handlar emellertid om sannolikhetslära och har titeln *The Doctrine of Chances: A method of calculating the probability of events in play*. Det kom ut första gången 1718 med nya utökade upplagor 1738 och 1756. På latin publicerades den redan 1711 i *Philosophical Transactions of the Royal Society*. Det är ett av de viktigaste verken i sannolikhetslärans historia. Han visar bl.a. att man kan approximera binomialfördelningen med en normalfördelning då antalet försök blir mycket stort.

Vänskapen med Halley ledde honom in på problem inom livförsäkringsväsendet. Halleys verk som grundade sig på tabeller om dödligheten i Breslau inspirerade förmodligen de Moivre till arbetet *Annuities of life* som kom ut 1728. Han gav också ut *Miscellenea Analytica* 1730 och där finns bl.a. Stirlings formel som de Moivre använde när han approximerade binomialfördelningen med normalfördelningen. De Moivre har också namngett formeln $(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx$. Den förekommer i ett arbete som de Moivre publicerade 1722 men det finns tecken på att de Moivre kände till den redan 1707.

De Moivre hade ett mycket gott rykte både som forskare och lärare. Han var, som vi tidigare nämnt, god vän med inflytelserika vetenskapsmän som Newton och Halley. Trots det fick de Moivre aldrig någon tjänst vid något engelskt universitet. Det faktum att han var fransman innebar att hans ansökningar prioriterades ner. Han flydde från religiöst förtryck i Frankrike till ett i detta avseende mer tolerant England där han istället möttes av intolerans mot utlänningar. Han fick försörja sig genom privatlektioner och dog fattig. De Moivre lär ha förutsett sin dödsdag. Han upptäckte att han sov 15 minuter längre för varje dygn och det skulle innebära att han skulle sova 24 timmar den 27 november 1754. Det stämde!

Hans rykte som matematiker var, som jag tidigare nämnt, grundmurat. När någon frågade Newton om något i *Principia* sade han: ”Gå till Mr de Moivre; han kan dessa saker bättre än jag.”. Den engelske matematikhistorikern **Isaac Todhunter** säger i *A history of the mathematical theory of probability* från 1865 att sannolikhetsläran;

> ”. . . har mer att tacka de Moivre för än någon annan matematiker med Laplace som enda undantag.”

Brook Taylor (1685–1731) var född i Edmonton i Middlesex, England. Familjen var välbärgad. Fadern var sträng men samtidigt intresserad av konst och musik – intressen som ärvdes av sonen. Brook hade privatlärare innan han började på S:t Johns College i Cambridge. Där fick han en gedigen utbildning i klassiska ämnen och matematik. Han tog examen i juridik 1709 men hade dessförinnan skrivit sin första uppsats i matematik där han bestämde svängningscentrum för en kropp. Den publicerades 1714 i *Philosophical Transactions of the Royal Society*. Två år tidigare hade han valts in Royal Society och 1714 valdes han till dess sekreterare, en post han innehade till 1718 då han avgick av hälsoskäl.

Figur 8.10: Brook Taylor. (Bild: `30QYLdF`)

Taylors viktigaste verk *Methodus incrementorum directa et inversa* (”Metoden med direkta och omvända tillägg”) och *Linear Perspective* utkom båda 1715. Det senare är geometriskt och kan ses som en föregångare till den projektiva geometrin som utvecklades under 1800-talet. Förmodligen är det Taylors intresse för konst som inspirerat honom till detta arbete.

Det är kanske den första boken som haft störst betydelse för matematikens utveckling. I den uppfinner han metoden med partialintegration och han beskriver det vi idag kallar Taylorutvecklingen av en funktion. Han introducerar en kalkyl för att räkna med ändliga differenser. Han studerar singulära lösningar till differentialekvationer, han behandlar variabelsubstitution och visar på sambandet mellan derivatan av en funktion och derivatan av dess invers. Han diskuterar också matematiken för den svängande strängen.

Förutom de två nämnda böckerna skrev Taylor en rad artiklar om kapillärrörelser, magnetism och termometrar. Han förbättrade också metoderna för att approximera rötterna till ekvationer.

Privat var Taylor förföljd av olyckor. Han gifte sig 1721 och hans fru var visserligen av förnäm släkt men utan pengar. Fadern motsatte sig giftermålet och relationen mellan Brook och fadern blev minst sagt frostig. De bröt kontakten. Två år efter giftermålet dog Brooks fru i barnsäng. Inte heller barnet, som skulle blivit deras första, överlevde. Efter denna tragedi sökte sig Taylor till fadern och deras relation förbättrades. Två år därefter gifte Brook om sig och denna gång godkände fadern giftermålet. Fadern dog fyra år senare 1729 och Brook ärvde hans gods. År 1730 dog också Brooks andra fru i barnsäng. Barnet, som var en dotter, överlevde. Året därpå dog Brook Taylor.

Colin MacLaurin (1698–1746) föddes i Kilmodan en socken i Argyllshire i västra Skottland. Hans far, som var präst, dog när Colin var sex veckor gammal och hans mor när han var nio år. Det blev hans morbror, som var präst i en närbelägen socken, som fick ansvara för uppfostran av Colin och hans äldre bror.

Colin MacLaurin började studera vid universitet i Glasgow när han var elva år. Det var inte så ovanligt då att pojkar började sin universitetsutbildning vid mycket unga år. Han blev Master of Arts när han var fjorton år och examen omfattade latin, grekiska, etik, logik, naturvetenskap och matematik. Hans examensarbete handlade om gravitation. Han studerade ytterligare ett år i Glasgow och läste då teologi.

Figur 8.11: Colin MacLaurin. (Bild: `2YYEosz`)

År 1714 återvände han till sin morbror i Kilfinan och där blev han kvar i tre år. Under den tiden studerade han flitigt, gjorde långa promenader i omgivningarna och han förde kontinuerligt anteckningar. Han måste ha kommit långt i sina matematikstudier eftersom han redan som 19-åring blev utnämnd till professor i matematik vid universitetet i Aberdeen. Under sin tid som professor i Aberdeen gjorde han två resor till London där han träffade en rad tongivande vetenskapsmän, bl.a. Newton. Han blev uppskattad och valdes in i Royal Society.

Under tiden som professor i matematik i Aberdeen blev MacLaurin erbjuden en längre resa i Europa som han accepterade. Han blev borta i två år och under en vistelse i Frankrike skickade han in ett bidrag om mekanik till Parisakademin och vann första pris. När han kom hem till Aberdeen fann han att hans bortavaro inte hade setts med blida ögon. Han hade lämnat sina elever vind för våg. Han sökte nu en professur i Edinburgh. Han fick tjänsten delvis tack vare rekommendationer från Newton som också erbjöd sig att betala en del av MacLaurins lön. MacLaurin började sin tjänst på universitetet i Edinburgh i november 1725 och han tillbringade resten av sitt yrkesliv där.

Maclaurins stora arbete i matematik är *A Treatise of Fluxions* som kom ut 1742. Det består av två volymer och är den första systematiska framställningen av Newtons teori om fluxioner och det är delvis skrivet som en polemik mot Berkeleys kritik av infinitesimalkalkylen. Han använder sig konsekvent av Eudoxos uttömningsprincip för att ge teorierna en fast grund. Hans sätt att behandla integralkalkylens huvudsats samt maxima och minima har haft betydelse för senare framställningar. Han studerar elliptiska integraler och visar hur man kan approximera en integral med en summa med en formel som vi idag kallar Euler-MacLaurins summationsformel. I verket återfinns också MacLaurins formel och integralkriterier för konvergens av serier.

MacLaurin skrev också en lärobok i algebra *Treatise on Algebra* som publicerades två år efter hans död. Det kan också nämnas att han bidrog med arbeten om tidvattnet, om solförmörkelse, om strukturen av binas vaxkakor och om försäkringsmatematik.

Jacobinerna marscherade mot Edinburgh 1745 och skulle inta staden. Maclaurin engagerade sig i försvarsarbetet. Då staden intogs flydde MacLaurin till England där han togs emot av ärkebiskopen av York. Några månader senare lämnade jacobinerna Edinburgh och MacLaurin återvände. Hans hälsa hade försvagats av arbetet med Edinburghs försvar, av resorna till och från York i kallt vinterväder och av ett fall från sin häst. Han dog året därpå i Edinburgh och begravdes i Greyfriars kyrka.

MacLaurin var enligt många vittnesbörder en ytterst vänlig och tillmötesgående person som alltid ställde upp för att hjälpa sina studenter. Han var en hängiven lärare och i **Robert Chambers** *Biographical Dictionary of Eminent Scotsmen III* (1872) står det:

> ”. . . så stor var hans önskan att utveckla sina studenters kunskap att om de någon gång inte verkade förstå hans förklaringar, eller om han, när han examinerade dem, märkte att de inte kunde härleda de propositioner han hade gått igenom, så var han benägen att misstänka att hans genomgångar hade varit otydliga snarare än att det berodde på studenternas brist på fallenhet eller uppmärksamhet, och därför gjorde han om en härledning med en annan metod för att se om den genom att framställas på ett annat sätt kunde ge en bättre bild.”

Thomas Bayes (1702–61) var född i London. Hans far var en av de få frikyrkliga präster som prästvigts i England och han tjänstgjorde i Holborn utanför London. Thomas Bayes skulle följa i sin fars fotspår och han skrevs in vid universitetet i Edinburgh 1719 där han studerade teologi och logik. Han måste söka sig till ett universitet i Skottland eftersom Cambridge och Oxford inte tillät frireligiösa inträde. Han prästvigdes och blev 1730 präst vid den presbyterianska kyrkan i Tunbridge Wells sydost om London. Han tjänstgjorde där till sin pensionering 1752 och blev kvar i Tunbridge Wells till sin död 1761.

Figur 8.12: Thomas Bayes. (Bild: `2URiuWA`)

Bayes var intresserad av matematik och han hade omfattande kunskaper. Det framgår av hans efterlämnade papper. Det är oklart hur han förvärvade dem men det finns de som påstår att han undervisats av de Moivre. Han gav inte ut några egna arbeten under eget namn under sin livstid men blev ändå medlem av British Society. Under pseudonym gav han ut artiklar som polemiserade mot Berkeleys angrepp på infinitesimalkalkylen.

Bayes är emellertid framför allt ihågkommen för artikeln *Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances* som publicerades i *Philosophical Transactions of the Royal Society* år 1764 tre år efter Bayes död. Det var en god vän till honom som lämnade in den. Bayes inför i artikeln begreppet betingad sannolikhet. Hur skall vi bedöma sannolikheten för att en händelse skall inträffa beroende på den information vi har? Vi hittar också den sats som är uppkallad efter honom. Han visar att han behärskar binomialfördelningen och han använder infinitesimalkalkylen i sina beräkningar. Han visar hur man kan approximera olika typer av integraler och uppskattar också felen i approximationerna.

Maria Agnesi (1718–99) föddes i Milano. Hennes far var en förmögen handelsman och hon var hans äldsta barn. Han hade 21 barn med tre olika fruar. Maria fick en förstklassig utbildning och hon lärde sig i mycket unga år latin, grekiska och hebreiska. Hon blev tidigt intresserad av filosofi och naturvetenskap och speciellt av Newtons teorier. Fadern arrangerade ofta lärda diskussioner om vetenskap där hon var en av huvudpersonerna. Hon dominerade ofta genom sin begåvning men hon kände sig ofta som ett förevisningsobjekt. Hon tröttnade på det och ville bli nunna. Fadern övertalade henne att överge de planerna och Maria gav med sig under förutsättning att hon fick gå i kyrkan så ofta hon ville, att hon fick klä sig enkelt och att hon inte behövde gå på teater och baler eller ägna sig åt andra profana nöjen.

Figur 8.13: Maria Agnesi. (Bild: `3hBrHw4`)

Agnesi studerade religiösa texter och matematik. I längden är det svårt att få djupare förståelse får matematik utan någon vägledning. Maria Agnesi hade tur. En munk och matematiker som hade varit professor i både Rom och Bologna hade flyttat till Milano och var en ofta sedd gäst i Agnesis hem. Han fick henne att studera infinitesimalkalkyl och han uppmuntrade henne att skriva en bok i ämnet. Hon skrev den på italienska och den fick titeln *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana* (”Analytiska metoder till nytta för den italienska ungdomen”). Den var avsedd som en lärobok. Under arbetet med boken brevväxlade hon med en av de tongivande matematikerna i Italien, **Jacobo Riccati**, som var behjälplig med synpunkter. Boken omfattar två band. Det första kom ut 1748 och det andra året därpå. Boken blev uppskattad och gjorde Agnesi berömd i matematiska kretsar. Den blev lovordad av Académie des Sciences i Paris för sin ”ordning, klarhet och precision”. En engelsk översättning kom ut 1801.

Påven **Benedict XIV** som själv läst matematik engagerade sig för att ge Agnesi en lärartjänst vid Universitetet i Bologna och han lyckades till slut. I september 1750 skickade han ett brev till Agnesi där han erbjöd henne tjänsten. Agnesi tillträdde aldrig och det oklart om hon överhuvudtaget besvarade inbjudan. Hon hade då börjat överge matematiken för religiösa studier och välgörenhet. När hennes far dog 1752 ägnade sig hon helt åt sådan verksamhet.

Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana innehåller inga nya matematiska idéer. Det är en lärobok och en välskriven sådan. Den innehåller många väl valda exempel som illustrerar de matematiska idéerna. Det är enligt en bedömare ”. . . en framställning mer genom exempel än genom teori.”. I boken finns en kurva som kallas *Agnesis häxa*. Den är väsentligen en del av den kurva som har ekvationen $y = 1/(1+x^2)$. Varför den kallas en häxa har varit föremål för diskussioner bland matematikhistoriker och vi hänvisar till den engelska versionen av Wikipedia med rubriken ”Witch of Agnesi”.

Leonhard Euler (1707–83) är utan tvekan den mest produktive matematikern någonsin. Han bidrog med epokgörande arbeten inom de flesta områden inom matematik och fysik, han skrev läroböcker och populärvetenskaplig litteratur, han skrev om kartografi, skeppsbyggnad och musik. Hans samlade skrifter omfattar mellan 50 och 60 volymer och han gav ut mer än 900 artiklar och böcker. Han har i hög grad påverkat det matematiska beteckningssystem vi använder. I den översiktliga beskrivningen av 1700-talets matematik återkommer hans namn ofta och vi har gett flera exempel på hans arbeten. Vi skall göra några ytterligare kommentarer om hans insatser inom matematiken men ger först en kort biografi.

Figur 8.14: Leonhard Euler. (Bild: `2YJVVo3`)

Leonhard Euler föddes i Basel. Hans far **Paul Euler** var protestantisk präst och hade studerat teologi vid universitetet i Basel där han också följde Johann Bernoullis föreläsningar i matematik. Han bodde också tillsammans med Johann Bernoulli i Johanns broder Jacobs hem. Faderns kontakter med bröderna Bernoulli skulle vara av stor betydelse för Leonhard Eulers matematiska utveckling.

Från början undervisades Leonhard i matematik av sin far. När han var tretton år började han på universitetet i Basel och meningen var att han skulle följa i faderns fotspår och bli präst. Under den grundläggande utbildningen som alla studenter måste genomgå ordnade Leonhard så att han fick privatlektioner i matematik av Johann Bernoulli, som snart upptäckte Leonhards stora begåvning. Euler tog sin masterexamen i filosofi 1723 och började sedan studierna i teologi. Trots att han var varmt kristen kunde han inte mobilisera intresse för ämnet utan han övertalade sin far att få byta inriktning och istället studera matematik. Förmodligen påverkade Johann Bernoulli fadern och att de båda kände varandra gjorde att Paul Euler gav med sig.

Euler avslutade sina studier i Basel 1726 och då hade han under Johann Bernouillis ledning läst de viktigaste verken inom den tidens matematik. Han hade bl.a. studerat verk av Galilei, Descartes, Newton, Taylor och Jacob Bernoulli. Han hade också publicerat en kort uppsats. År 1727 vann han andra pris i Parisakademins tävling, vilket var mycket meriterande för en så ung student. När Nicolaus Bernoulli, som var professor i S:t Petersburg, dog 1726 föreslog Johann Bernoulli Euler till tjänsten.

På våren 1727 började Euler sin tjänst som professor i S:t Petersburg. Professuren innebar undervisning i matematiska och mekaniska tillämpningar inom fysiologin. På begäran av bl.a. Daniel Bernoulli blev han förflyttad från avdelningen för fysiologi till avdelningen för matematik och fysik. Euler blev nu del av en miljö med vetenskapligt mycket meriterade kollegor. En dem var naturligtvis Daniel Bernoulli, men där fanns också en annan schweizisk matematiker **Jakob Hermann** och den matematikintresserade Christian Goldbach som var sekreterare i S:t Petersburgs vetenskapsakademi.

Mellan åren 1727 och 1730 tjänstgjorde Euler som medicinsk officer i den ryska flottan. Han blev professor i fysik 1730 och därmed medlem av S:t Petersburgs vetenskapsakademi. Tre år senare lämnade Daniel Bernoulli S:t Petersburg. Trots det goda samarbetet med Euler hade han aldrig trivts där utan längtat tillbaka till Basel. Professorstjänsten innebar att Eulers ekonomiska situation förbättrades och han kunde 1734 gifta sig med **Katharina Gsell**. Hon kom liksom Euler från en schweizisk familj. De fick 13 barn men av dem överlevde bara fem de första åren. Under åren i S:t Petersburg var Euler mycket produktiv men han fick också problem med hälsan. Det började 1735 med en febersjukdom som så när kostat honom livet. Hans syn försämrades också.

År 1740 vann Euler flera priser och hade nu ett stort anseende som matematiker och fysiker. Han fick ett erbjudande om en tjänst i Berlin men han fortsatte som professor i S:t Petersburg. Det politiska klimatet försämrades emellertid och det blev svårare för utlänningar att arbeta i Ryssland. Euler fick ett nytt erbjudande från Fredrik den store och accepterade det. Han flyttade till Berlin 1741 och han kom att arbeta där i 25 år. Hans arbetskapacitet var enorm. Han producerade inte bara runt 380 artiklar och ett antal böcker i matematik och fysik. Han förestod observatoriet och botaniska trädgårdar, han utsåg personal och höll uppsikt över ekonomin. Han publicerade kalendrar och kartor som såldes och gav inkomster till Vetenskapsakademin. Han övervakade det hydrauliska systemet vid det kungliga sommarresidenset. Han var medlem i en rad kommittéer och var rådgivare i frågor som statliga lotterier, försäkringar, pensioner och artilleri.

Fransmannen **Pierre-Louis Maupertuis** (1698–1759) var då Vetenskapsakademins ordförande. När han dog 1759 åtog Euler sig ledarskapet men utan att få titeln ordförande. Han blev sårad när Fredrik den store istället erbjöd ordförandeskapet till den franske vetenskapsmannen d’Alembert. Euler och d’Alembert hade haft en vetenskaplig dispyt tidigare. d’Alembert accepterade emellertid inte erbjudandet. Euler blev alltmer irriterad över att Fredrik den store blandade sig i Vetenskapsakademins verksamhet och bestämde sig för att lämna Berlin och återvände 1766 till S:t Petersburg.

Kort efter ankomsten till S:t Petersburg blev Euler svårt sjuk och nästan blind. Hans hem brann ner 1771 men han kunde rädda sig själv och sina manuskript. Samma år opererades han för att få tillbaka synen. Det verkade som det lyckats men efter ett par dagar blev Euler totalt blind. Tack vare sitt goda minne kunde han fortsätta att arbeta och fick hjälp av två av sina söner samt några yngre matematiker. Trots sitt svåra handikapp var Euler var mycket produktiv. Han publicerade efter 1771 ett arbete på 775 sidor om månens rörelser och han skrev över 250 artiklar. Hans fru Katharina avled 1773 och tre år senare gifte han om sig med hennes syster **Salome Abigail**.

Euler dog 1783 och hans död skildras på följande sätt av matematikhistorikern **Adolph Pavlovich Yushkevich** (1906–93):

> ”Den första halvan av den 18 september 1783 tillbringade Euler som vanligt. Han gav en lektion i matematik till ett av sina barnbarn; han skrev med krita ner några beräkningar om ballongers rörelser på två tavlor; han diskuterade den nyligen upptäckta planeten Uranus med Lexell och Fuss. Vid femtiden på eftermiddagen fick han en hjärnblödning och sade bara ’Jag dör’ innan han förlorade medvetandet. Han dog vid elvatiden på kvällen.”

Eulers vetenskapliga gärning är så stor att det är en omöjlighet att här redogöra för annat än en bråkdel. Den är till volymen mer omfattande än någon annan vetenskapsmans och den innehåller banbrytande arbeten inom de flesta grenar av matematiken och fysiken. Han skrev inte bara vetenskapliga arbeten utan författade också läroböcker som blev epokgörande och en populärvetenskaplig bok *Lettres à une princesse d'Allemagne sur divers sujets de physique et de philosophie* ("Brev till en tysk prinsessa om diverse frågor inom fysik och filosofi"), som omfattade tre band. Istället för att försöka redogöra för de viktigaste arbetena så väljer jag att presentera några av hans insatser inom analysen samt lösningen av ett problem, som gränsar det vi kallar underhållningsmatematik, där lösningen innehåller idéer som skulle vara början på ett nytt område inom matematiken, grafteorin.

Newtons och Leibniz infinitesimalkalkyl var grunden för det som Euler kallade analys och som nu blivit en etablerad del av matematiken. Analys var för honom studiet av hur olika variabler samverkade med varandra. Han utvecklade algebran och han förde räkningen med symboler längre än någon annan. Han använde komplexa tal på ett sätt som inte gjorts förut och han arbetade med oändliga serier mer respektlöst än vad någon tidigare gjort. Vi har tidigare nämnt att han genom att använda serieutvecklingarna för e^x, $\sin x$ och $\cos x$ kom fram till det som vi idag kallar Eulers formel

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x.$$

Om vi sätter $x = \pi$ så får vi

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi} = -1$$

ett samband som fascinerade honom. Han visade att

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$

har ett gränsvärde c som vi idag kallar Eulers konstant. Genom att använda serieutvecklingar av elementära funktioner och en oändlig produkt kunde han visa att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Toppmatematiker som Leibniz, Stirling, de Moivre samt Jacob, Johann och Daniel Bernoulli hade alla försökt beräkna denna oändliga summa men misslyckats. Det kan vara av intresse att skissera Eulers lösning. För en mer detaljerad redogörelse hänvisar vi till avsnitt 15.5.4 i kapitlet om analysens utveckling. Euler utgick från serieutvecklingen

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{120} + \ldots$$

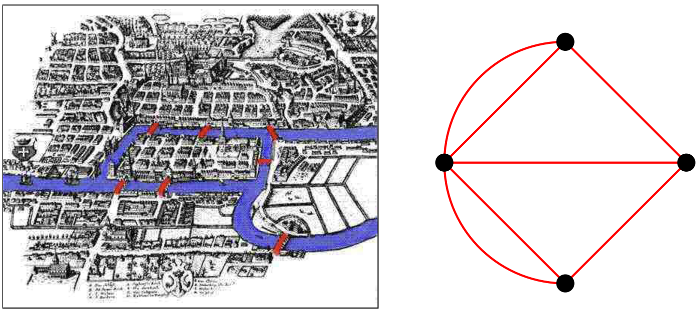
och konstaterade att vänsterledet har nollställena $\pi, -\pi, 2\pi, -2\pi, \ldots$. Han behandlade den oändliga summan som ett polynom av oändlig grad och med oändligt många nollställen. Han faktoriserade serien som man faktoriserar polynom då man känner nollställena och kunde alltså skriva serien som en oändlig produkt. Genom att beräkna koefficienten för x^2 i produkten och sätta den lika med $-1/6$ fann han det sökta resultatet. Han lyckades med liknande metoder utvidga resultatet och visade att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2s}} = C_s \pi^{2s}$$

där C_s är en konstant. Vidare kunde han beräkna $C_2 = 1/90$, $C_3 = 1/945$, $C_4 = 1/9\,450$, $C_5 = 1/93\,555$ och $C_6 = 691/6\,385\,128\,875$.

Euler laborerar med både oändliga summor och oändliga produkter utan att diskutera konvergensen. Resonemanget skulle inte godkännas av dagens matematiker. Euler var inte alltid så noga med stringensen i sina beräkningar. Den stringenta behandlingen av oändliga serier och gränsvärden blev en huvudfråga under nästa sekel. Men han kom till anmärkningsvärda resultat och hans intuition och räkneförmåga förde honom rätt – åtminstone nästan alltid.

Låt oss nu ta upp det underhållningsproblem som jag nämnde tidigare nämligen problemet med Königsbergs broar. Floden Pregel delar staden Königsberg i två delar. Ett brosystem med sju broar förenar de båda stränderna och två öar i floden med varandra. Ett sällskapsnöje för borgarna var att försöka göra en rundvandring så att man gick över varje bro en och endast en gång och sedan kom tillbaka till utgångspunkten. Euler löste problemet d.v.s. han visade att en sådan tripp är omöjlig. Genom att göra en förenklad bild av brosystemet som i figuren till höger, fick han en bättre överblick. De fyra prickarna eller noderna representerar de båda stränderna samt öarna och bågarna betecknar broar.



Figur 8.15: Bilden till vänster visar en teckning av brosystemet i Königsberg och den till höger visar en förenklad bild i form av en graf. (Bild: `2Zyvwdl`)

Med denna förenklade bild är det lätt att inse att en sådan rundtur är omöjlig. Från varje nod utgår ett udda antal bågar. Om man skall göra en rundtur av det slag som beskrivits måste man komma både till och från en nod och antalet bågar till varje nod måste alltså vara jämnt. Slutsatsen blir att den rundvandring som borgarna i Königsberg letade efter inte finns. Euler gav i en artikel mer generella resultat. Studiet av noder och bågar skulle utvecklas till en speciell teori, grafteori med stor betydelse för bl.a. datavetenskap. Grafteori behandlas i avsnitt 17.2.2 i kapitlet om diskret matematik.

Några ord om Euler som personlighet får avsluta vår beskrivning. Han var enligt en av hans medarbetares nekrologer;

> ”. . . en god make, en god vän och en god medborgare och lojal i alla relationer till samhället.”

Han påstod också att han gjorde några av sina största matematiska upptäckter när han höll en baby i sina armar och de andra barnen lekte kring hans fötter. Euler var en genuint social människa och inget ensamt geni.

Jean le Rond d'Alembert (1717–83) föddes i Paris. Hans mor var en kurtisan, **Madame de Tencin**, som en gång varit nunna men som fick påvlig dispens för att göra en lysande social karriär där politiska intriger och amorösa förbindelser ingick. d'Alembert var resultatet av en affär mellan Madame de Tencin och **Louis-Camud Destouches**. Fadern var utomlands när barnet föddes. Modern lämnade den nyfödda sonen på trappan till kyrkan S:t Jean le Rond där man snabbt fann honom och lämnade honom till ett barnhem. Han döptes till Jean le Rond efter kyrkan där han hittades. När fadern kom hem från sin utlandsvistelse tog han kontakt med sonen och ordnade så att en glasmästarfru Rousseau tog hand om honom. d'Alembert skulle alltid kalla **fru Rousseau** för sin mor speciellt som hans biologiska mor inte ville kännas vid honom. Han levde hos fru Rousseau långt fram i medelåldern.

Figur 8.16: Jean le Rond Alembert.
(Bild: 2YOaDu8)

Fadern såg till att Jean le Rond fick utbildning och efter faderns död 1726 tog hans familj över ansvaret. Jean le Rond fick studera vid Jansenist Collège des Quatre Nations. Jansenisterna var en riktning inom katolska kyrkan som var i konflikt med jesuiterna. Under studierna vid det jansenitiska Collège de Quatre Nations tog Jean le Rond sig namnet Jean-Baptise Daremberg som han snart ändrade till Jean d'Alembert. Undervisningen i matematik var mycket elementär men biblioteket var förstklassigt och det utnyttjade d'Alembert. Han skaffade sig på egen hand omfattade kunskaper i ämnet.

Målet med studierna vid Jansenist Collège des Quatre Nations var att utbilda teologer som kunde försvara jansenisterna mot jesuiterna. d'Alembert saknade emellertid intresse för teologi och tänkte göra en juridisk karriär och han avlade examen i juridik 1738. Men advokatyrket passade honom inte och han sadlade om än en gång för att läsa medicin men fann det t.o.m. värre än teologi. Hans huvudintresse hade hela tiden varit matematik som han hade ägnat sig åt parallellt med de andra studierna.

År 1739 skickade han tre artiklar till Parisakademin och han blev på grund av dessa antagen till akademin. Det första större arbetet *Traité de dynamique* kom ut 1742 och resultaten använde han i *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides* ("Avhandling om vätskors jämvikt och rörelse") som kom ut två år senare. För d'Alembert var mekaniken en gren av matematiken. Han intresserade sig inte för det empiriska underlaget och han såg de grundläggande lagarna mer som metafysiska principer.

Omkring 1746 blev d'Alembert ombedd att skriva de matematiska avsnitten i Denis Diderots stora *Encyclopédie* och han blev mer och mer involverad i det arbetet och då inte bara med de matematiska delarna. Den första volymen kom ut 1751 och till den har d'Alembert skrivit förordet. Det blev lovordat som "en text av ett stort geni". Parallellt med arbetet med *Encyclopédie* arbetade d'Alembert med matematik. År 1747 publicerade han två viktiga arbeten. Det ena *Réflexions sur la cause générale des vents* ("Reflektioner över upphoven till vindar") fick pris av Preussiska akademin. Euler såg metodernas effektivitet och utvecklade dem mycket längre än vad d'Alembert gjort. Det andra arbetet är en artikel om svängande strängar där bl.a. vågekvationen härleds.

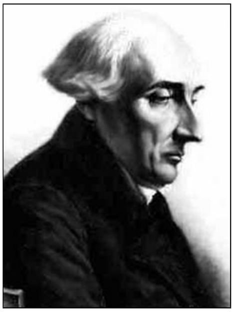
d'Alembert var som person mycket stridbar och han kom nästan alltid i konflikt med sin omgivning. Vi har nämnt hans konflikt med Euler. Hans påstridighet resulterade i att varken Parisakademin eller Berlinakademin ville trycka hans arbete. Han samlade dem istället som *Opuscules mathématiques* ("Häften om matematik") som kom ut i åtta delar mellan 1761 och 1780. Hans idéer om gränsvärden i den femte volymen ledde till vad som idag går under namnet d'Alemberts kvotkriterium. Under rubriken *Differentiel* i *Encyclopédie* definierar han derivatan som gränsvärdet av en kvot.

Den senare delen av sitt liv ägnade sig d'Alembert mer åt litteratur och filosofi än matematik. Han blev 1754 invald i franska akademin och 1772 blev han dess ständige sekreterare. Han var sjuk under sina sista år och det var en anledning att han inte arbetade med matematik. År 1777 skrev han till Lagrange:

> ”Vad som irriterar mig mest är att geometri, som är den enda sysselsättning som riktigt intresserar mig, är en av de saker jag inte kan arbeta med. Allt jag gör inom litteraturen, även om de mottas väl vid våra möten i franska akademin, är för mig bara ett sätt fördriva tiden i brist på något bättre.”

d'Alembert dog 1783 och som sann ateist är han begravd i en allmän omärkt grav.

Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) föddes i Turin i Italien. Han döptes till Giuseppe Lodovico Lagrangia. Hans släkt hade anknytning till Frankrike på faderns sida. Familjen hade gott anseende men var inte förmögen. Faderns planer var att sonen, som kallade sig Ludovico LaGrange eller Luigi Lagrange, skulle utbilda sig till jurist. Han började studera vid universitetet i Turin och hans favoritämne var klassiskt latin. Matematik intresserade honom inte och han fann den grekiska geometrin tråkig.



Figur 8.17: Joseph-Louis Lagrange. (Bild: 2YLuqKU)

Intresset för matematik väcktes när Lagrange läste ett arbete av Halley där algebra tillämpades på optiska problem. Han fick också utmärkt utbildning i fysik vid universitetet i Turin och han bestämde sig för att göra karriär som matematiker. Han började skriva egna arbeten och de första kom ut 1754. Ett av dessa handlade om tautochronen[1] och han hade gjort några viktiga upptäckter som förebådade variationskalkylen. Lagrange sände sitt manuskript till Euler som blev imponerad. Han blev erbjuden en tjänst i Berlin men avböjde inbjudan. Han hade nyligen fått en professur i Turin och var inte benägen att flytta. Han trivdes bra och var inte intresserad av att göra karriär. Han var nöjd med att få möjlighet att ägna sig åt matematik på heltid.

Under Lagranges tid som professor i Turin var han med att grunda Kungliga vetenskapsakademin i Turin som började ge ut en tidskrift *Mélanges de Turin* som kan översättas med ”Sammanställningar från Turin”. Den första volymen kom ut 1759. Lagrange bidrog med flera artiklar. De handlade om variationskalkyl, sannolikhetslära och grundläggande teorier för dynamik. En artikel behandlade den svängande strängen. Han använde en modell där han antog att strängen bestod av n partiklar som uppfyllde ett system med $n+1$ differentialekvationer för att sedan låta n gå mot oändligheten. Han visade också hur man kunde integrera differentialekvationer och han använde metoderna för att lösa problem inom hydromekanik.

Lagrange rykte som matematiker växte och han erbjöds på nytt en tjänst i Berlin 1765 men även denna gång tackade han nej trots att villkoren var generösa. En av anledningarna var enligt hans egna anteckningar att ”Det syns mig som att Berlin inte är en plats för mig så länge Monsieur Euler är där.”. Tydligen ville han hellre vara den förste i Turin än den andre i Berlin. År 1766 fick d'Alembert reda på att Euler skulle återvända till S:t Petersburg och han fick Fredrik den store att utlova ett nytt generöst erbjudande och nu tackade Lagrange ja.

[1]Tautochronen är en kurva, som har egenskapen att en partikel, som rör sig längs kurvan utan friktion och som påverkas av endast tyngdkraften, når slutpunkten på samma tid oberoende av startpunkt.

Lagrange flyttade till Berlin i november 1766 och han blev kvar där i 20 år. Tiden i Berlin var mycket produktiv. Han publicerade arbeten inom astronomi, dynamik, hydromekanik, sannolikhetslära, grundläggande analys och talteori. År 1770 gav han ut arbetet *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* ("Reflexioner över lösning av algebraiska ekvationer") där han undersökte varför ekvationer av upp till och med fjärde graden kan lösas genom successiva rotutdragningar. Han studerar också permutationer av rötterna och det måste betraktas som ett första steg mot gruppteorin som senare utvecklades av bl.a. Cauchy och Galois.

Strax efter ankomsten till Berlin gifte sig Lagrange med sin kusin **Vittoria Conti**. Äktenskapet var barnlöst men Lagrange skrev mycket uppskattande om sin fru. År 1783 dog Vittoria och det medförde att Lagrange fick en depression. Tre år senare dog Fredrik den store och det innebar att Lagrange ställning försämrades. Han sökte sig från Berlin och hade många erbjudanden de flesta från Italien. Lagrange valde emellertid att acceptera ett anbud från Paris. En av orsakerna till att han valde Paris var att han lovades att slippa undervisa.

Han lämnade Berlin 1787 och blev medlem av franska vetenskapsakademin i Paris. Under tiden i Berlin hade han börjat arbeta på en mer heltäckande framställning av mekaniken. Han hade skrivit många artiklar i ämnet men han hade aldrig något större sammanhängande verk. Boken, som hade titeln *Mécanique analytique*, publicerades 1788. I verket sammanfattas det som gjorts inom mekaniken från Newton och framåt. Lagrange utnyttjar konsekvent differentialekvationer. Han transformerar mekaniken till en del av analysen. Han skriver i förordet:

> "Man kommer inte att finna några figurer i detta arbete. De metoder jag utvecklar behöver inte konstruktioner och inte heller geometriska eller mekaniska argument, utan bara algeriska operationer, underkastade ett regelmässigt och enhetligt förfarande."

År 1789 utbröt den franska revolutionen och det fick följder också för vetenskapsakademin. Året efter tillsattes en kommitté med Lagrange som en av ledamöterna för att standardisera mått och vikter. De föreslog ett system som skulle bygga på decimalsystemet. Men klimatet hårdnade och terrorregimen upplöste 1793 akademin men kommittén fick vara kvar. Många av ledamöterna avsattes som kemisten **Antoine Lavoisier**, Laplace och **Charles Augustin de Coulomb**. Lagrange fick vara kvar och blev kommitténs ordförande. Samma år antogs en lag som beordrade att alla utländska medborgare som hade anknytning till ett fiendeland skulle arresteras och deras egendom skulle konfiskeras. Lagrange omfattades av lagen men tack vare ingripande från Lavoisier kom Lagrange inte att drabbas. På våren följande år dömdes Lavoisier och 27 andra till döden och avrättades. Lagrange kommenterade detta med orden "Det tog bara ett ögonblick att få hans huvud att falla men det kommer att ta hundra år skapa dess like."

Den nya regimen förändrade utbildningsväsendet och 1794 grundades École Polytechnique, en ny enhet för högre utbildning. Lagrange blev dess förste professor i analys. Nästa år bildades École Normale, en skola för blivande lärare, och Lagrange undervisade där i elementär matematik. Lagrange måste alltså undervisa trots löftet om motsatsen. Revolutionen hade ändrat förutsättningarna. Omdömena om Lagrange som lärare är inte odelat positiva. En av hans elever gav följande kommentar:

> ". . . allt vad denne store man säger måste tas på största allvar men för ungdomen är han alltför abstrakt."

Lagrange gav ut sina föreläsningar i två band, *Théorie des fonctions analytiques* 1797 och *Leçons sur le calcul des fonctions* 1800. Han fick viss kritik för att de var alltför filosofiska och därmed svårtillgängliga. Han försöker göra en strikt framställning men med våra ögon misslyckas han med att reda ut konvergensbegreppet.

Lagrange hade gift om sig under revolutionens svåra år med en dotter till en av hans kolleger. Det nya äktenskapet blev också barnlöst. Lagrange var intill sin död mycket respekterad. Han fick av Napoleon hederslegionen 1808 och 3 april 1813 blev han belönad med Grand Croix Impérial de la Réunion. Han dog en vecka senare.

Pierre Simon Laplace (1749–1827) föddes i Beaumant-en-Auge, ett litet samhälle i Normandie. Hemmet var relativt välbärgat men utan akademiska traditioner. Han gick som ung i en klosterskola i Beaumant-en-Auge och när han var 16 år började han vid universitetet i Caen. Det var meningen att han skulle bli präst. Det var under de två åren på universitetet i Caen som han upptäckte sina talanger och sitt intresse för matematik. Han flyttade till Paris och tack vare ett introduktionsbrev från en av sina lärare fick han kontakt med d'Alembert, som blev intresserad. d'Alembert hjälpte Laplace med matematikstudierna och såg till att han fick en tjänst som lärare vid École Miltaire.

Figur 8.18: Pierre Simon Laplace. (Bild: `2YN53rQ`)

I Paris började Laplace producera artiklar. Den första som tycktes publicerades i *Nova acta eruditorum*, en tidskrift från Leipzig. Laplace publicerade också en artikel i Lagranges tidskrift *Mélanges de Turin*. Båda artiklarna handlade om analys. Efter upprepade försök att bli medlem i Parisakademin lyckades han tills slut 1773. Han hade skickat in tretton artiklar till akademin. Han hade bidragit med viktiga resultat inom differens- och differentialekvationer men också inom matematisk astronomi och sannolikhetslära. De båda senare områdena skulle sysselsätta Laplace under hela hans aktiva tid.

Laplaces rykte som matematiker ökade under 1770-talet och på 1780-talet var han en av de främsta och mest inflytelserika vetenskapsmännen i världen. Han brukade själv framhålla att han var den störste matematikern i Frankrike vilket inte alltid föll i god jord hos hans kollegor. Det blev inte bättre av att det faktiskt var sant. År 1784 blev Laplace utsedd som examinator vid Kungliga artilleriregementet. Uppdraget gav Laplace värdefulla kontakter och han kom att examinera den då 16-årige Napoleon.

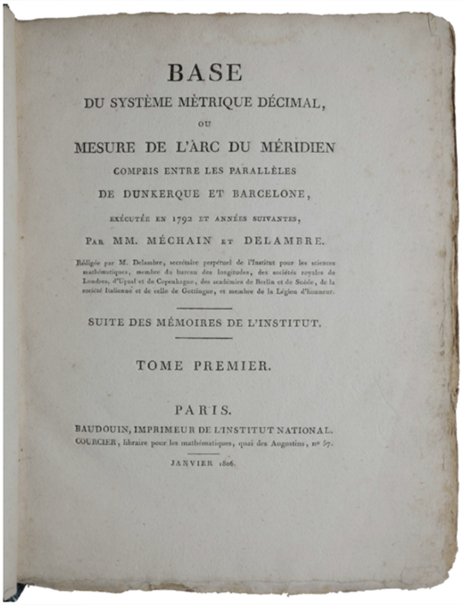
Efter franska revolutionen blev Laplace tillsammans med bl.a. Lagrange medlem i den kommitté som skulle utarbeta förslag till standardisering av mått och vikter. Under terrorregimen blev han avsatt tillsammans med bl.a. Lavoisier. Han och hans familj lämnade Paris och bosatte sig på landet. Han undgick dämed det öde som drabbade Lavoisier som blev giljotinerad 1794.

När École Normale grundades 1795 var Laplace lärare där och undervisade bl.a. sannolikhetslära. Skolan stängdes efter bara fyra månader då de 1200 eleverna, som skulle bli skollärare, med viss rätt fann att den teoretiska nivån på undervisningen var för hög för dem. Vetenskapsakademin hade stängts 1793 men öppnades på nytt nu under namnet Nationella institutet för vetenskap och konst. Laplace hade återvänt till Paris och blev bl.a. chef för Paris Observatorium. Under Napoleontiden var Laplace medlem av senaten och han belönades med hederslegionen 1805. Han arbetade också i inrikesdepartementet men Napoleon avlägsnade honom efter bara sex veckor eftersom "han tog med sig känslan för det oändligt lilla till regeringen". Laplace fick titel greve 1806 och markis 1817.

Laplaces två viktigaste verk är *Traité de mécanique céleste* och *Théorie analytique des probabilités*. *Traité de mécanique céleste* består av fem volymer. De två första kom ut 1798 och ger en fullständig beskrivning av planetrörelserna utgående från Newtons lagar. Tredje och fjärde volymerna publicerades 1802 respektive 1805 och innehåller tillämpningar av resultaten i de båda första delarna samt astronomiska tabeller. Den femte delen kom ut 1825 och innehållet är huvudsakligen historiskt. I de båda första böckerna formulerar han de fysikaliska lagarna med hjälp av differentialekvationer som han sedan löser. Man hittar här den differentialekvation som har fått hans namn. Verket är omfattande och delvis mycket tekniskt. Laplace insåg detta och redan 1796 skrev han en introduktion, *Exposition du système du monde*, utan den avancerade matematiska teknik som genomsyrar *Traité de mécanique céleste*.

Théorie analytique des probabilités är ett omfattande verk i två delar. Vi har i avsnittet om sannolikhetslärans utveckling under 1700-talet givit en kort beskrivning av dispositionen. Verket innehåller en historik, en utveckling av de matematiska begrepp som behövs och en diskussion kring sannolikhetsbegreppet och dess tillämpningar. Som vi tidigare nämnt är *Théorie analytique des probabilités* tekniskt och kräver att läsaren är förtrogen med den tidens matematik. I *Essai philosophique sur les probabilités* från 1814 ger han en mer lättillgänglig version av grundtankarna inom och tillämpningarna av sannolikhetsteori. Ursprunget till arbetet är en föreläsning han hållit på École Normale för den tidens lärarkandidater.

Laplace verkade under Ludvig XVI:s tid, under franska revolutionen, under Napoleontiden och under restaurationen efter Napoleons fall. Han anpassade sina politiska åsikter efter den rådande regimen vilket ofta gjorde honom impopulär bland sina kollegor. Men hans ställning som en av sin tids mest lysande vetenskapsmän var dock aldrig ifrågasatt. Han dog på morgonen den 5 mars 1827. Vetenskapsakademin, som återupprättats av Napoleon, skulle ha möte samma dag men för att hedra Laplace ställde man in det – en unik åtgärd.



BASE
DU SYSTÈME MÉTRIQUE DÉCIMAL,
OU
MESURE DE L'ARC DU MÉRIDIEN
COMPRIS ENTRE LES PARALLÈLES
DE DUNKERQUE ET BARCELONE,
EXÉCUTÉE EN 1792 ET ANNÉES SUIVANTES,
PAR MM. MÉCHAIN ET DELAMBRE.

Rédigée par M. Delambre, secrétaire perpétuel de l'Institut pour les sciences mathématiques, membre du bureau des longitudes, des sociétés royales de Londres, d'Upsal et de Copenhague, des académies de Berlin et de Suède, de la société Italienne et de celle de Gottingue, et membre de la Légion d'honneur.

SUITE DES MÉMOIRES DE L'INSTITUT.

TOME PREMIER.

PARIS.
BAUDOUIN, IMPRIMEUR DE L'INSTITUT NATIONAL.
COURCIER, libraire pour les mathématiques, quai des Augustins, nº 57.

JANVIER 1806.

Figur 8.19: Matematikens utveckling under 1700-talet dominerades av analysen. Den nya kalkylen innebar en revolution och dess möjligheter utnyttjades för att formulera och lösa problem inte minst inom fysiken. Men den matematiken och dess resultat låg långt från den vanliga människans vardag. Något som kom att förändra verkligheten för de flesta medborgare var det radikalt nya måttsystem som infördes i Frankrike efter revolutionen. Det var diplomaten **Charles Maurice de Talleyrand** (bilden till vänster) som insåg att under den turbulens som rådde efter revolution var det möjligt skapa ett mer rationellt och konsekvent uppbyggt måttsystem. En kommission inom franska vetenskapsakademin, där bl.a. Lagrange och Laplace ingick, utarbetade ett förslag som omfattade längd, area, volym och vikt. Det nya systemet antogs genom en lag från 1795. Den grundläggande längdenheten var en meter som sattes lika med $1/10\,000\,000$ av längden av meridianen från nordpolen till ekvatorn genom Paris. Den konkretiserades genom en arkivmeter som förvarades i Paris. När väl längdenheten var definierad kunde man på ett naturligt sätt definiera area-, volym- och viktenheter. Större och mindre enheter bildades genom prefix som kilo för faktorn 1 000 och deci för faktorn 0.1. Omvandlingstalen mellan de olika enheterna var alltid potenser av 10. Detta system kom att införas i ett stort antal länder under 1800-talet och kom att bli det dominerande i ett internationellt perspektiv. Det är idag i stort sett detsamma men några förändringar har gjorts när det gäller definitionen av en meter. Den högra bilden visar det dokument som beskrev det nya systemet. (Bild: `2CrRCqj`, `3h8jq1I`)

Kapitel 9

1800-talet

Under det första decenniet av 1800-talet stod Napoleon på höjden av sin makt. Han hade lagt under sig stora delar av Europa och många länder styrdes av personer som valts ut av honom. Men krigslyckan vände då Napoleon 1812 försökte inta Ryssland. Den franska armén trängde in ända till Moskva men den ryska taktiken – den brända jordens taktik – och den ryska vintern besegrade den. Den led svidande nederlag och återtåget innebar stora förluster. Det slutliga nederlaget för Napoleon blev slaget vid Waterloo 1815. Då hade redan segermakterna året innan vid en konferens i Wien kommit överens om hur Europa skulle delas upp. Napoleon fördes till ön S:t Helena i Sydatlanten där han isolerades och han dog där 1821. Efter Napoleons nederlag återställdes monarkin i Frankrike och huset Bourbon kom till makten. Den störtades i samband med oroligheter 1830 och en ny monarki, den s.k. *borgarmonarkin*, utropades. Nya oroligheter utbröt i februari 1848 och de spred sig inte bara till Europa utan också till Sydamerika. Februarirevolutionen ledde till att Frankrike på nytt blev republik och en brorson till Napoleon I blev president under namnet **Napoleon III**. Han utropade sig till kejsare 1852 men avsattes under det fransk-tyska kriget 1870–1. Frankrike blev åter republik och har så förblivit. Under den s.k. *Pariskommunen* 1871 styrde socialister och anarkister Paris och gatustrider utkämpades där regeringstrupperna till slut segrade.

I Tyskland är Preussen under **Otto Bismarcks** ledning den starkaste makten. Under hans ledning enades Tyskland efter det fransk-tyska kriget. I Storbritannien blir **Victoria** 1837 drottning och hennes regeringstid skulle vara i 64 år. Storbritannien är den ledande kolonialmakten. I Ryssland avskaffas livegenskapen 1861. Samma år enas staterna på Apenninska halvön och kungariket Italien utropas. I USA utkämpas 1861–5 det amerikanska inbördeskriget mellan nord- och sydstaterna och det slutar med att slaveriet avskaffas. President **Abraham Lincoln** mördas i april 1865. Under de två sista decennierna av 1800-talet emigrerar ungefär 10 miljoner européer till USA.

Nya tekniska uppfinningar bidrar till en ökad industrialisering, bättre kommunikationer och högre livskvalitet. 1800-talet är det århundrade då järnvägssystemet utvecklas, vägarna förbättras och båtar drivs med ånga istället för segel. År 1866 läggs den första fungerande telegrafkabeln över Atlanten. Suezkanalen öppnas 1867. Engelsmannen **Henry Bessemer** uppfinner en metod som möjliggör massproduktion av stål. **Graham Bell** uppfinner telefonen, **Thomas Edison** glödlampan, fotograferingskonsten utvecklas och bröderna **Lumière** visar de första filmerna.

Under århundradet publicerades några verk som skulle påverka vårt sätt att se på oss själva och på samhället. År 1848 gav **Karl Marx** och **Friedrich Engels** ut *Det kommunistiska manifestet* som utgör den tankemässiga grunden för de socialistiska och kommunistiska rörelserna. **Charles Darwins** evolutionslära, som 1859 presenterades i *Arternas uppkomst*, utmanade och utmanar ännu många troende. Filosofen **Friedrich Nietsche** kritiserade i *Så talade Zarathustra* de liberala och demokratiska tankar som präglade den europeiska kulturen. Hans tankar på tillvaron som en ständig återupprepning, hans syn på samtiden där ”Gud är död” och hans tro på att övermänniskan skall uppstå och vägleda mänskligheten påverkade inte bara konstnärer, musiker och författare utan även politiker.

Kulturen var under 1800-talet rik och mångfacetterad. Under seklets första del var Johann Wolfgang Goethe Europas dominerande kulturpersonlighet. Han var romantikens främste företrädare och han påverkade många av den tidens stora författare och kompositörer. Han blev redan vid unga år rådgivare åt fursten **Karl August av Sachsen-Weimer** och var minister för finans, bergshantering, vägar, lantbruk, konst och vetenskap samt krigsmakt. Många av de litterära verk som vi idag kallar klassiska skapades under seklet. Prosaister som **Jane Austen** och **Charles Dickens** i Storbritannien, **Gustave Flaubert** och **Emile Zola** i Frankrike, **Leo Tolstoy** och **Fjodor Dostojevskij** i Ryssland, **Mark Twain** och **Henry James** från USA är högaktuella än idag. Poeter som **Paul Verlaine**, **Arthur Rimbaud**, **Walt Whitman**, **Lord Byron** och **Percy Bysshe Shelley** var stilbildande och läses alltjämt. **Anton Tjechovs**, **Henrik Ibsens** och **August Strindbergs** dramer tillhör standardrepertoaren på världens teaterscener. Inom musiken skapades klassiska verk som Ludvig van Beethovens och **Johannes Brahms** symfonier, **Franz Schuberts** lieder, **Frédéric Chopins** och **Franz Liszts** pianoverk, **Maurice Ravels** och **Claude Debussys** impressionistiska kompositioner, **Johann Strauss** dansmusik samt mot slutet av århundradet **Richard Wagners** och **Giusepi Verdis** operor. Inom måleriet utvecklades impressionismen genom konstnärer som **William Turner**, **Éduard Manet**, **Claude Monet**, **Vincent van Gogh**, **Edgar Degas** och **Pierre-Auguste Renoir**.

För Sveriges del började 1800-talet med ett nederlag i det finsk-ryska kriget 1808–9 och freden innebar att Finland förlorades. **Gustav IV Adolf** avsattes och hans efterträdare **Karl XIII** avled 1818. Dessförinnan hade en av Napoleons generaler **Jean Bernadotte** utsetts till kronprins och han blev kung under namnet **Karl XIV Johan**. Den svenska monarkin har sedan dess letts av företrädare för huset Bernadotte. År 1809 infördes en ny regeringsform som angav hur makten skulle fördelas mellan kungen och riksdagen. Genom en ny riksdagsordning 1866 ersattes ståndsriksdagen med en tvåkammarriksdag. Sverige införde som ett av de första länderna allmän skolplikt genom en lag från 1842.

9.1 Analysen får en säkrare grund

Analysen firade stora triumfer under 1700-talet. Den visade sig vara ett effektivt hjälpmedel för att formulera lagar inom fysiken som sedan kunde tillämpas för att i olika speciella fall få konkreta resultat. Men för den klentrogne fanns det oklarheter. Kritiken som framfördes av biskop Berkeleys i *The Analyst* visade sig vara berättigad. Hur kan man arbeta med differentialer som är närmare noll än alla andra tal skilda från noll men som inte är lika med noll? Hur kan man arbeta med differentialer av olika ordningar? Också när det gäller att summera oändliga serier började man inse att det finns oklarheter. Serien

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \dots$$

diskuterades bland matematiker och man hade olika bud på dess summa. Den unge norske matematikern Niels Henrik Abel frågade sig om någon serie egentligen summerats på ett oklanderligt sätt. Det fanns ingen definition av en oändlig series summa.

Frågan ställdes på sin spets i och med de metoder som den franske matematikern **Joseph Fourier** använde för att lösa värmeledningsekvationen i arbetet *Théorie analytique de la chaleur* ("Den analytiska teorin för värme") från 1822. Han löste differentialekvationen genom att utveckla funktioner i oändliga trigonometriska serier. Om $f(x)$ är en funktion som är definierad då x ligger mellan 0 och 2π så kan vi skriva

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Metoden var mycket effektiv och Fourier påstod att en sådan utveckling alltid var möjlig. Hans påstående blev ifrågasatt. Fler frågor uppstod: Vad menar vi med en oändlig series summa? Om nu inte alla funktioner kan utvecklas vad skall vi ställa för krav på funktionen för att utvecklingen skall vara möjlig?

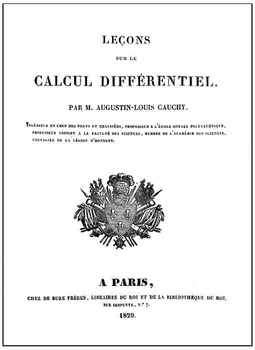
En ansats till en mer stringent framställning av analysen gjordes av Auguste Cauchy i läroboken *Cours d'analyse* som gavs ut 1821. Boken var avsedd för studenterna vid École Polytechnique i Paris där Cauchy var professor. Han definierar bl.a. derivatan av en funktion som gränsvärdet av en kvot och det är ett framsteg även om det återstår att ge en mer exakt formulering av begreppet gränsvärde.

Situationen blev alltmer besvärande då den tyske matematikern **Karl Weierstrass** med hjälp av en trigonometrisk serie lyckades konstruera en kontinuerlig funktion som saknade derivata i varje punkt. Det blev Weierstrass som lyckades ge en stringent systematisk framställning av analysen genom några berömda föreläsningsserier 1859–61 vid universitetet i Berlin. En annan tysk matematiker, **Bernhard Riemann**, hade dessförinnan gjort en stringent definition av integralbegreppet.

Euler m.fl. hade studerat komplexvärda funktioner av en komplex variabel. Under 1800-talet utvecklades teorin av framför allt Cauchy och Weierstrass. Idag kallas den *Funktionsteori* eller *Teorin för analytiska funktioner*.

I arbetet med att ge en stringent framställning av analysen aktualiserades frågor om de reella talen. Vad för egenskaper karakteriserar dem? Kan man konstruera de reella talen utgående ifrån de rationella talen? Hur beskriver man skillnaden mellan rationella och irrationella tal? Dessa frågor behandlades av flera matematiker under senare delen av 1800-talet och åstadkom strider om vilka metoder som är tillåtna. Vi återkommer till dessa frågor i avsnitt 9.6.

Hänvisningar till del 2 Fourierserier och värmeledningsekvationen behandlas i avsnitt 15.7.2. Hela avsnitt 15.8 ägnas åt arbeten om analysens grundvalar. Cauchys *Cours d'analyse* behandlas i avsnitt 15.8.3, Weierstrass arbeten i avsnitt 15.8.4 och Riemanns definition av integrerbarhet i avsnitt 15.8.5.



LEÇONS

SUR LE

CALCUL DIFFÉRENTIEL.

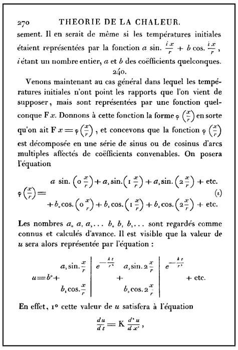
PAR M. AUGUSTIN-LOUIS CAUCHY.

INGÉNIEUR EN CHEF DES PONTS ET CHAUSSÉES, PROFESSEUR A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE, PROFESSEUR ADJOINT A LA FACULTÉ DES SCIENCES, MEMBRE DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, CHEVALIER DE LA LÉGION D'HONNEUR.

A PARIS,

CHEZ DE BURE FRÈRES, LIBRAIRES DU ROI ET DE LA BIBLIOTHÈQUE DU ROI, RUE SERPENTE, N.° 7.

1829.



270 THEORIE DE LA CHALEUR.

sement. Il en serait de même si les températures initiales étaient représentées par la fonction a sin. $\frac{ix}{r}$ + b cos. $\frac{ix}{r}$, i étant un nombre entier, a et b des coëfficients quelconques.

240.

Venons maintenant au cas général dans lequel les températures initiales n'ont point les rapports que l'on vient de supposer, mais sont représentées par une fonction quelconque Fx. Donnons à cette fonction la forme $\varphi\left(\frac{x}{r}\right)$ en sorte qu'on ait $Fx = \varphi\left(\frac{x}{r}\right)$, et concevons que la fonction $\varphi\left(\frac{x}{r}\right)$ est décomposée en une série de sinus ou de cosinus d'arcs multiples affectés de coëfficients convenables. On posera l'équation

$$\varphi\left(\frac{x}{r}\right) = \begin{array}{l} a \sin.\left(0\frac{x}{r}\right) + a_1 \sin.\left(1\frac{x}{r}\right) + a_2 \sin.\left(2\frac{x}{r}\right) + \text{etc.} \\ + b_0 \cos.\left(0\frac{x}{r}\right) + b_1 \cos.\left(1\frac{x}{r}\right) + b_2 \cos.\left(2\frac{x}{r}\right) + \text{etc.} \end{array} \qquad (\varepsilon)$$

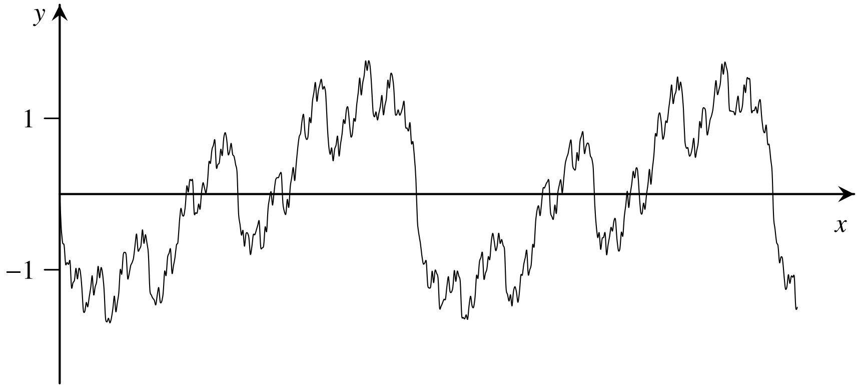
Les nombres $a_0\ a_1\ a_2 \ldots\ b_0\ b_1\ b_2 \ldots$ sont regardés comme connus et calculés d'avance. Il est visible que la valeur de u sera alors représentée par l'équation :

$$u = b^0 + \begin{array}{l} a_1 \sin.\frac{x}{r} \\ b_1 \cos.\frac{x}{r} \end{array} \Bigg| e^{-\frac{kt}{r^2}} + \begin{array}{l} a_2 \sin.2\frac{x}{r} \\ b_2 \cos.2\frac{x}{r} \end{array} \Bigg| e^{-\frac{kt}{r^2}} + \text{etc.}$$

En effet, 1° cette valeur de u satisfera à l'équation

$$\frac{du}{dt} = K\frac{d^2u}{dx^2},$$

$$y = \sin x + \tfrac{2}{3}\sin 2x + \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 \sin 2^2x + \left(\tfrac{2}{3}\right)^3 \sin 2^3x + \left(\tfrac{2}{3}\right)^4 \sin 2^4x + \ldots$$



Figur 9.1: Längst upp till vänster ses titelsidan till Cauchys *Cours d'analyse*. Bilden till höger om den visar en sida ur Fouriers *Théorie analytique de la chaleur* där man kan se en ansats till fourierutveckling. I den undre bilden visas Weierstrass exempel på en funktion som är kontinuerlig men som saknar derivata i varje punkt. (Bild: `2UUuqqF`, `3cTXSDl`, `37o5o8v`)

9.2 Elektromagnetismen formuleras matematiskt

Den matematiska fysiken hade tidigare väsentligen handlat om mekanik och dynamik för fasta kroppar och vätskor. Mot slutet av 1700-talet och i början av 1800-talet inleddes ett mer systematiskt studium av elektricitet och magnetism. Charles Coulombe (1736–1806), **André-Marie Ampère** (1775–1836), **Hans-Christian Ørstedt** (1777–1851), **Georg Ohm** (1789–1854) och **Michael Faraday** (1791–1867) hade genom försök formulerat enkla grundläggande lagar. Mer avancerade matematiska framställningar utvecklades av en av historiens största matematiker Carl Friedrich Gauss men också av fransmännen August Cauchy och **Siméon Poisson** (1781–1840) samt engelsmännen **Georg Green** (1793–1841) och **George Stokes** (1819–1903). Det visade sig att de satser som vi idag kallar Greens formel, Gauss sats och Stokes sats skulle spela en stor roll. Även om satserna utvecklades i samband med försöken att ge elektromagnetismen en matematisk form så kunde de användas i olika sammanhang där man beskrev flöden, t.ex. hos vätskor och gaser. Den teori som utvecklades kallar vi idag vektoranalys.

Den matematiska formuleringen av elektromagnismen nådde sin höjdpunkt i och med Maxwells ekvationer. I fyra partiella diffrentialekvationer sammanfattade **James Clerk Maxwell** (1831–79) sambanden mellan elektriska laddningar samt elektriska och magnetiska fält. De publicerades i *A Treatise on Electricity and Magnetism* från 1873. Det kan vara av intresse att här skriva upp dem även om de förutsätter mer kunskaper än vad denna framställning egentligen kräver. De ger en aning om hur långt analysen hade utvecklats vid 1800-talet sista hälft. Den vanligaste formen av Maxwells ekvationer är

$$\nabla \cdot D = \rho, \qquad \nabla \cdot B = 0, \qquad \nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \qquad \nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}.$$

Här är E det elektriska fältet, D den elektriska flödestätheten, H magnetfältet, B den magnetiska flödestätheten, ρ laddningstätheten och J strömstyrkan. Vidare är $\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$ en differentialoperator medan $\cdot$ och $\times$ betecknar skalärprodukten respektive vektorprodukten.

9.3 Talteori

Infinitesimalkalkylen och dess tillämpningar hade varit i fokus sedan slutet av 1600-talet. Talteorin, som behandlar egenskaper hos de hela talen, hade stått i skymundan. För Fermat hade området emellertid varit centralt och hans bidrag från 1600-talet var fortfarande aktuella under 1800-talet. Det gäller inte minst hans förmodan om att ekvationen

$$x^n + y^n = z^n$$

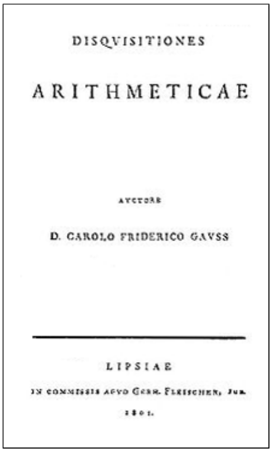
saknar positiva heltalslösningar om n är ett heltal som är större än eller lika med 3.

Under 1700-talet visade bl.a. Euler och Lagrange intressanta resultat. Euler visade att Fermats stora sats är sann för $n = 3$ och han införde funktionen $\phi(n)$, som är lika med antalet heltal k för vilka $1 \leq k < n$ och som saknar gemensamma delare med n. Han gav också en formel för $\phi(n)$. Lagrange visade att varje positivt jämnt heltal kan skrivas som en summa av högst fyra kvadrater. Ett annat intressant resultat är *Wilsons sats*. Olösta problem har formulerats som *Goldbachs förmodan* att varje jämnt positivt heltal kan skrivas som summan av två primtal och frågan om det finns oändligt många primtalstvillingar eller inte.

Resultaten och problemen var emellertid isolerade och det saknades en sammanhängande teori. Carl Friedrich Gauss publicerade år 1801 verket *Disquisitiones Arithmeticae* ("Aritmetiska undersökningar") som var epokgörande. I de första tre kapitlen sammanfattar han de viktigaste då kända resultaten och hans framställning är logiskt deduktiv där sambanden mellan de olika resultaten görs tydliga. I första kapitlet inför han modulobegreppet. Han säger att två heltal a och b är kongruenta modulo ett heltal n om båda ger samma rest vid division med n. Han skriver då

$$a \equiv b \mod n.$$

Gauss visar några enkla räknelagar, som gör resonemangen mer överskådliga, till exempel att om $a \equiv b \mod n$ och $c \equiv d \mod n$ så är också $(a + c) \equiv (b + d) \mod n$ och $ac \equiv bd \mod n$. Central i Gauss framställning är aritmetikens fundamentalsats som säger att varje heltal större än eller lika med 2 kan skrivas som en produkt av primtal och framställningen är entydig så när som ordningen mellan primtalsfaktorererna.


DISQVISITIONES

ARITHMETICAE

AVCTORE

D. CAROLO FRIDERICO GAVSS

LIPSIAE

IN COMMISSIS APVD GERH. FLEISCHER, IVN.

1801.

Figur 9.2: Titelsidan på *Disquisitiones Arithmeticae*. (Bild: `2AAx4Lv`)

Gauss framställning ligger till grund för de flesta framställningar av grundläggande talteori i dagens universitetsutbildning. I de tre första kapitlen visas kända resultat som *Wilsons sats* och *Fermats lilla sats*.

I de fyra återstående kapitlen härleder Gauss nya resultat och mycket handlar om rester av kvadrattal eller summor av kvadrattal. I det sjunde kapitlet visar Gauss att regelbundna n-hörningar kan konstrueras med hjälp av passare och linjal om n är ett *Fermatprimtal* d.v.s. ett primtal på formen $2^{2^k}+1$. Enligt aritmetikens fundamentalsats är i någon mening primtalen byggstenarna för de naturliga talen. En grundläggande fråga är hur de fördelar sig. Redan Euklides visade att de var oändligt många. Gauss studerade primtalstabeller och kom fram till att, om $\pi(x)$ är lika med antalet primtal mindre än x, så är $\pi(x)$ approximativt lika med $x/\ln x$ för stora x. Långt senare 1896 visade **Jacques Hadarmard** och **Charles Jean de la Vallée-Poussin** att

$$\frac{\pi(x)}{x/\ln x} \to 1 \text{ då } x \to \infty$$

och resultatet kallas *primtalssatsen*.

Gauss förnyade talteorin genom *Disquisitiones Arithmeticae*. En ung **Peter Lejeune Dirichlet** bar ständigt verket med sig. Redan som tjugoåring visade han att Fermats stora sats är sann för $n = 5$. År 1837 visade han att det i sviten $a, a + d, a + 2d, a + 3d, \ldots$ finns oändligt många primtal om de positiva heltalen a och d endast har 1 som gemensam delare. Arbetet är nyskapande inte bara genom resultatet utan också genom metodiken. Dirichlet använder metoder från analysen och det är början till vad som skall kallas *analytisk talteori*. De första bevisen av primtalssatsen kan ses som resultat inom analytisk talteori. Det visar sig att såväl Eulers φ-funktion som serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

som kallas *Dirichletserie*, är viktiga hjälpmedel. Dirichlets student Bernhard Riemann skulle studera serien för komplexa värden på s och i det sammanhanget formulera ett av dagens mest kända olösta problem, den s.k. *Riemannhypotesen*. Vi återkommer till den i samband med beskrivningen av Riemanns insatser.

Inom analytisk talteori behandlas inte bara egenskaper hos de hela talen. Viktiga resultat är t.ex. att talen e och π är transcendenta vilket innebär att de inte är rötter till någon algebraisk ekvation med heltalskoefficienter. Transcendensen av e visades 1873 av **Charles Hermite** och transcendensen av π av **Ferdinand von Lindemann** nio år senare.

Dirichlet utvecklade också den mer klassiska algebraiska talteorin i en berömd föreläsningsserie *Vorlesungen über Zahlentheorie*, som publicerades 1863 fyra år efter hans död. I det sista kapitlet inför han begreppet ideal som är centralt i dagens talteori. Ett ideal är en delmängd av t.ex. de hela talen som uppfyller två egenskaper: (i) summan av två tal i idealet ligger också i idealet och (ii) varje heltalsmultipel av ett tal i idealet ligger också i idealet. En stor del av den teknik som utvecklades i algebraisk talteori kan genom idealteorin också tillämpas på polynom.

Hänvisningar till del 2 Avsnitten 17.1.5 och 17.1.6 ägnas åt Gauss *Disquisitiones Arithmeticae* respektive Dirichlets arbeten.

9.4 Algebra

9.4.1 Ekvationer

Andragradsekvationer har man kunnat lösa mycket länge. Italienska matematiker lyckades under 1500-talet ge metoder för att lösa tredje- och fjärdegradsekvationer. För att ekvationerna skulle vara lösbara införde man ett tal vars kvadrat är lika med -1 och det kom så småningom att betecknas med i och kallas den *imaginära enheten*. Man införde komplexa tal $a + \mathrm{i}\, b$ där a och b är reella tal och med hjälp av dem kan man lösa allmänna andra-, tredje och fjärdegradsekvationer. Under framförallt 1700-talet kom de komplexa talen att bli ett effektivt hjälpmedel och inte minst Euler hittade intressanta samband som $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i} \sin x$. Länge saknades en geometrisk framställning av de komplexa talen och det var först i slutet av 1700-talet och början av 1800-talet som dansken Caspar Wessel och fransmannen Jean-Robert Argand införde det vi idag kallar det komplexa talplanet. Det var emellertid genom Gauss arbeten som den geometriska bilden av komplexa tal fick spridning.

I sin doktorsavhandling 1799 visade Gauss att varje ekvation

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

där koefficienterna $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ är komplexa tal och där $a_n \neq 0$ har n komplexa rötter om man räknar dem med multiplicitet. Satsen kallas *Algebrans fundamentalsats*. Gauss gav flera bevis för den och några av dem utnyttjar det komplexa talplanet.

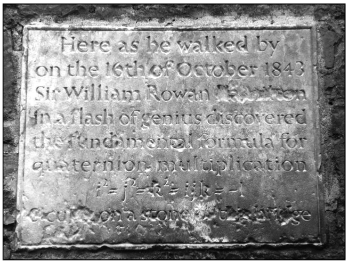
Algebrans fundamentalsats säger bara något om existensen av lösningar. Den ger ingen metod att finna dem. För första-, andra-, tredje- och fjärdegradsekvationer finns metoder att beräkna lösningarna. Men hur är det med femtegradsekvationen? Svaret på den frågan gav den unge norske matematikern Niels Henrik Abel, som i en artikel från 1824 visade att det inte finns någon liknande metod för femtegradsekvationen. Det finns en femtegradsekvation sådan att rötterna inte kan bildas genom att successivt använda de fyra räknesätten och rotutdragningar. Nästa fråga som inställer sig är: ”Vilka ekvationer har rötter som kan skrivas på detta sätt?” eller med den gängse terminologin: ”Vilka ekvationer kan lösas med hjälp av radikaler?” Svaret på denna fråga finns i de teorier som skapades av den unge fransmannen Evariste Galois.

Galois liv var dramatiskt. Hans matematiska begåvning var stor men han var också arrogant och provocerande. Det ledde till att han blev utmanad på duell vid 21 års ålder. Han trodde inte att han skulle överleva duellen eftersom han var en dålig skytt och natten innan skrev han ner sina tankar om algebraiska ekvationer och bad en vän överlämna anteckningarna till några av den tidens ledande matematiker, bl.a. Gauss. Galois farhågor besannades. Han sårades under duellen och avled av sviterna. Hans vän uppfyllde hans önskan men det hördes inget från de matematiker som fått anteckningarna. De nådde så småningom en av den tidens tongivande franska matematiker **Joseph Liouville** som insåg värdet och publicerade dem 1843 i *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, den tidskrift han själv hade grundat. Hans kommentar till Galois arbete var att han funnit en koncis lösning som både är korrekt och djup till följande vackra problem: ”Givet en irreducibel algebraisk ekvation av primtalsgrad: Avgör om den är lösbar med hjälp av rotutdragning eller ej.”.

9.4.2 Kvarternioner och matriser

För att kunna lösa varje andragradsekvation infördes de komplexa talen $a + \mathrm{i}\, b$ där $\mathrm{i}^2 = -1$. Algebrans fundamentalsats säger att varje ekvation med komplexa koefficienter har komplexa rötter. De komplexa talen behöver alltså inte utvidgas för att högregradsekvationer skall vara lösbara. De komplexa talen räcker till.

Men det är ändå naturligt att fråga sig om vi kan utvidga de komplexa talen genom att lägga till ytterligare tal vars kvadrat är lika med -1. Den irländske fysikern och matematiken **William Rowan Hamilton** (1805–65) funderade över hur ett sådant talområde skulle konstrueras.



Figur 9.3: Hamilton kom under en promenad på hur han skulle multiplicera kvarternionerna och ristade in lagarna i en träbro. Bilden visar ett minnesmärke vid bron. (Bild: `2YD88L2`)

Han kom snart underfund med att det inte räckte att lägga till ett tal j sådant att $\mathrm{j}^2 = -1$. Produkten ij kunde inte finnas med bland talen $a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j}$ om vanliga räknelagar förutsattes gälla. Under en inspirerad skogspromenad kom han på lösningen. Han lade till ytterligare ett tal k sådant att $\mathrm{k}^2 = -1$ och satte $\mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k}$, $\mathrm{jk} = -\mathrm{kj} = \mathrm{i}$, $\mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = \mathrm{j}$. Talen $a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$, där a, b, c och d är reella tal, kom då att uppfylla de vanliga räknelagarna utom den kommutativa lagen. Han kallade de nya talen *kvarternioner*. Det är första gången man räknar med tal som inte uppfyller den kommutativa lagen.

Arthur Cayley och James Joseph Sylvester var två engelska matematiker som under en period i slutet av 1840-talet arbetade vid en domstol i London. De blev goda vänner och under gemensamma promenader under pauserna i arbetet diskuterade de matematiska problem. Under deras diskussioner föddes idéerna om att transformationer av planet skulle kunna beskrivas med vad som senare skulle kallas *matriser*. Sylvester införde begreppet i en artikel från 1850 men det var Cayley som i en artikel från 1855 gav en första mer sammanhängande teori för matriser. Han introducerar bl.a. matrismultiplikation och invers matris. Matriser är nu oundgängliga redskap inom nästan alla grenar av matematiken och grundläggande matrisiteori ingår nu i alla elementära högskolekurser. Matrismultiplikation är ytterligare ett exempel på en operation som inte är kommutativ. Införandet av kvarternioner och matriser får ses som steg mot den abstrakta algebran med begrepp som grupper, ringar och kroppar.

Hänvisningar till del 2 Avsnitten 14.5.3 och 14.5.4 ägnas åt algebrans fundamentalsats respektive kvarternioner. Avsnitt 14.6 behandlar lösningar av algebraiska ekvationer med rotutdragning. I avsnitten 14.6.2 och 14.6.3 kommenteras Abels bevis om femtegradsekvationens olösbarhet med radikaler respektive Galoisteori. I avsnitt 14.7.4 behandlas matriser.

9.5 Geometri

9.5.1 De tre klassiska konstruktionsproblemen får en lösning

Den ökande kunskapen om lösbarheten av algebraiska ekvationer ledde till att tre klassiska geometriska problem fick en lösning. Sedan antiken hade man frågat sig hur man med bara passare och ograderad linjal konstruerar en kub med dubbelt så stor volym som en given, delar en given vinkel i tre lika stora delar och konstruerar en kvadrat med lika stor area som en given cirkel. Problemen hade lösts men inte med de stränga krav som angivits: Inga andra hjälpmedel än passare och ograderad linjal är tillåtna och konstruktionen skall ske i ändligt många steg. Problemen hade under århundraden utmanat många stora matematiker och deras arbeten resulterade i intressanta begrepp och teorier, men inte till någon lösning. Det är troligt att många ställde sig frågan om konstruktionerna verkligen är möjliga, men hur inser man i så fall att de inte är det. Teorier för algebraiska ekvationer skulle ge svaret.

Till de tre problemen kan man knyta tre ekvationer. Kubens fördubbling handlar om att konstruera talet x så att $x^3 = 2$. Vissa vinklar kan delas i tre lika stora delar enligt de givna reglerna men frågan är om alla kan det. Om vi väljer vinkeln 60° så är problemet ekvivalent med att konstruera $x = \cos 20°$ som enligt en trigonometrisk formel uppfyller ekvationen $4x^3 - 3x = \cos 60° = 1/2$. Cirkelns kvadratur handlar om att konstruera kvadratens sida x sådan att $x^2 = \pi$.

Det blev den franske matematikern **Pierre Wantzel** (1814–1848) som löste de båda förstnämnda problemen. Han insåg för det första att om en sträcka med längden 1 är given så är en sträcka med längden x konstruerbar med passare och linjal bara om den har en längd som bildats från talet 1 genom upprepade användningar av de fyra räknesätten och kvadratrötter. Därefter visade han att rötterna till de båda ekvationerna $x^3 = 2$ och $4x^3 - 3x = 1/2$ inte hade dessa egenskaper. Problemen med kubens fördubbling och vinkelns tredelning är alltså olösbara. Att cirkelns kvadratur är olösbart följer av att π är transcendent vilket, som vi tidigare nämnt, visades 1882 av Ferdinand von Lindemann.

9.5.2 Problemet med parallellerna får sin lösning

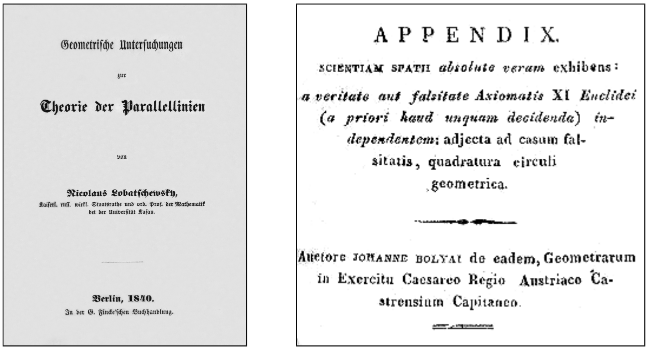
Euklides *Elementa* är fortfarande under 1800-talet en grundbult inom matematiken. Matematiker av facket förutsätts känna till innehållet och den deduktiva uppbyggnaden har blivit en modell för framställning av matematik. Axiomen och postulaten är utgångspunkter för den deduktiva framställningen. Men postulaten är inte invändningsfria. De fyra första, som säger att en rät linje är obegränsad, att det genom två punkter alltid går en rät linje, att det finns en cirkel med given medelpunkt och radie samt att alla räta vinklar är lika stora, accepterades. Det femte postulatet, som kan formuleras på följande sätt (se figur 2.2):

> Om två räta linjer skärs av en tredje och om summan av två inre vinklar på samma sida om den skärande linjen är mindre än två räta, så skär de två linjerna varandra på samma sida om de dras ut tillräckligt långt.

ifrågasattes redan under antiken. Det var mer komplext än de fyra övriga och borde kunna bevisas med hjälp av dem. Under årtusenden ägnade många matematiker kraft åt att försöka åstadkomma ett sådant bevis. Nyplatonikern Proklos (412–85), de arabiska matematikerna Omar Khayyam och **Nasir Eddin al-Tusi** (1201–74) samt den engelska matematikern John Wallis (1616–1703) gav alla ett slags bevis men vid närmare granskning hade de i bevisen utnyttjat påståenden som inte bevisats. Man hade ersatt Euklides femte postulat med ett annat.

Viktiga bidrag för att förstå problematiken gjordes av jesuitprästen **Girolamo Saccheri** (1667 –1733), **Johann Heinrich Lambert** (1722–77) och **Adrien Marie Legendre** (1752–1833). I stort sett antog de att det femte postulatet var falskt och försökte visa att det leder till en motsägelse. De misslyckades. Nu började några matematiker att tvivla på att det var möjligt att bevisa det femte postulatet utifrån de övriga fyra. Kanske fanns det en geometri där Euklides fyra första postulat och motsatsen till hans femte är uppfyllda. Gauss var inne på den linjen och han undersökte vilka egenskaper en sådan geometri skulle ha och fann att t.ex. vinkelsumman i en triangel i den nya geometrin är mindre än 180°. De som systematiskt skulle utveckla en teori för en sådan geometri var **Nikolaj Lobatjevskij** och **János Bolyai**.

Lobatjevskij presenterade sina resultat i en serie föreläsningar vid S:t Petersburgs universitet 1829 och publicerade dem i en rad artiklar där den sista är från 1855 och har titeln *Pangéométrie ou précis de géométrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des Paralléles* (”Pangeometri eller exakt geometri baserad på en generell och noggrann teori om paralleller”). Bolyai presenterade sin teorier 1831 i ett appendix till en lärobok som hans far skrivit. Appendixet har namnet *Scientiam spatii absolute verum* (”Vetenskapen om det absoluta rummet”). Innehållen i de båda matematikernas arbeten är likartade. I den nya geometrin är är inte bara vinkelsumman i en triangel mindre än 180°. Två trianglar som är likformiga är också kongruenta och det finns inga rektanglar.

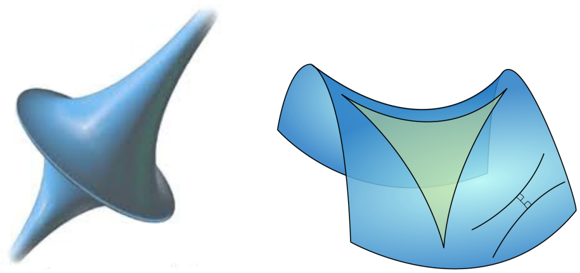

Geometrische Untersuchungen
zur
Theorie der Parallellinien
von
Nicolaus Lobatschewsky,
Kaiserl. russ. wirkl. Staatsrathe und ord. Prof. der Mathematik
bei der Universität Kasan.
Berlin, 1840.
In der G. Fincke'schen Buchhandlung.

APPENDIX.
SCIENTIAM SPATII *absolute veram* exhibens:
a veritate aut falsitate Axiomatis XI *Euclidei* (*a priori haud unquam decidenda*) *independentem*; adjecta ad casum falsitatis, quadratura circuli geometrica.
Auctore JOHANNE BOLYAI de eadem, Geometrarum in Exercitu Caesareo Regio Austriaco Castrensium Capitaneo.

Figur 9.4: Till vänster visas titelsidan till Lobatjevskis arbete *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien* från 1840 och till höger visas titelsidan till Bolyais *Scientiam spatii absolute verum*. (Bild: `https://s.si.edu/37jC0jQ`, `2zmorDs`)

Resultaten strider mot våra invanda föreställningar men den nya teorin verkade motsägelsefri. Men kan man vara säker på det? Det kan ju dyka upp någon form av motsägelse längre fram och i så fall är ju inte parallellpostulatet oberoende av de fyra andra. Frågan om den nya geometrins motsägelsefrihet löstes åtminstone delvis i mitten av 1800-talet. Man lyckades visa att om den euklidiska geometrin är motsägelsefri så är också den nya geometrin det. Matematiker som **Eugenio Beltrami**, **Felix Klein** och **Henri Poincaré** skapade modeller av den nya geometrin med hjälp av den euklidiska. Begrepp som punkter, räta linjer, avstånd och vinklar gavs en ny tolkning. Beltrami, som ägnat sig åt differentialgeometri, realiserade den nya geometrin på en s.k. *pseudosfär*, som är den yta som genereras då en speciell kurva, som kallas *traktris*, roterar kring sin asymptot. Punkterna i den nya geometrin är punkterna på ytan och de räta linjerna är ytans geodetiska linjer d.v.s. de kurvor på ytan man skall följa för att minimera avståndet mellan två punkter.

Under arbetet med postulaten med den icke-euklidiska geometrin upptäckte man ofullständigheter i Euklides axiomsystem. Den tyske matematikern **David Hilbert** gav 1899 ut



Figur 9.5: Bilden till vänster är en pseodosfär och bilden till höger visar en triangel i den hyperboliska geometrin. (Bild: `2MOF1PJ`, `3hAA4YN`)

verket *Grundlagen der Geometrie* där han gör en grundlig översyn av Euklides axiom och utarbetar ett nytt system där han försöker eliminera ofullständigheterna i *Elementa*.

9.5.3 Projektiv geometri

Under renässansen utvecklades perspektivmåleriet mycket tack vare konstnärernas studier av proportions- och perspektivlära. Under 1600-talet gav den franske matematikern Girard Desargues ett viktigt bidrag till det som skulle kallas projektiv geometri genom att se kägelsnitten som projektioner av en cirkel. Genom att studera egenskaper, som inte ändras under projektioner kunde han härleda egenskaper hos ellipser, hyperbler och parabler genom att studera motsvarande egenskaper hos en cirkel där resonemangen är enklare att genomföra. Han härledde också ett samband som numera kallas *Desargues sats* och som har likheter med en sats av Pappos från 300-talet.

Under Napoleontiden fick geometrin en form av renässans. Matematiker som **Gaspard Monge** med en bakgrund som konstruktör av försvarsbyggnader och **Lazare Carnot**, som var officer och ingenjör, utvecklade vad man kallar deskriptiv geometri. Desargues arbeten, som varit glömda i mer än ett sekel, återupptäcktes och blev viktiga delar av denna geometri. Den som i främsta rummet kom att utveckla den projektiva geometrin var **Jean Victor Poncelet** (1788–1867) som hade studerat för både Monge och Carnot. Poncelet var officer och deltog i Napoleons ryska fälttåg 1812. Han var krigsfånge i Ryssland 1813–4 och återvände därefter till Frankrike. Det sägs att han i fångenskapen utvecklade några av de tankar som senare ledde fram till verket *Traité des propriétés projectives des figures* ("Avhandling om figurers projektiva egenskaper") som publicerades 1822. En andra upplaga publicerades 1865–6 och den utgavs på nytt så sent som 1995. Verket innehåller i princip det som idag ingår i kurser i projektiv geometri på universitetsnivå. Poncelet visar t.ex. att dubbelförhållandet mellan fyra punkter på en en rät linje[1] är oförändrat vid centralprojektion, han visar att kägelsnitten är projektiva avbildningar av en cirkel, han inför oändlighetspunkter och oändlighetslinje för att få en mer enhetlig framställning och han inför begreppen pol och polar.

[1]Dubbelförhållandet mellan de fyra punkterna A, B, C och D som ligger på samma räta linje definieras genom

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{AD}} \Big/ \frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{BD}}$$

där $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$ och $\overrightarrow{BD}$ är längderna av motsvarande sträckor räknade med tecken. En positiv riktning införs på den räta linjen. Sträckor med denna riktning är positiva och de med motsatt är negativa.

De två sistnämnda påståendena tarvar kanske ett förtydligande. En oändlighetspunkt är skärningspunkten mellan två parallella linjer och till varje riktning hör en oändlighetspunkt. Oändlighetspunkterna utgör tillsammans oändlighetslinjen. Polaren p till en punkt P, som vi kallar pol, utanför en cirkel får vi om vi drar tangenterna till cirkeln och sammanbinder tangeringspunkterna. Med andra ord är polaren till P tangentkordan till P. Om P ligger inuti cirkeln så kommer tangenterna till ändpunkterna av en korda genom P att skära varandra i en punkt och om kordan vrider sig kring P kommer skärningspunkterna att ligga på en rät linje p, som är polaren till polen P.

9.5.4 Differentialgeometri

Differential- och integralkalkylen blev ett viktigt redskap för att beskriva kurvor och ytor i rummet. Det blev möjligt att bestämma tangenter, tangentplan, normaler och normalplan. Mått på krökning av både kurvor och ytor infördes. Ett viktigt område var att bestämma de geodetiska linjerna på en yta d.v.s. de kurvor på ytan som man skall färdas på om man vill minimera avståndet mellan två punkter. På en sfär är t.ex. de geodetiska linjerna storcirklar.

En av pionjärerna för denna geometri, som vi kallar differentialgeometri, var Gaspard Monge som under slutet av 1790-talet publicerade boken *Application de l'analyse à la géométrie* ("Tillämpning av analysen på geometrin"). De mest betydelsefulla bidragen stod Carl Friedrich Gauss för. I en rad arbeten utvecklade han området och hans kanske mest berömda arbete är *Disquisitiones generales circa superficies curvas* ("Allmänna undersökningar av krökta ytor") från 1828. I den inför han ett krökningsmått, som nu kallas *Gausskrökning*, och han visade att det måttet blev oförändrat om man deformerade ytan utan att sträcka den. Han kallade satsen för *Theorema egregium* ("Det märkvärdiga teoremet"). Den italienske matematikern Eugenio Betrami översatte Gauss verk om differentialgeometri till italienska och han studerade speciellt ytor där krökningen är densamma i varje punkt på ytan. En sådan yta är pseudosfären och den en modell av en icke-euklidisk geometri.

Bernhard Riemann var elev till Gauss och räknas som en av 1800-talets mest nyskapande matematiker. Han införde ytor för att beskriva mångtydiga analytiska funktioner, s.k. *Riemannytor*. Det var ett annat sätt att se på ytor där man inte betonade begrepp som avstånd och krökning utan mer hur de olika delarna av en yta hängde samman. Han betonade vad vi idag kallar de topologiska egenskaperna. I en berömd föreläsning från 1854, *Über die Hypotesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, tar han upp begrepp som n-dimensionella mångfalder som långt senare skulle bli centrala inom teorin för differentialekvationer.

9.5.5 Geometri och grupper

Den tyske matematikern Felix Klein presenterade 1872 vid sin installationsföreläsning som professor vid universitetet i Erlangen ett program där han visar hur olika geometrier karakteriseras av grupper av avbildningar av t.ex. rummet på sig själv. En grupp av avbildningar karakteriseras av att om två avbildningar ligger i gruppen så gör också deras sammansättning och deras inverser det. De avbildningar som lämnar avståndet oförändrat bildar en grupp och den euklidiska geometrin handlar om egenskaper som inte ändras vid avbildningar ur denna grupp. De avbildningar som lämnar dubbelförhållandet oförändrat bildar en grupp och den projektiva geometrin handlar om egenskaper som inte ändras under dessa avbildningar. Den norska matematikern **Sophus Lie** (1842–99) skulle utveckla Kleins tankar i det banbrytande arbetet *Theorie der transformationengruppen* som kom ut i tre band mellan 1888 och 1893.

I det arbetet studerar Lie vad han kallar infinitesimala grupper och hur man kan använda dem inom t.ex. differentialgeometri och vid studiet av partiella differentialekvationer.

Hänvisningar till del 2 I kapitlet om geometrins utveckling behandlas projektiv geometri i avsnitt 13.6.2, differentialgeometri i avsnitt 13.7, icke-euklidisk geometri i avsnitt 13.8, de tre klassiska konstruktionsproblemen i avsnitt 13.9 och geometri och grupper i avsnitt 13.10.

9.6 Att räkna med oändligheter

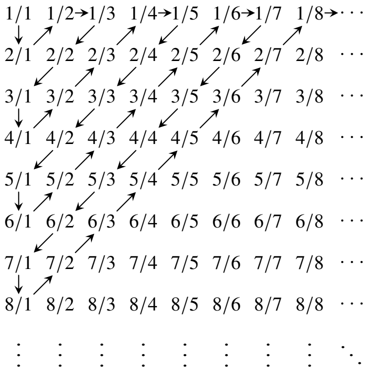
I arbetet med att ge en fast grund för analysen hamnade man till slut i problemet att karakterisera de reella talen eller kanske rättare att konstruera dem. De naturliga talen karakteriserades av den italienske matematikern **Giuseppe Peano** med hjälp av fyra postulat i boken *Arithmetices principia, nova methodo exposita* ("Aritmetikens principer visade med en ny metod"). Det är sedan relativt enkelt att utifrån de naturliga talen konstruera de hela talen och de rationella talen. Det var svårare att konstruera de reella talen utifrån de rationella. Den tyske matematikern **Richard Dedekind** använde sig av en metod med snitt bland de rationella talen.

Dedekinds kollega **Georg Cantor** studerade från början trigonometriska serier, men leddes genom Dedekind in på studiet av oändliga mängder. I en rad artiklar utvecklar Cantor vad som skulle komma att kallas *transfinit aritmetik*. Han använder den moderna definitionen av funktion som Dirichlet infört och han inför också begreppet mängd. Han säger att två mängder A och B har samma mäktighet om det finns en funktion från A till B sådan att varje element i A svarar mot precis ett element i B och omvänt. Om vi betraktar mängder med ändligt många element så har alla mängder med lika många element samma mäktighet. En mängd som har samma mäktighet som de naturliga talen kallas *uppräknelig*. Cantor lyckas visa de något förvånande resultaten att de rationella talen är uppräkneliga och att detsamma gäller att lösningar till ekvationer med heltalskoefficienter. Däremot är inte de reella talen uppräkneliga. De reella talen är alltså betydligt fler än de rationella. Bevisen skisseras i figur 9.6. Cantor inför också transfinitia tal som mått på oändliga mängder och definierar räkneoperationer på dem.

Cantor för oss in i en helt ny värld. Men hans teorier blev ifrågasatta. En av de fränaste kritikerna var **Leopold Kronecker**. Kronecker hade en mycket sträng inställning till de begrepp och metoder som var tillåtna inom matematiken. Endast de tal som kan konstrueras utifrån de naturliga talen i ett ändligt antal steg är tillåtna och endast bevis som är konstruktiva accepteras. Det innebär bland annat att Kronecker inte godkänner motsägelsebevis. Cantors värld där han räknar med olika grader av oändligheten och inför transfinita tal som han opererar med blir naturligtvis helt oacceptabel för Kronecker. Meningsskillnaderna urartade till fientlighet och den som kom att bli mest lidande var Cantor som led av återkommande depressioner.

Cantors transfinita matematik används fortfarande och är accepterad. Kroneckers konstruktiva matematik har sin naturliga tillämpning när matematiska problem skall lösas maskinellt.

Hänvisningar till del 2 I kapitlet om diskret matematik behandlas Cantors mängdlära i avsnitt 17.3.2 och Peanos axiomsystem i avsnitt 17.3.4.



$$
\begin{array}{lcllllllllllll}
E_0 & = & m & m & m & m & m & m & m & m & m & m & m & m\cdots \\
E_1 & = & w & w & w & w & w & w & w & w & w & w & w & w\cdots \\
E_2 & = & m & w & m & w & m & w & m & w & m & w & m & w\cdots \\
E_3 & = & w & m & w & m & w & m & w & m & w & m & m & w\cdots \\
E_4 & = & w & m & m & w & w & m & m & w & m & w & m & w\cdots \\
E_5 & = & m & w & m & w & w & m & w & m & w & m & w & m\cdots \\
E_6 & = & m & w & m & w & w & m & w & w & m & w & m & w\cdots \\
E_7 & = & w & m & m & w & m & w & m & w & m & w & m & w\cdots \\
E_8 & = & m & m & w & m & w & m & w & m & w & m & w & m\cdots \\
E_9 & = & w & m & w & m & m & w & w & m & w & w & m & w\cdots \\
E_{10} & = & w & w & m & w & m & w & m & w & m & m & w & m\cdots \\
E_{11} & = & m & w & m & w & w & m & w & m & m & w & m & m\cdots \\
\vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\ddots \\
E_u & \neq & w & m & w & w & m & w & m & m & m & m & m & w\cdots
\end{array}
$$

Figur 9.6: Den vänstra bilden visar Cantors metod att räkna upp de positiva rationella talen. På första raden står alla tal med täljaren 1, på den andra alla med täljaren 2 o.s.v. Talen räknas upp i den ordning pilarna visar. Om ett tal redan förekommit hoppar man bara över det. Den högra bilden illustrerar beviset för att de reella talen inte är uppräkneliga. En tänkt uppräkning är $E_1, E_2, E_3, \ldots$ och vi begränsar oss till de tal som ligger mellan 0 och 1. De skrivs upp som oändliga följder av de två symbolerna m och w. Betrakta elementen i diagonalen och betrakta det tal vi får om vi byter ut w mot m och vice versa. Vi får då ett tal E_u som inte är med i uppräkningen.

9.7 Preludier till IT-samhället

9.7.1 Charles Babbage, Ada Lovelace och den analytiska maskinen

> ”. . . Jag satt i Det analytiska sällskapets rum i Cambridge och lutade mitt huvud mot bordet i slags drömskt tillstånd med en tabell med logaritmer framför mig. En annan medlem, som kom in och såg mig halvsovande, utropade, ’Babbage, vad drömmer du om?’ och jag svarade medan jag pekade på logaritmerna ’Jag tänker på om alla dessa tabeller kunde beräknas med en maskin.’”

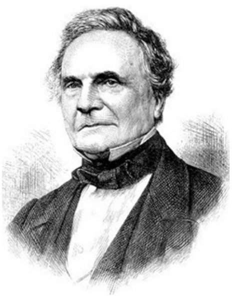
Citatet är hämtat från **Charles Babbages** memoarer. Babbage var matematiker och som sådan inte speciellt framgångsrik. Hans artiklar om serier uppmärksammades inte och en del var felaktiga. Han var en av grundarna av Det analytiska sällskapet som arbetade för att införa Leibniz beteckningar i analysen i stället för Newtons, som då var dominerande i Storbritannien. Hans dröm om att kunna automatisera långa och tidsödande beräkningar skulle inte bara spara arbetskraft. Det skulle också minska felen. Pascal och Leibniz hade visserligen konstruerat räknemaskiner men Babbage ville framställa en maskin som skapade tabeller och som också skrev ut dem. År 1822 hade han konstruerat en maskin, som han kallade differensmaskin, som beräknade och skrev ut värdena av $n^2 + n + 41$ men en hastighet av 60 tal på 5 minuter. Maskinen blev uppmärksammad och Babbage fick statliga medel för att vidareutveckla den. Hans nya maskin kom aldrig att fungera och bidragen upphörde 1834. Han började skissera på en ny maskin som han kallade analytisk och som på många sätt är föregångare till dagens dator. Han arbetar med fem logiska komponenter: minne, processor, kontrollenhet, input och output. Han lånade teknik från olika håll bl.a. från **Jacqards** automatiska vävstolar. Maskinen kom aldrig att fungera men den fick en del uppmärksamhet och Babbage presenterade sina idéer för den italienska vetenskapskongressen.

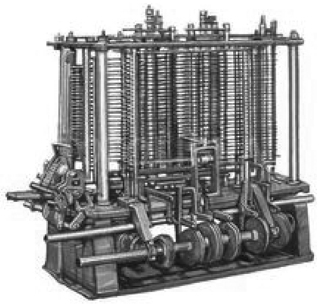
Babbages maskin fick inget stöd av staten men det fanns en som trodde på idén. **Ada Lovelace**, som var dotter till en av Englands mest berömda poeter Lord Byron, såg stora möjligheter i Babbages analytiska maskin. Ada Lovelace träffade aldrig sin far och moderns uppfostran gick ut på att hålla henne borta från allt vad lyrik hette. Hon undervisades i matematik av en av Englands mest framstående matematiker **Augustus de Morgan** (1806–71), som arbetade i gränslandet mellan algebra och logik.

Vid ett föredrag av Babbage vid den italienska vetenskapsakademin förde en ingenjör noggranna anteckningar på italienska. Ada Lovelace fick i uppgift att översätta dem. Till översättningen bifogade hon några egna kommentarer och de var dubbelt så långa som själva huvudartiklen. De innehåller tankar som visar att Ada Lovelace såg maskinen som ett betydligt mer generellt verktyg än bara som en räkneapparat. Hon skriver:

> ”Den analytiska maskinen täcker inte mark som den har gemensamt enbart med ’räknemaskiner’. Den har en alldeles egen plats. Genom att sätta en mekanism i stånd att kombinera *generella* symboler i följder av obegränsad variation och omfattning etableras en förenande länk mellan materiella operationer och abstrakta mentala processer.”

Hon skriver också ”Den analytiska maskinen väver algebraiska mönster alldeles som jacquardvävstolen väver blommor och blad.”. Man anar de Morgans algebraisering av logiken bakom hennes tankar. Hon avslutar sina kommentarer med en tabell och ett diagram som visar exakt steg för steg hur en algoritm för att beräkna s.k. *Bernouillital*[2] skall matas in i maskinen. Det måste nämnas att Babbage i hög grad uppskattade hennes kommentarer.





Figur 9.7: Babbage och en bild på hans differensmaskin. (Bild: `30VHnEv`, `3cTBeuX`)

9.7.2 Booles algebraisering av logiken

Augustus de Morgan var en av de engelska matematiker som arbetade med att reformera den matematiska logiken, och i det sammanhanget formulerade han de samband som nu kallas *de Morgans lagar*. En annan matematisk logiker som skulle få stor betydelse för utvecklingen av datorn är **George Boole**. Hans mest berömda verk är *An investigation Into the Laws of Thought* som kom ut 1854. Där reducerar han logik till algebra och han inför det som senare kallas *Boolesk algebra*. Han inför symboler för ”och”, ”eller” och ”icke”, visar hur man kan formulera sammansatta satser med hjälp av dessa och bestämmer sanningstabeller för olika logiska uttryck. När den unge teknikern **Claude Shannon** började arbeta på Bells Labs 1937 studerade han telefonväxlarnas kretsar som utnyttjade elektriska strömbrytare för att styra

[2]Bernouillitalen förekommer i många sammanhang och kan bl.a. definieras genom

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}.$$

samtalen rätt. Han kopplade ihop detta med Booles teorier, som hade fascinerat honom, och insåg att man skulle kunna realisera logiska operationer med hjälp av elektriska kretsar. Det var ett viktigt steg för utvecklingen av datorn.

9.7.3 Bearbetning och presentation av statistiskt material

Under 1700-talet blev statistik ett eget ämne och statistiska undersökningar kom att spela en allt större roll. Utvecklingen hindrades emellertid av att arbetet med de stora datamängder, som ofta krävdes för att dra någorlunda tillförlitliga slutsatser, tog alltför lång tid. Det tog t.ex. åtta år att upprätta tabellerna för den folkbokföring som gjordes i USA 1880. Detta irriterade **Herman Hollerith**, som var anställd vid amerikanska statistiska centralbyrån, och han beslöt att automatisera folkbokföringen för 1890. Han använde sig av hålkort av den typ som Jacquard använde i sina vävstolar och som Babbage inspirerats av. Han lyckades få ner bearbetningstiden till ett år istället för åtta.

Automatiseringen av bearbetningen av data är en förutsättning för att statistiken har blivit ett kraftfullt verktyg inom nästan alla områden i samhället. Men det är inte bara bearbetningshastigheten som är viktig. Det spelar också stor roll hur det statistiska materialet presenteras. Att läsa tabeller kan vara tidsödande för många beslutsfattare, och statistiska mått som medelvärden av olika slag kan ge en alltför enkel bild av verkligheten. Figurer och diagram kan vara till stor hjälp för att få en överskådlig bild av materialet. En föregångare när det gäller presentation av statistiskt material var **Florence Nightingale** som blev legendarisk genom sitt arbete att minska soldaternas lidande under Krimkriget (1853–6). Innan hon utbildade sig till sjuksköterska hade hon studerat matematik, som hon redan som liten var mycket intresserad av. Hon var en av algebraikern James Joseph Sylvesters mest framstående elever. Hon var också intresserad av hur man kunde använda statistiska metoder inom olika områden. Statistiken blev ett viktigt redskap i hennes arbete som föreståndare för sjuksköterskorna i det sjukhus i Krim hon arbetade på. Hon observerade att den vanligaste dödsorsaken bland soldaterna inte var de skador de fått i kriget utan sjukdomar. För att övertyga ledningen om detta förde hon statistik. Hon misstänkte emellertid att de som hon ville påverka inte skulle ägna hennes tabeller något större intresse och därför illustrerade hon resultaten med en typ av diagram, som har kommit att kallats coxcombdiagram (som kan översättas till tuppkamdiagram) och som på ett slående sätt visade resultaten av hennes undersökningar. Ett exempel på ett av hennes coxcombdiagram visas i figur 16.1 i kapitlet om utvecklingen av sannolikhetslära och statistik. Hon lyckades övertyga ledningen och fick möjligheter att förändra vården så att dödligheten minskade. Florence Nightingale förstod tidigt vikten av att illustrera statistiska data så att resultaten skulle framgå med önskad tydlighet.

Hänvisningar till del 2 I avsnitt 17.3.1 behandlas Booles *An investigation Into the Laws of Thought*. De Morgans lagar formuleras i avsnitt 17.3.3. Florence Nightingales insatser behandlas i avsnitt 16.2.5.

9.8 Svensk matematik under 1800-talet

Svensk vetenskap hade en storhetstid under 1700-talet. Carl von Linné och hans lärjungar, Anders Celsius, Carl Wilhelm Scheele m.fl. gjorde svensk forskning känd internationellt. Men inom matematik kunde knappast svensk forskning mäta sig med den i Europa. Samuel Klingenstierna, som var professor i matematik i Uppsala, bidrog med arbeten inom infinitesimalkalkylen men de var knappast banbrytande. En svensk professor i historia, Erland Samuel Bring, skrev en magisteruppsats i matematik som skulle uppmärksammas av James Sylvester mot slutet av 1800-talet men det var en enstaka händelse. Under 1800-talet stabiliserades ämnet med ordinarie professorer i Uppsala och Lund, matematikundervisningen på alla nivåer utvecklades och en tidskrift för matematik och fysik såg dagen ljus. Svenska matematiker publicerade artiklar och några av dem i internationella tidskrifter. Många av dessa var lärare vid landets gymnasier. Men även om matematikämnet stärktes så är intrycket att det präglas av provinsialism utan kontakt med internationella strömningar.

Under 1800-talets två sista decennier skedde en förändring. Den som framför allt stod för förändringen var **Gösta Mittag-Leffler**. Efter disputationen i Uppsala 1872 gjorde Mittag-Leffler resor i Europa och besökte bl.a. Paris och Berlin där han knöt kontakter med ledande matematiker som Hermite och Weierstrass. Det var framför allt Weierstrass syn på matematiken som gjorde intryck på Mittag-Leffler. Efter några år som professor i Helsingfors utnämndes Mittag-Leffler 1881 till professor vid den nybildade högskolan i Stockholm. Han var högskolans förste professor och fick som sådan ett stort inflytande och skapade viktiga kontakter på högsta internationella nivå. Mittag-Leffler utnyttjade sina nationella kontakter för att finansiera en ny vetenskaplig tidskrift som fick namnet *Acta Mathematica*. Genom sina internationella kontakter fick han några av de mest lovande matematikerna i Tyskland och Frankrike att bidra till tidskriften. *Acta Mathematica* blev från början respekterad och är än idag en tidskrift med högt anseende. Genom sina kontakter med Weierstrass och genom sitt inflytande inom den egna högskolan kunde Mittag-Leffler rekrytera den unga matematikern **Sonja Kovalevsky** som blev professor i matematik vid Högskolan i Stockholm 1889. *Acta Mathematica* och rekryteringen av Sonja Kovalevsky gav eko i Europa och gjorde svensk matematisk forskning känd internationellt.

Mittag-Lefflers forskningsinriktning låg i linje med den i Europa och han skapade en miljö där måttstocken var internationell. Han lade grunden för en framgångsrik utveckling av svensk matematisk forskning som skulle leda till att ett antal svenska matematiker under 1900-talet skulle tillhöra den yppersta eliten och många av dem fick motta de mest prestigefulla priserna.

För den som vill fördjupa sig matematisk forskning i Sverige rekommenderas **Lars Gårdings** bok *Matematik och matematiker – matematiken i Sverige före 1950*.

9.9 Några matematiker och deras verk

De kulturella stormakterna Tyskland och Frankrike kom under 1800-talet att dominera den matematiska forskningsverksamheten. Paris, Berlin och Göttingen blev centrum för utvecklingen av matematiken. Portalfiguren under första halvan av seklet var Gauss och han gav viktiga bidrag till de flesta områdena inom matematiken och dess tillämpningar. För banbrytande insatser stod bl.a. Cauchy, Dirichlet, Weierstrass och Riemann. Deras arbeten har i hög grad påverkat den utformning som analysen har idag. Två unga genier Abel och Galois, vars liv innehöll både dramatik och tragik, kom att göra banbrytande insatser inom algebran. Cantors arbeten om transfinit aritmetik öppnade dörren till en ny värld, samtidigt som de utsattes för hård kritik. Frågeställningar kring hans teorier skulle sysselsätta logiker och matematiker under det kommande seklet. Verksamheten i Storbritannien kom under 1800-talet mycket att handla om algebra och logik och en av dess främsta representanter är George Boole, vars levnadsöde i många delar skiljer sig från den genomsnittlige akademikerns. Vi presenterar också fyra kvinnor som har gjort viktiga insatser inom matematikinriktade verksamheter. Vi börjar emellertid vår kavalkad av matematiker med en fransman som utvecklade en teknik som skulle bli framgångsrik och som än idag är ett oumbärligt hjälpmedel inom matematiken och dess tillämpningar.

Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830) är som matematiker mest känd för arbetet *Théorie analytique de la chaleur* (”Den analytiska teorin för värme”) från 1822. Arbetet har haft stor betydelse inom både matematik och fysik.

Figur 9.8: Jean-Baptiste Joseph Fourier. (Bild: `3OSrqyM`)

Fourier föddes i Auxerre i de centrala delarna av Franrike. Han blev föräldralös vid 9 års ålder och han fick sin grundläggande utbildning i klostret Saint-Benoit-sur-Loire. Fourier visade tidigt både intresse och fallenhet för matematik. Han sökte sig till armén där han var lärare i matematik. Han sympatiserade med franska revolutionens idéer och var verksam inom den lokala revolutionskommittén. Under terrorn var han fängslad under en kortare period 1795 men frigavs och började studera vid École Normale där han som lärare hade bl.a. Lagrange, Laplace och Monge. Efter en tid efterträdde han Joseph-Louis Lagrange som lärare vid École Polytechnique.

Fourier deltog i Napoleons egyptiska expedition som vetenskaplig rådgivare och han utsågs till sekreterare för Institut d’Égypt. Han återvände till Frankrike 1801 och året därefter utnämnde Napoleon honom till prefekt för departementet Isère med säte i Grenoble. År 1815 efter Napoleons fall utnämndes han till prefekt för departementet Rhone. Fourier blev ständig sekreterare för franska vetenskapsakademin 1822 och 1830 blev han ledamot av Kungliga svenska vetenskapsakademin.

Under åren i Grenoble började Fourier arbeta med *Théorie analytique de la chaleur*. Han presenterade en artikel om värmeledning för franska vetenskapsakademin i fasta kroppar 1807 och 1822 kom det fullständiga arbetet ut. Fourier härledde den differentialekvation som beskriver värmeledningen och för att lösa den utvecklar han funktioner av en variabel i summor av trigonometriska funktioner. Han påstod att alla funktioner, både kontinuerliga och diskontinuerliga, kan utvecklas på detta sätt och han ger exempel på en diskontinuerlig funktion som är en oändlig summa av sinusfunktioner. Påståendet blev ifrågasatt och senare kunde man ange tillräckliga villkor för att en funktion kan utvecklas i vad som nu kallas en Fourierserie. Tekniken som Fourier introducerade visa de sig mycket effektiv. Den har utvecklats och är nu hjälpmedel i många olika grenar av matematiken.

Fourier var en av de första vetenskapsmännen som beskrev växthuseffekten. Han var en av de 72 som fick sina namn ingraverade på Eiffeltornet. Han är begravd på Père Lachaise-kyrkogården i Paris.

Carl Friedrich Gauss (1777–1855) räknas som en av de främsta matematikerna genom tiderna. Han har påverkat nästan varje gren av matematiken och han lämnade viktiga bidrag till fysiken. Han var en föregångare i utvecklingen mot att ge analysen en fastare grund.

Figur 9.9: Carl-Friedrich Gauss. (Bild: 2CiSZav)

Gauss föddes i Brunnswick i Tyskland. Han kom från mycket enkla förhållanden. Fadern försörjde sig som trädgårdsmästare, kanalskötare och murare. Sonen visade vid mycket unga år stor mognad både när det gällde språk och räkning. Han var något av ett underbarn och kan kanske jämföras med Mozart. Carl-Friedrich började skolan när han var sju år. Klasserna var stora och hans lärare, som hette **Büttner**, var fullt sysselsatt med att hålla ordning på de många pojkarna. Büttner upptäckte Gauss stora begåvning när han gav eleverna i uppgift att summera en aritmetisk serie med 100 termer. Gauss skrev upp den korrekta summan bara efter några sekunder. Büttner blev förvånad och imponerad. För egna pengar köpte han till Gauss den bästa tillgängliga läroboken i aritmetik.

Büttner hade också en medhjälpare, **Johan Martin Bartels**. Den sjuttonårige assistenten och Gauss blev goda vänner och tillsammans studerade de läroböcker i algebra och elementär analys. Bartels var bekant med inflytelserika personer och han fick dem intresserade av den unge begåvade pojken. Gauss fick audiens hos ärkehertig **Carl Wilhelm Ferdinand av Braunschweig** som lovade hjälpa Gauss så att han kunde fortsätta sin utbildning. Som fjortonåring skrevs Gauss in vid Collegium Carolinum där han studerade i tre år. Hans stora intressen var klassiska språk och matematik.

Efter studierna vid Collegium Carolinum fortsatte Gauss studera vid universitetet i Göttingen. Han var länge osäker på om han skulle studera språk eller matematik. År 1796 bestämde han sig för att ägna sig helt åt matematiken även om han skulle bedriva språkstudier som en hobby. Han lämnade Göttingen utan examen 1798 och återvände till Brunnswick där han han avlade doktorsexamen 1799. Ärkehertigen betalade tryckningen av avhandlingen och gav honom en pension så att han kunde fortsätta sin forskning utan bekymmer för ekonomin.

Under åren i Göttingen och i Brunnswick var Gauss mycket produktiv. Det var då han skrev ett av sina mästerverk *Disquisitiones Arithmeticae* som kom ut 1801 och som tack dedicerade Gauss boken till ärkehertigen Carl Wilhelm Friedrich. Hans avhandling, där han bevisade algebrans fundamentalsats, var epokgörande och hans konstruktion av en regelbunden sjuttonhörning blev uppmärksammad. Gauss började få ett internationellt rykte och det som definitivt placerade honom som en av de ledande matematikerna i Europa var hans undersökning av planetens Ceres bana. Den italienske astronomen **Giuseppi Piazzi** upptäckte på 1800-talets första dag en liten planet som senare fick namnet Ceres. De data som han observerade innan planeten försvann var mycket få och det krävdes ett enormt räknearbete för att bestämma dess bana. Det gjordes flera försök och Gauss presenterade resultat som avvek från de övrigas. När planeten återkom visade sig att Gauss beräkningar stämde exakt. Efter beräkningen av Ceres bana blev Gauss erkänd som den tidens främste matematiker.

År 1805 gifte sig Gauss med **Johanna Osthoff** från Brunnswick. Hans välgörare ärkehertigen hade ökat sitt ekonomiska stöd för att göra detta möjligt. Två år senare omkom ärkehertigen i Preussens krig mot Napoleon och Gauss stod utan sin mecenat. Han flyttade till Göttingen för att tillträda en tjänst som föreståndare för universitetets observatorium. Han skulle vara kvar där under resten av sitt yrkesliv trots att han fick förmånliga erbjudanden om tjänster bl.a. i Berlin. Gauss far dog 1808 och året därefter dog hans maka efter ha fött hans andra son. Gauss gifte om sig året därefter med Johannas vän **Minna** och med henne fick han tre barn. År 1817 flyttade Gauss mor som var sjuk in i Minnas och hans hem. Minna dog 1831 och modern 1839.

Gauss insatser inom matematiken är så stora och omfattar så många områden att vi här endast kan ta upp en bråkdel. Han har förnyat talteorin i *Disquisitiones Arithmeticae*, han har löst klassiska konstruktionsproblem inom geometrin, han har bevisat algebrans fundamentalsats, han har gjort banbrytande insatser inom differentialgeometrin genom studier av kurvors och ytors krökning, han har infört minsta kvadratmetoden för att anpassa kurvor till punktmängder och han var pionjär när det gällde att ge en stringent framställning av teorin för oändliga serier. Listan kan göras lång. Han var också verksam inom tillämpad matematik och bidrog med epokgörande insatser inom astronomi, lantmäteri, ellära och magnetism.

Upptäckten av den icke-euklidiska geometrin tillskrivs i de flesta framställningar Nikolai Lobatjevski och János Bolyai men även Gauss trots att han inte publicerat något i ämnet. Genom brev och dagboksanteckningar kan man dra slutsatsen att Gauss hade varit lösningen till problemet med parallellaxiomet på spåren. Gauss var god vän med Bolyais far Farkas som skickade honom János arbete om den icke-euklidiska geometrin. Gauss svarade att han fann arbetet intressant och viktigt och att han själv hade kommit fram till samma slutsats. Detta bekräftas av ett brev från 1824 från Gauss till en kollega.

När Gauss bestämde sig för att ägna sig åt matematik började han också föra en vetenskaplig dagbok, hans s.k. *Notizenjournal*. Det var först 1898 som den började cirkulera i matematiska kretsar. Anteckningarna fördes mellan 1796 och 1814. Vissa av resultaten publicerades aldrig. Dagboken innehåller tankar och fragment till teorier som utvecklade sig till betydelsefulla områden under 1800-talet. Många av idéerna var enligt många femtio år före sin tid. Varför publicerade inte Gauss dessa resultat? Förmodligen för att han var mycket noggrann när det gäller både innehåll och form. Han ville ge sammanhängande strikt logiska framställningar av sina resultat.

År 1831 tillträdde **Wilhelm Weber** en tjänst som professor vid universitetet i Göttingen. Gauss och Weber utvecklade ett samarbete och det innebar att Gauss intresse kom alltmer att inriktas på fysik. Tillsammans konstruerade de en primitiv telegraf. De intresserade sig för magnetism speciellt jordmagnetism och startade en tidskrift inriktad mot just magnetism. Weber lämnade emellertid Göttingen 1837 på grund av en politisk dispyt. Efter det avtog Gauss vetenskapliga aktivitet och han ägnade sig alltmer åt praktiska frågor.

Även om Gauss i första hand var forskare och inte lärare så blev flera av hans studenter ledande matematiker som **Friedrich Bessel** (1784–1846), **August Möbius** (1790–1868), Peter Gustav Lejeune Dirichlet, **Gottfried Eisenstein** (1823–52) och Richard Dedekind. Han inspirerade och stöttade en av den tidens kvinnliga matematiker **Sophie Germain**. Dedekind gav följande beskrivning av sin lärare:

> ”... vanligen satt han i en bekväm ställning, något framåtlutad med händerna på sina knän. Han talade ganska fritt, mycket klart, enkelt och tydligt; men när han vill betona en ny synpunkt ... så lyfte han huvudet och vände sig till den som satt närmast honom och tittade på honom med sina vackra blå skarpa ögon under det att han talade på sitt uttrycksfulla sätt. ... Om han fortsatte från att förklara principer till att utveckla matematiska formler så steg han upp och med en ståtlig upprätt hållning skrev han på en svart tavla som fanns bredvid honom med sin besynnerligt vackra handstil: han lyckades alltid ekonomisera utrymmet och arrangera formlerna på ett mycket begränsat område.”

Under sina sista år avtog hans hälsa kontinuerligt och han dog i sömnen på morgonen den 23 februari 1855.

Augustin Louis Cauchy (1789–1857) var född i Paris. Han undervisades av sin far. Stora matematiker som Laplace och Lagrange var ofta gäster i hemmet. Speciellt Lagrange engagerade sig i Cauchys matematiska utbildning. När Cauchy var tretton år började han studera klassiska språk vid École Centrale du Panthéon. Han avslutade studierna där med en kurs i matematik och år 1805 sökte han in till École Polytechnique. Han klarade inträdesproven och efter två år tog han examen och började på ingenjörsutbildning vid École des Ponts et Chaussées. Han var en briljant student och blev, inte minst för sina praktiska arbeten, anställd vid projektet att kanalisera floden Ourcq – ett projekt som skulle förse parisborna med vatten.

Figur 9.10: Augustin Louis Cauchy. (Bild: `2AKEVWO`)

År 1810 började Cauchy arbeta som ingenjör i Cherbourg. Han studerade samtidigt Laplaces *Traité de mécanique céleste* och Lagranges *Théorie des fonctions* och han skrev sina första matematiska artiklar som handlade om geometri. Han sökte sig 1812 tillbaka till Paris för att göra en akademisk karriär och fick en del artiklar publicerade. Han blev år 1815 biträdande professor i matematik vid École Polytechnique och medlem av franska vetenskapsakademin.

Efter revolutionen 1830 krävde den nya regimen en trohetsed av sina professorer. Cauchy vägrade och fråntogs sina tjänster i Paris. Han hade tidigare anat oråd och sökt sig utomlands. Han var under ett antal år bosatt i Fribourg i Schweiz, i Turin och i Prag. År 1838 återvände han till Paris och till sin tjänst vid vetenskapsakademin. Han var fortfarande förbjuden att undervisa. Efter februarirevolutionen 1848 togs trohetseden bort. Cauchy kunde återuppta sin undervisning och var professor vid École Polytechnique till sin död 1857.

Cauchy hade under sin karriär samarbetsvårigheter med sina kollegor och det kan till en del förklara varför han så ofta blev förbigången vid tjänstetillsättningar. Poncelets arbete om projektiv geometri från 1820 hade kritiserats av Cauchy och Poncelet beskriver ett möte med Cauchy på följande sätt:

> ”... Jag lyckades närma mig min alltför rigide bedömare strax utanför hans hem ... just när han lämnade det. Under den korta och mycket snabba promenad som följde förstod jag snabbt att jag inte förtjänade varken hans uppmärksamhet eller respekt som vetenskapsman.”

Den unge norske matematikern Niels Henrik Abel hade kommit i kontakt med Cauchy i Paris och skrev:

> ”Cauchy är galen och det kan man inte göra något åt, men han är just nu den ende som förstår hur matematik skall framställas.”

Cauchy är en av de mest produktiva matematikerna någonsin. Hans samlade arbeten som publicerades mellan 1882 och 1979 består av 27 volymer och han publicerade 739 artiklar. Han bidrog till nästan alla då aktuella områden av matematiken. Han arbetade för att ge en mer stringent framställning av analysen och gav 1821 ut *Cours d'analyse* som var avsedd för studenterna i École Polytechnique. I sina försök att skapa en starkare bas för analysen gjorde han försök att definiera begrepp som gränsvärde och kontinuitet. Han använde gränsvärdesbegreppet för att definiera derivata. I de båda verken *Sur un nouveau genre de calcul analogue au calcul infinitésimal* (”Om en ny typ av kalkyl analog med infintesimalkalkylen”) och *Leçons sur le calcul différentiel* (”Föreläsningar om differentialkalkyl”) från 1826 respektive 1829 studerar han komplexvärda funktioner av en komplex variabel med bl.a. residuekalkyl.

Cauchys namn är oupplösligt förenat med analys av funktioner av reella och komplexa variabler men han har också bidragit med viktiga arbeten inom fysiken t.ex. *Exercices d'analyse et de physique mathématique* ("Övningar i analys och matematisk fysik") som består av fyra band och som publicerades mellan 1840 och 1847.

Cauchy är en av de 72 vetenskapsmän som har fått sina namn ingraverade på Eiffeltornet.

Niels Henrik Abel (1802–29) föddes i Frindöe nära Stavanger i Norge. Hans far **Sören Abel** hade studerat teologi och filologi. Han efterträdde sin far, Niels Henriks farfar, som präst i Gjerstad nära Risör i södra Norge och det var där Niels Henrik växte upp. Sören Abel var en betydelsefull man inom politiken. Han var norsk nationalist och ledamot av Stortinget.

Figur 9.11: Niels Henrik Abel. (Bild: 3ØRONJ2)

Vid 13 års ålder började Niels Henrik studierna vid Katedralskolan i Kristiania (nuvarande Oslo) som tidigare haft ett mycket gott rykte. Det nystartade universitetet hade emellertid anställt de mest meriterade lärarna vid Katedralskolan och det innebar att kvaliteten på undervisningen försämrats. Studierna engagerade inte Abel och han var en tämligen medelmåttig elev med viss fallenhet för matematik och fysik. Situationen förändrades när skolan 1817 fick en ny matematiklärare **Bernt Holmboe**. Ett år senare hade Abel läst verk av Newton, Euler och d'Alembert. Holmboe som såg att Abel var en stor talang uppmuntrade honom att fortsätta läsa arbeten av Laplace och Lagrange. Förutsättningarna förändrades radikalt 1820 då Abels far dog och Abel kom att sakna medel för fortsatta studier. Holmboe kom till undsättning och hjälpte Abel till ett stipendium så att han kunds avsluta sina studier vid Katedralskolen och börja på universitetet i Kristiania där han avlade examen 1822.

Under tiden i Kristiania hade Abel arbetat med att lösa den allmänna femtegradsekvationen med hjälp av rotutdragningar. Han trodde att han hade en lösning 1821 och han skickade en artikel till den danske matematikern **Ferdinand Degen** med förhoppningen att den skulle publiceras av den danska vetenskapsakademin. Degen ville ha förtydligande och bad Abel konkretisera sin metod med ett numeriskt exempel. I arbetet med exemplet upptäckte Abel ett fel i sin artikel och under det fortsatta arbetet med problemet kom han till slutsatsen att den allmänna femtegradsekvationen inte kan lösas genom rotudragningar. Han skrev ner sitt bevis i form av en artikel. Abel hade då fått ett stipendium så han kunde åka till kontinenten och besöka bl.a. Berlin och Paris. Artikeln hade han med sig som introduktionsbrev. Han skickade också artikeln till Gauss. Brevet med artikeln återfanns oöppnat efter Gauss död.

Vid besöket i Berlin lärde Abel känna **August Crelle**, som var en ingenjör med stort intresse för matematik. De blev goda vänner och Crelle insåg Abels stora begåvning och att hans resultat var betydelsefulla. Crelle tog initiativet till en ny matematisk tidskrift *Journal für die reine und angewandte Mathematik* som numera kallas *Crelles journal*. Det första numret, som kom ut 1827, inleddes med Abels artikel om femtegradsekvationen. Artikeln har titeln *Recherches sur les fonctions elliptiques* ("Undersökningar om elliptiska funktioner") vilket antyder att perspektivet är vidare än enbart femtegradsekvationens olösbarhet med radikaler. Abel hade tidigare börjat studera elliptiska funktioner på inrådan av professor Degen. Området, till vilket Abel gav viktiga bidrag, har sitt ursprung i studier av de integraler som uppstår vid beräkning av båglängder hos en ellips. Abel var också den förste som löste integralekvationer. Han kom att publicera många artiklar i *Crelles journal* och några ägnades åt att ge analysen en fastare grund. I ett brev till Holmboe skrev han:

> ”Mina ögon har öppnats på det mest förvånande sätt. Om du bortser från de allra enklaste fallen, så finns det i matematiken inte en enda oändlig serie vars summa har bestämts på ett rigoröst sätt. De viktigaste områdena av matematiken står med andra ord utan grund. Det är sant att de flesta resultaten gäller men det är verkligen förvånande. Jag arbetar för att finna skälen för det, ett ytterst intressant problem.”

Abel har i första hand förknippats med studierna av femtegradsekvationen men han har alltså bidragit med viktiga arbeten inom andra områden av matematiken.

Crelle ville att Abel skulle stanna i Berlin till dess han kunde erbjudas en tjänst men Abel ville hem till Norge. Han anlände till Kristiania 1827 och var då svårt skuldsatt. Han fick ett litet arvode av universitetet i Kristiania och drygade ut ekonomin med skolundervisning. Hans fästmö **Christine Kemp**, som han träffat vid ett besök i Köpenhamn 1823, var anställd som guvernant hos vänner till Abels familj i Froland. Sommaren 1828 tillbringade han hos sin fästmö. Trots att hans hälsa försämrades fortsatte han att producera viktiga resultat om elliptiska funktioner. Julen ville han fira hos Christine i Froland men under slädfärden dit blev han allvarligt sjuk. Han blev emellertid bättre under julen och de kunde fira den tillsammans. Efter jul blev han sämre igen och han dog den 6 april 1829. Den 8 april skrev Crelle ett brev till Abel där han meddelade att han blivit utnämnd till professor vid universitet i Berlin. Men det var för sent. Den norske matematikern **Øystein Ore** har i sin bok *Niel Henrik Abel, et geni og hans samtid* (1954) beskrivit Abels sista tid.

> ”. . . han blev allt svagare och hostan ökade och han kunde vara uppe endast några minuter i taget. Ibland försökte han arbeta med sin matematik men han kunde inte skriva. Ibland levde han i det förflutna och talade om sin fattigdom och fru Hansteens godhet. Han var alltid vänlig och tålmodig.
>
> Han utkämpade sin svåraste dödskamp under natten den 5 april. Fram mot morgonen blev han tystare och på förmiddagen klockan 11 utandades han sin sista suck.”

Några av Abels arbeten upptäcktes efter hans död. En artikel om elliptiska funktioner som han skickat till Paris fann Cauchy 1830 efter mycket letande. Det försvann igen och återfanns först 1952 i Florens. Man har också funnit ett arbete om algebraiska ekvationer och i ett brev till Crelle från den 18 oktober 1828 formulerade han en sats som väsentligen är ett av resultaten i Galois berömda arbete från 1830.

Abel har efter sin död hedrats på många sätt. År 2001 beslöt den norska regeringen att ett pris, som fick namnet Abelpriset, på 6 miljoner norska kronor skall tilldelas en matematiker som ”åstadkommit något extraordinärt inom matematiken”. Priset delades ut första gången 2003 på 200-årsjubileet av Abels födelse.

Evariste Galois (1811–32) föddes i Bourge-la-Reine strax söder om Paris. Båda föräldrarna var välutbildade inom humaniora. Hans far var borgmästare i Bourge-la-Reine. Évariste undervisades av sin mor till dess han var 12 år. Han antogs 1823 som elev vid Collège de Louis-le-Grand och var till en början en duktig elev, som fick flera priser. År 1827 började han en klass med inriktning mot matematik. Han blev snabbt absorberad av ämnet, men samtidigt blev han trotsig och uppstudsig. Hans lärare skrev att det vore bäst om hans föräldrar lät honom studera bara matematik och att ”han kastar bort sin tid här och gör inget annat än plågar sina lärare och drar på sig en massa bestraffningar.”.

År 1828 sökte Galois inträde till École Polytechnique men misslyckades i intagningsproven. Han fortsatte på Louis-le-Grand och studerade matematik för **Louis Richard**, som var professor i matematik vid Collège de Pontivy. Han läste arbeten av Legendre och Lagrange.

I april 1829 publicerade han sin första artikel, som handlade om kedjebråk, i *Annales de mathématiques*.

Figur 9.12: Evariste Galois. (Bild: 2ADFLVo)

I juli 1829 begick Galois far självmord efter en förtalskampanj. Detta kom att beröra Galois djupt och kom att prägla hans återstående liv. En kort tid efter faderns död sökte Galois på nytt till École Polytechnigue men inte heller denna gång klarade han inträdesproven. En anledning till hans misslyckande måste vara faderns dödsfall men han hade också svårt att formulera sina idéer. Galois sökte nu till École Normale och blev antagen. Han avlade kandidatexamen 29 december 1829.

Under 1829 skrev Galois ett antal artiklar om teorin för ekvationer och skickade dem till Cauchy. Han fick emellertid veta att hans artiklar överlappades av ett postumt arbete av Abel. På Cauchys inrådan skrev han en ny artikel ”Om villkor för att en ekvation skall vara lösbar med hjälp av rotutdragning” och i februari 1830 överlämnade han den till Fourier, som då var sekreterare i Parisakademin. Meningen var att artikeln skulle tävla om akademin stora pris i matematik. Fourier dog i april 1830 och artikeln har aldrig återfunnits.

Vid oroligheter i Paris 1830 störtades huset Bourbon och en ny monarki, den s.k. *borgardemokratin*, kom till makten. Eleverna vid École Normale låstes in så att de inte skulle kunna delta i upploppen. Galois försökte ta sig över muren men misslyckades. Han kom i konflikt med skolans rektor och relegerades. Han anslöt sig till Nationalgardet – en republikansk gren av milisen som kungen i ett dekret på nyårsafton 1830 förbjudit. Tidigare hade ett antal officerare i gardet arresterats för att vilja störta kungen. De frigavs och under firandet av den händelsen uttryckte sig Galois hotfullt mot kungen och arresterades. Till sin förvåning frigavs han vid rättegången den 15 juni. Han fängslades på nytt den 14 juli 1831 vid firandet av stormningen av Bastiljen då han bar nationalgardets förbjudna uniform och dessutom var försedd med vapen. Han försökte begå självmord i fängelset med hindrades av sina medfångar. Under en koleraepidemi 1832 träffade han fängelseläkarens dotter Stephanie som han blev förälskad i. Han frigavs 29 april och brevväxlade med henne. Av breven framgår att hon försökte ta avstånd från honom.

Motgångarna hade varit många; Faderns död, Fouriers död, relegeringen från École Normal och arresteringarna. En del var självförvållade, andra inte. Galois var under långa stunder desperat. Den franska matematikern Sophie Germaine skrev 1830 i ett brev:

> ”. . . M. Fouriers död har blivit för mycket för eleven Galois, som trots sin oförskämdhet, visar tecken på begåvning. Allt detta har orsakat att han relegerats från École Normale. Han är utan pengar. De säger att han håller på att bli fullständigt galen. Jag fruktar att det är sant.”

Galois häftiga temperament ledde till att han utmanades på duell och den gick av stapeln den 30 maj 1832. Galois blev sårad och övergavs av både sin motståndare och sina sekundanter. En bonde fann honom och såg till att han kom till sjukhuset i Cochin. Han avled där 31 maj.

Natten innan duellen arbetade Galois med ett manuskript om ekvationer och han noterade i marginalen att ”det är något som måste kompletteras här. Jag har inte tid.”. Galois bror och en av hans vänner samlade ihop hans arbeten och skickade dem bl.a. till Gauss och **Carl Jacobi**, som Galois hade hoppats skulle ge kommentarer till resultaten. Det finns inga tecken på att att dessa båda matematiker tagit del av manuskripten. Liouville fann dem 1843 och de publicerades som en artikel med titeln *Mémoire sur les conditions de resolubilité des* *equations par radicaux* ("Avhandling om villkoren för ekvationers lösbarhet med radikaler") i *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*.

Galois blev bara 21 år gammal men han har gjort outplånliga avtryck i matematiken. Han fick inte uppleva att hans resultat fick den uppskattning de förtjänade och hans viktigaste arbeten publicerades långt efter hans död. Han var intelligent men hade svårt att kommunicera sina tankar. Han var kreativ i ordets egentliga betydelse men samtidigt sårbar och rebellisk. Hans teorier är fortfarande aktuella och ingår i allmänbildningen för den som studerar matematik på högre nivå.

Peter Lejeune Dirichet (1805–59) föddes i Düren i nuvarande Tyskland på gränsen mot Belgien. Redan innan han som 12-åring började på gymnasiet i Bonn var han lidelsefullt intresserad av matematik och använde alla sina fickpengar till matematisk litteratur. På gymnasiet var han en mönsterelev och efter två år började han på Jesuit College i Köln och där hade han turen att får Ohm som lärare.

Figur 9.13: Lejeune Dirichlet. (Bild: 3fDuBOX)

Efter ytterligare två år på college var Dirichlet mogen för universitetsstudier. Han ansåg att universiteten i Tyskland inte hade tillräckligt bra kvalitet och beslöt sig för att studera i Paris. Med sig hade han Gauss *Disquisitiones Arithmeticae* och det verket skulle han ha med sig på alla sina resor. Han studerade i Paris för några av de främsta matematikerna som Fourier, Laplace och Poisson.

Maximilian Sébastian Foy, en pensionerad general och ledamot av deputeradekammaren, anställde år 1823 Dirichlet som privatlärare åt sin son. Dirichlet togs emot som en medlem av familjen och fick goda ekonomiska villkor. Han fick möjligheter att ägna sig åt matematiken och han presenterade sin första artikel i juli 1825. I den behandlade han Fermats förmodan för $n = 5$ som säger att ekvationen

$$x^5 + y^5 = z^5$$

saknar positiva heltalslösningar. Han visade att om det fanns lösning så måste ett av talen x, y och z vara delbart med 5 och lyckades också visa att om detta tal dessutom är delbart med 2 så saknas lösningar till ekvationen. Legendre, som granskade artikeln, kunde göra de kompletteringar som krävdes och det fullständiga beviset publicerades 1825. Dirichlet lyckades också visa att Fermats förmodan är sann för $n = 14$. Resultaten gjorde Dirichlet känd och respekterad i matematiska kretsar. I slutet av 1825 dog general Foy och Dirichlet stod utan ekonomiskt stöd. Den inflytelserike vetenskapsmannen **Alexander von Humboldt** uppmuntrade honom att söka sig till Tyskland och han fick först en tjänst vid universitetet i Breslau och sedan vid universitetet i Berlin. I den senare tjänsten ingick undervisning vid militärhögskolan. Han uppehöll professuren vid universitetet i Berlin från 1828 till 1855. År 1831 blev han utsedd till ledamot av Berlinakademin. Det innebar att hans ekonomi förbättrades och det gjorde det möjligt för honom att gifta sig med **Rebecca Mendelsohn**, tonsättaren **Felix Mendelsohns** yngsta syster.

När Gauss dog 1855 erbjöds Dirichlet att efterträda honom som professor i Göttingen. Dirichlet var egentligen obenägen att flytta men hans undervisning och administrativa uppdrag i Berlin var mycket betungande så han accepterade erbjudandet. Det lugnare livet i Göttingen verkade passa Dirichlet utmärkt. Han fick mer tid för forskning och han hade några begåvade doktorander. Tyvärr blev tiden i Göttingen inte lång. Han fick en hjärtattack under en konferens i Montreux sommaren 1858 och lyckades ta sig hem med stort besvär. Medan han fortfarande var sjuk dog hans fru i ett slaganfall. Dirichlet dog några månaders senare 1859.

Vi har i de inledande avsnitten tagit upp Dirichlets betydelse för utvecklingen av talteorin. Han var den som först studerade analytisk talteori och han införde begreppet ideal, som spelar en central roll inte bara i talteori utan i många andra algebrariska sammanhang. Dirichlet bidrog också med viktiga arbeten inom analys och matematisk fysik. Han formulerade och bevisade satser där han gav villkor för att en funktions fourierserie konvergerar mot funktionen. I det sammanhanget gav han den definition av funktion som vi använder idag. Han skriver: ”Om en variabel y beror på en variabel x så att det varje gång x tilldelas ett värde det finns en regel som bestämmer värdet på y entydigt, så säges y vara en funktion av den oberoende variabeln x.”.

En av Dirichlets bästa vänner var Carl Jacobi. De hade samma intresseområden och förde tillsammans djupgående samtal om matematik. Jacobi säger om Dirichlet:

> ”Endast Dirichlet, varken jag eller Cauchy eller Gauss, vet vad ett fullständigt rigoröst bevis är. Vi kan lika gärna lära det direkt av honom. När Gauss säger att han bevisat något är det mycket klart; när Cauchy säger det kan man sätta lika mycket för som emot; när Dirichlet säger det är det säkert. . .”

Karl Weierstrass (1815–97) föddes i Ostenfeldt i Westfalen i nuvarande Tyskland. Hans far hade olika anställningar inom skattemyndigheten som innebar att han inte kunde stanna länge på ett ställe eftersom familjen fick flytta ofta. Weierstrass mor dog när han var 12 år och året efter gifte fadern om sig. När Weierstrass skulle börja gymnasiet tjänstgjorde hans far vid skattekontoret i Padderborn och Weierstrass började studera vid det katolska gymnasiet där. Han klarade studierna utmärkt trots att han arbetade deltid som bokhållare för att bidra till familjens ekonomi.

Figur 9.14: Karl Weierstrass. (Bild: `3hBof4H`)

Weierstrass visade under gymnasietiden både fallenhet och intresse för matematik. Han läste artiklar i Crelles Journal vilket naturligtvis låg långt utanför de ordinarie kurserna i matematik. Efter gymnasiet ville Weierstrass studera matematik men hans far hade andra planer. Den unge Weierstrass skulle studera ekonomi för att sedan bli tjänsteman inom förvaltningen. Weierstrass böjde sig för faderns vilja och skrev in sig på en ekonomiutbildning vid universitetet i Bonn.

Sliten mellan faderns krav och sina egna intressen flydde Weierstrass till studentlivet med fester och fäktning. Efter några år utan resultat fick fadern nog och såg till att han 1839 började studera vid Teologiska och filosofiska akademin i Münster för att så småningom bli gymnasielärare. År 1841 hade Weierstrass klarat de prov som krävdes och gjorde provår som lärare vid gymnasiet i Münster. Han blev anställd som lärare i matematik först vid gymnasiet i Deutsch Krone, nu Walcs, i Polen och sedan vid Collegium Hoseanum i Braunsberg. Som lärare i matematik fick Weierstrass undervisa i många andra ämnen som fysik, botanik, geografi, historia, tyska, kalligrafi, ja till och med i gymnastik. Senare skulle han beskriva åren som lärare som ”ändlöst tröttsamma och tråkiga”.

Under universitetsstudierna och under sin tid som lärare ägnade Weierstrass stora delar av sin fritid till att studera matematik. Han läste bl.a. Laplaces *Traité de mécanique céleste* och studerade artiklar i *Crelles Journal*. Han utvecklade egna idéer och 1854 kunde han publicera en artikel *Zur Theorie der Abelschen Functionen* i *Crelles journal*. Med den artikeln blev Weierstrass ett namn i matematiska kretsar. Han blev utnämnd till doktor vid universitetet i Königsberg. Han sökte och blev erbjuden professurer vid universitet i Tyskland och Österrike men blev till slut 1856 professor vid universitetet i Berlin. Han blev kvar vid universitetet i Berlin under hela sin aktiva karriär. Tillsammans med **Eduard Kummer** och Leopold Kronecker gjorde han universitetet i Berlin till ett centrum för matematisk forskning under delar av andra halvan av 1800-talet.

Weierstrass insatser som professor består till stor del av hans föreläsningsserie där han systematiskt försöker bygga upp analysen från grunden. Läsåret 1859/60 hade serien rubriken *Introduktion till analysen* och han gav under den ett berömt exempel på en funktion som är kontinuerlig överallt men som inte har derivata i någon punkt. Läsåret 1860/61 fortsatte han med *Integralkalkyl*. En kollaps i december 1861 hindrade honom från undervisning under en längre tid. Han tog upp verksamheten igen 1863/64 och föreläste över *Den allmänna teorin för analytiska funktioner*. De följande åren handlade föreläsningarna om analytiska funktioner, elliptiska funktioner, abelska funktioner och variationskalkyl. Hans samlade arbeten upptar sju volymer och de två första publicerades under hans livstid. Den sista gavs ut 1927 och en nytryckning av samtliga volymer gjordes 1967. De kompletteras kontinuerligt när man hittar nya anteckningar från studenter som följt hans föreläsningar.

Weierstrass kallas ibland fadern till modern analys och han satte en standard när det gällde stringens, som har format stora delar av dagens framställning av analys. Många av de studenter som följde hans föreläsningar blev själva betydelsefulla matematiker som förde vidare och utvecklade hans synsätt. En av dem var Georg Cantor som med sin mängdlära och transfinita aritmetik skulle förnya matematiken. Cantors största kritiker var som vi tidigare nämnt Kronecker och den infekterade diskussionen mellan Kronecker och Cantor medförde att Weierstrass bröt vänskapen med Kronecker. Ur svensk synpunkt är det av intresse att nämna att den svenska matematikens fader Gösta Mittag-Leffler i hög grad inspirerats av Weierstrass under sitt besök i Berlin på 1880-talet. Det var också Weierstrass som hjälpte Sonja Kovalevsky då hon som kvinna hindrades att följa undervisningen vid universitetet i Berlin. Weierstrass gav henne privatlektioner och utnyttjade sina kontakter med universitetet i Königsberg så att hon kunde doktorera. Kovalevsky blev sedan, tack var Mittag-Leffler och Weierstrass, professor i matematik vid Stockholms universitet. Brevväxlingen mellan Weierstrass och Sonja Kovalevsky varade i tjugo år från 1871 till Kovalevskys död 1891. Weierstrass brände då alla de brev han fått från henne.

Weierstrass sista år var plågsamma. Han var rullstolsbunden och helt beroende av andras hjälp. Han dog 1897 i lunginflammation.

Georg Cantor (1845–1918) föddes i S:t Petersburg i Ryssland där hans far var en framgångsrik affärsman. Cantor började sin skolgång i S:t Petersburg men när han var elva år flyttade familjen till Tyskland, först till Wiesbaden, där han studerade vid läroverket, och därefter till Frankfurt. Cantor fortsatte sina studier i Darmstadt där han var inackorderad. Han tog examen 1860 med goda vitsord och speciellt nämndes hans stora skicklighet i matematik och då särskilt i trigonometri.

Efter examen studerade Cantor vid en yrkeshögskola i Darmstadt innan han 1862 började på Polytekniska högskolan i Zürich. Meningen var att han skulle bli ingenjör men hans håg stod till matematiken och till slut gick fadern med på att han bytte inriktning. Efter faderns död 1863 avbröt Cantor sina studier i Zürich och flyttade till Berlin där han började studera matematik vid universitetet. Han följde Weierstrass, Kummers och Kroneckers föreläsningar.

Han disputerade på en avhandling om talteori och blev anställd vid universitetet i Halle där han publicerade ytterligare ett arbete inom samma område. I Halle tog Cantors forskning en ny inriktning. Han blev uppmanad av en av sina kollegor **Eduard Heine** att försöka bevisa att en funktion kunde utvecklas i en trigonometrisk serie på bara ett sätt. Många ledande matematiker hade försökt men misslyckats. Cantor lyckades lösa problemet 1870 och publicerade sedan ytterligare artiklar om trigonometriska serier. Arbetena visar att Cantor påverkats av Weierstrass undervisning.

Figur 9.15: Georg Cantor. (Bild: 3hEW04T)

I samband med arbetet med trigonometriska serier kom Cantor att studera egenskaper hos de reella talen. Han definierar de irrationella talen som oändliga summor av rationella tal. Cantor var god vän med Richard Dedekind, som också följt Weierstrass föreläsningar vid universitetet i Berlin och som nu var professor i Zürich. Dedekind försökte också förstå de reella talens struktur och han definierade ett irrationellt tal som ett snitt i de rationella talen.

Cantors undersökningar av de reella talen ledde till två artiklar, som publicerades 1870 och 1872, och som skulle bli revolutionerande och kontroversiella. I den första artikeln visade han att de rationella talen var uppräkneliga och det innebär att de rationella talen kan paras ihop med de naturliga så att till varje naturligt tal hör precis ett rationellt och omvänt. Vi säger att vi har en 1:1-avbildning av de rationella talen på de naturliga. Detsamma gällde de algebraiska talen d.v.s. de tal som är lösningar till ekvationer av ändlig grad med rationella koefficienter. År 1874 visade Cantor att de reella talen inte är uppräkneliga och det innebär att de i någon mening är fler än de algebraiska. Bevisen skisseras i figur 9.6. Nästa fråga han ställde sig var: Finns det en 1:1-avbildning mellan ett intervall och punkterna i en kvadrat? Han brevväxlade hela tiden med Dedekind och i ett brev från den 4 januari 1874 visade han att det fanns en 1:1-avbildning mellan ett intervall och punkterna i ett p-dimensionellt rum. Han skrev: ”Jag ser det men kan inte tro det.”.

Mellan 1879 och 1884 publicerade Cantor sex viktiga artiklar i *Mathematische Annalen* och de behandlar vad han kallade transfinit matematik. Cantor inför en teori för räkning med oändliga tal. Han inför begreppet mängd och säger att två mängder är lika mäktiga om det finns en 1:1-avbildning mellan dem. Alla mängder med samma mäktighet har lika många element och ordnar till dem ett transfinit tal. Till de naturliga talen ordnar han det transfinitia talet $\aleph_0$ och till de reella talen $\aleph_1$. Det transfinita talet till rationella talen är också $\aleph_0$ och detsamma gäller de algebraiska. Han visar hur man kan addera och multiplicera transfinita tal och inför därmed en transfinit aritmetik. Senare sammanfattar han sina resultat i två artiklar med titeln *Beiträge zur Begrundung der transfiniten Mengenlehre* (”Bidrag till resonemang om den transfinita mängdläran”) från 1895 och 1897 i *Mathematische Annalen*. En fråga som Cantor brottades med var ”Finns det något transfinit tal mellan $\aleph_0$ och $\aleph_1$?” och hans hypotes, som kallas *kontinuumhypotesen*, var att det inte finns något sådant tal. De två åren mellan de båda artiklarna kan förklaras med att Cantor hoppades kunna visa kontinuumhypotesen i den andra artikeln men misslyckades. Problemet med kontinuumhyptesen fick sin lösning på 1960-talet.

Cantors teorier var och är kontroversiella. Den skarpaste kritikern var Kronecker och hans omdömen var skoningslösa. Han yttrade bl.a. ”Jag vet inte vad som utmärker Cantors teori – filosofi eller teologi – men jag är säker på att den inte innehåller någon matematik.”. En annan matematiker Henri Poincaré fällde följande omdöme: ”Senare generationer kommer att betrakta *Mengenlehre* som en sjukdom från vilken man tillfrisknat.”. Men det fanns också matematiker som tog Cantor i försvar. En av den tidens största matematiker David Hilbert sade: ”Ingen skall fördriva oss från det paradis som Cantor skapade.”. Mot det genmälde filosofen **Ludwig Wittgenstein**: ”Om man kan kalla mängdläran för ett paradis kan man också kalla den ett skämt.”. Trots all kritik har mängdbegreppet blivit centralt i matematiken och matematiker använder det regelbundet. Cantors egen karakterisering ”En mängd är ett Många som tillåter sig att bli betraktad som ett Ett” förmedlar varför begreppet är användbart. Men även Cantor fann att begreppet var problematiskt och att det gav upphov till motsägelser om det användes alltför generellt.

I maj år 1884 fick Cantor sitt första anfall av depression. Han återhämtade sig efter några veckor men anfallen återkom med jämna mellanrum. De förstärktes av Kroneckers obarmhärtiga kritik. Under depressionerna ägnade sig Cantor mer åt filosofi, religion och litteraturvetenskap än åt matematik. Han anslöt till teorin att Shakespeare egentligen var en pseudonym för Francis Bacon. Han pensionerades 1913 och dog av en hjärtattack 1918. Han fick en rad utmärkelser och den främsta är kanske Sylvestermedaljen 1904. År 1915 gav Open Court Publishing Company ut en engelsk översättning av hans artiklar från 1895 och 1897 under titeln *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. Den gavs ut som första nummer i en serie av klassiker i naturvetenskap och filosofi.

Bernhard Riemann (1826–66) föddes i Hannover i Tyskland. Hans far var protestantisk präst och han var Riemanns lärare till dess han fyllt tio år. Riemann började gymnasiet när han var 14 år först i Hannover och därefter i Lüneburg. Han var en duktig elev om än inte lysande. Han arbetade hårt med klassiska ämnen som hebreiska och teologi. Han visade särskilt intresse för matematik och skolans rektor lät honom låna böcker från sitt eget bibliotek. Han läste en del klassiker bl.a. Legendres bok om talteori.

Figur 9.16: Bernhard Riemann. (Bild: `30QKwFz`)

Riemann började 1846 vid universitetet i Göttingen och enligt sin fars önskemål började han läsa teologi. Parallellt med teologistudierna följde han några föreläsningar i matematik och han bad sin far att få byta studieinriktning, något som till Riemanns glädje fadern accepterade. Då var Gauss den ledande professorn i Göttingen och förmodligen följde Riemann några elementära kurser för honom. Men trots Gauss var nu Berlin det ledande universitetet i matematik och Riemann flyttade dit och studerade för bl.a. Dirichlet, som blev en förebild för honom.

År 1849 återvände Riemann till Göttingen och skrev sin doktorsavhandling med Gauss som handledare. I avhandlingen studerade han teorin för funktioner av en komplex variabel. Han använde geometriska metoder och införde det vi i dag kallar Riemannytor. Han studerade förgreningspunkter, konforma avbildningar och hur ytor hänger samman. Riemanns resonemang var många gånger mycket intuitiva och saknade ibland den stringens som skulle göra dem helt vattentäta. Det uppvägdes emellertid av att frånvaron av långa räkningar tydliggjorde de ofta briljanta idéerna.

För att få en tjänst vid universitetet i Göttingen krävdes att man skrev en avhandling och Riemanns arbete kom att handla om representation av funktioner med trigonometriska serier. I den definierade han begreppet integrerbarhet på det sätt som idag görs i grundläggande universitetskurser i matematik och som vi kallar riemannintegrerbarhet. I samband med anställningen höll Riemann 10 juni 1854 en obligatorisk föreläsning och den hade titeln *Über* *die Hypotesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*. Den är numera en klassiker inom matematiken. Riemann skisserar p-dimensionella rum och det som i dag kallas *Riemannska mångfalder*. Han inför begrepp för att mäta ytors krökning och i det sista avsnittet diskuterar han förhållandet mellan geometrin och den värld vi lever i. Hans tankar var i vissa avseenden långt före sin tid och de blev i hög grad aktuella 60 år senare när Einstein skapade sin relativitetsteori. Matematikhistorikern **Hans Freudenthal** skriver i sin biografi över Riemann i *Dictionary of Scientific Biography* (1970–80):

> ”Den allmänna relativitetsteorin blev ett lysande bevis på betydelsen av hans arbete. Med den matematiska apparat som utvecklades i Riemanns föreläsning fann Einstein det ramverk som passade hans fysikaliska idéer, hans kosmologi och kosmogoni; och andemeningen i Riemanns föreläsning var just vad fysikerna behövde: metrisk struktur bestämd av data.”

När Gauss dog 1855 efterträddes han av Dirichlet. Samtidigt gjordes försök att skapa en personlig professur till Riemann men det misslyckades. Riemann efterträdde emellertid Dirichlet efter dennes död 1859.

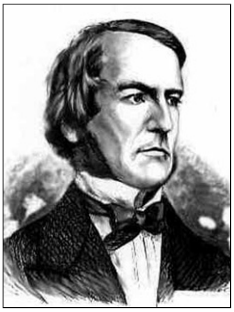
Under tiden i Göttingen skrev Riemann ett berömt arbete om abelska funktioner och ett om talteori. I det sistnämnda, vars titel kan översättas till ”Om antalet primtal som är mindre än en given storhet”, studerar han Dirichlets summa som kan skrivas

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod \frac{1}{1 - p^{-s}}$$

där summan tas över alla positiva heltal n och produkten över alla primtal. Riemann studerade $\zeta(s)$ inte bara för reella tal utan för komplexa. Han visade att funktionen har oändligt många nollställen och hans hypotes var att alla icke-rella hade realdelen lika med $1/2$. Det är den berömda Riemanns hypotes som är ett av de viktigaste olösta problemen inom matematiken idag.

År 1862 gifte sig Riemann med **Elise Koch**, som var en vän till hans syster. De fick en dotter. Samma år fick Riemann en svår förkylning som så när tagit hans liv. Han tillbringade den följande vintern på Sicilien med förhoppning om att ett mildare klimat skulle vara bra för hans hälsa. Han passade också på att träffa italienska matematiker som **Enrico Betti** som tidigare gästat honom i Göttingen där de diskuterade frågor om geometri och topologi. Han återvände till Göttingen men hälsan försämrades. De följande åren vistades han ömsom i Göttingen och ömsom i Italien. Han dog i Selasca vid stranden av Lago Maggiore den 16 juni 1866.

George Boole (1815–64) föddes i staden Lincoln i Lincolnshire i England. Hans far hade en skoaffär och var mycket intresserad av naturvetenskap och matematik. George Boole började i en privatskola innan han var två år gammal och vid sju års ålder började han grundskolan. Han visade tidigt intresse för språk och fick undervisning i latin av en bokhandlare från orten. Han lärde sig sedan grekiska på egen hand och blev så skicklig att han vid fjorton års ålder på egen hand översatte en dikt av den grekiska diktaren **Meleager från Gadara** som levde under det första århundradet före Kristus. Fadern blev så stolt att han lät publicera översättningen och den var så begåvad att en lärare i staden ifrågasatte om en fjortonåring verkligen kunde ha gjort den. Boole studerade då vid en handelsskola i Lincoln. Föräldrarna kunde inte bekosta en akademisk utbildning men Boole lärde sig tyska och franska på egen hand.



Figur 9.17: George Boole. (Bild: `2ABrHf6`)

När Boole var sexton år gammal började han tjänstgöra som assisterande lärare vid en skola i Doncaster ungefär 4 mil nordöst om Lincoln. Han var tvingad till det eftersom faderns affär hade gått i konkurs och han måste försörja sin familj. Han studerade på fritiden och ägnade sig fortfarande åt språk men nu blev matematiken huvudintresset och han studerade bl.a. differential- och integralkalkyl. När han var 19 år startade han egen skola i Lincoln. Fyra år senare erbjöds han att ta över Hall's Akademi i Waddington, som låg ungefär sex kilometer från Lincoln. Boole flyttade dit tillsammans med sin familj. Han fördjupade nu sina matematiska kunskaper och läste verk av Lagrange och Laplace. Han kom i kontakt med **Duncan Gregory**, som då var redaktör för *Cambridge Mathematical Journal* och Gregory rådde honom att följa undervisningen på kurser i Cambridge. På grund av försörjningsplikterna var det omöjligt för Boole, som efter två år i Waddington startade en egen internatskola i Lincoln. Han hade då börjat publicera artiklar i *Cambridge Mathematical Journal*.

Boole fick nu kontakter med etablerade matematiker och 1842 började han brevväxla med Augustus de Morgan som var professor vid University College i London. de Morgan hade nära kontakt med William Rowan Hamilton och Charles Babbage och han gav privatlektioner till Ada Lovelace. Genom de Morgan fick Boole 1844 en artikel *On a general metod of analysis* publicerad i *Transactions of the Royal Society*. Artikeln handlade om algebraiska metoder att lösa differentialekvationer och Boole fick för den Kungliga Vetenskapsakademins guldmedalj. Nu var Boole etablerad i det matematiska samhället. År 1849 blev han den förste professorn i matematik vid Queens College i Cork på Irland. Han undervisade där till sin död 1864. År 1855 gifte han sig med **Mary Everest** som var 17 år yngre och som han tidigare gett lektioner i analys. Äktenskapet var lyckligt och de fick fem döttrar.

Boole publicerade omkring 50 artiklar i olika ämnen. Han var en av de första som studerade de grundläggande räkneregler – de kommutativa, associativa och distributiva lagarna – som algebran bygger på. Hans mest berömda arbete är *An Investigation Into the Laws of Thought* från 1854 där han algebraiserar logiken. Verket kom att få mycket stor betydelse och är den teoretiska bakgrunden till att logiska slutledningar kunde realiseras med elektriska kretsar som i sin tur banade väg för datorerna.

Ytterligare två verk kom att få stort inflytande nämligen *Treatise on Differential Equations* från 1859 och *Treatise on the Calculus of Finite Differences* från 1860. Boole lämnade också bidrag till sannolikhetsteorin.

Boole var emellertid inte bara en stor vetenskapsman utan han var också en enastående och engagerad lärare. Han hade undervisat hela sitt vuxna liv och hans hängivenhet till läraryrket skulle också orsaka hans död. En dag 1864 gick han i hällande regn de drygt 3 kilometerna från sin bostad till Queens College och undervisade sedan i våta kläder. Han fick en svår förkylning med hög feber som till slut angrep lungorna. Han dog 8 december 1864.

Boole avlade aldrig några akademiska examina men hans storhet blev uppmärksammad under hans livstid och han fick flera hedersbetygelser. Han blev hedersdoktor vid universiteten i Oxford och Dublin. Hans namn kommer att för alltid att förknippas med Boolesk algebra, som är en av de teoretiska grundstenarna för vår tids informationsteknologi. Han var själv inte omedveten om betydelsen. I ett brev från 1851 till **William Thomson**, senare **Lord Kelvin**, skriver han:

> ”Jag börjar nu på allvar med att bearbeta min undersökning om logik och sannolikhetslära för tryckning. Jag ser den som mitt hittills mest värdefulla om inte det enda värdefulla bidrag till vetenskapen som jag gjort eller kommer att göra och som jag om något önskar att bli ihågkommen för.”

Fyra kvinnliga matematiker

Matematikens historia präglas av män. Det är uppenbart och det beror på att kvinnor inte fick möjligheter att utveckla sina talanger inom ämnet. De var predestinerade till andra uppgifter i samhället och de flesta kom överhuvudtaget inte i kontakt med ämnet annat än med de mest basala områdena inom aritmetik. När det någon gång hände att begåvade kvinnor tog initiativ till att studera naturvetenskap och matematik motarbetades de ofta av omgivningen – av föräldrar, av skolsystemet, av universitet och av den intellektuella eliten som dominerades av män. Ofta möttes de av tystnad och deras resultat ignorerades. De fanns emellertid också exempel på stora matematiker som utan fördomar hjälpte sina kvinnliga kollegor. Vi ger fyra exempel på kvinnor som gav viktiga bidrag till matematiken och dess tillämpningar – i tre av fallen trots motstånd från omgivningen.

Sophie Germain (1776–1831) föddes i Paris. Hennes far var en rik köpman med kulturella och politiska intressen. Hemmet var en mötesplats för intresserade av liberala reformer och Sophie fick redan som liten ta del av politiska och filosofiska diskussioner.

När Sophe Germain var tretton år läste hon om Arkimedes och hur han dödades av en romersk soldat. Det berörde henne och hon beslöt sig för att ägna sig år matematik. Hon läste arbeten av Newton och Euler på nätterna då hennes föräldrar sov. De såg nämligen med oblida ögon att hon studerade. De måste till slut ha veknat eftersom de stödde henne ekonomiskt till hennes död. Sophie Germain gifte sig aldrig. Äktenskapet var då det vanliga sättet för en kvinna att få försörjning.

Figur 9.18: Sophie Germain. (Bild: `3hG6QYr`)

Som kvinna fick Germain inte studera vid t.ex. École Polytechnique, men de nya regler som trädde i kraft efter franska revolutionen gjorde det möjligt att sprida föreläsningsanteckningar. På det sättet fick Germain tillgång till Lagranges föreläsningar. Mot slutet av Lagranges föreläsningsserie i analys skickade hon in en uppsats under pseudonymen **M. LeBlanc**. Arbetet vittnade om stor originalitet och Lagrange sökte efter författaren. Han upptäckte att det var en kvinna men det fäste han inget avseende vid utan behandlade hennes arbete med den respekt det förtjänade. Lagrange blev ett stöd och en rådgivare till Sophie Germain. Trots det blev det något planlöst och slumpmässigt över Germains matematiska skolning och hon fick inte den professionella undervisning hon önskade.

Germain skrev också till Legendre om några problem i hans *Essai sur le théorie des nombres* (”Essä om talteori”) från 1798. Brevväxlingen utvecklades till ett samarbete och Legendre tog upp några av hennes bidrag i ett supplement till andra upplagan av verket.

Ett av de verk som Germain ägnade mycket tid åt och som hon kom att få en fördjupad förståelse för var Gauss *Disquisitiones Arithmeticae*. Hon skrev ett dussintal brev om talteori till Gauss mellan 1804 och 1809 och hon använde också nu pseudonymen M. LeBlanc. Gauss läste hennes brev och gav uppskattande kommentarer om hennes bevis. När fransmännen ockuperade Gauss hemstad fruktade hon att Gauss skulle röna samma öde som Arkimedes och utnyttjade sina kontakter med franska officerare för att förhindra det. Gauss fick reda på det och han fick också reda på att hans skyddsängel var den M LeBlanc som skrivit brev till honom. Detta gjorde att Gauss än mer uppskattade Sophie Germain. Under denna period formulerade hon ett resultat i anslutning till Fermats stora sats som senare skulle kallas *Sophie Germains sats*. Satsen säger att om vissa delbarhetsegenskaper är uppfyllda så gäller Fermats förmodan.

År 1808 hade den tyske fysikern **Ernst F. F. Chladni** besökt Paris och visat försök med vibrerande plattor som genererade s.k. *Chladnikurvor*. Ett pris utfästes till den som kunde formulera en matematisk teori om elastiska ytor som förklarade kurvorna. De tävlande fick två år på sig. Germain antog utmaningen och det var bara hon som lämnade in något bidrag. Juryn godtog inte hennes lösning då hon inte härlett den från fysikaliska principer. Det fanns emellertid goda ansatser in hennes försök. En ny tävling utlystes och efter de två åren lämnade Germain in ett nytt förslag. Också denna gång var hon ensam tävlande och inte heller nu godkändes hennes lösning men hon fick ett hedersomnämnande. Tävlingstiden utökades med ytterligare två år och Germain lämnande som ensam tävlande in en ny lösning. Denna gång vann hon, trots vissa brister när det gällde stringensen, priset som var en medalj av guld som vägde ett kilo. Germain infann sig emellertid aldrig till prisutdelningen. Skälet vet man inte men gissningsvis har det att göra med att hon inte ansåg sig behandlad med tillräcklig respekt av juryn och vetenskapssamhället.

Germain försökte utvidga sina teorier om elastiska ytor och 1825 skickade hon in en artikel till Institut de France där Poisson och Laplace var medlemmar. Arbetet hade vissa brister men istället för att påtala dem ignorerade man det.

Sophie Germain fortsatte sitt vetenskapliga arbete och inte bara med matematik utan också filosofi. Hon fick bröstcancer 1829 men deltog trots det aktivt i revolutionen 1830. Hon dog 1831. På hennes dödsattest står hon inte som forskare utan som fastighetsinnehavare.

Ett citat ur ett brev från Gauss när hon avslöjat sin identitet får avsluta denna korta beskrivning av Sophie Germaines liv:

> ”Hur kan jag beskriva min förvåning och min beundran när jag ser min värderade brevvän M LeBlanc förvandlad till denna berömda person ... då en kvinna, på grund av sitt kön, våra vanor och fördomar, möter oändligt många fler hinder än män när hon skall göra sig förtrogen med besvärliga problem [inom talteori], ändå befriar sig från dessa bojor och fördjupar sig i de mest svårgripbara, så har hon otvivelaktigt det ädlaste mod, utomordentlig talang och överlägsen genialitet.”

Ada Lovelace (1815–52) föddes i Piccadily i nuvarande London. Hennes far var den berömde poeten **Lord Byron**. Hennes mor **Anne Isabelle (Annabelle) Milbanke** var genom ärvda rikedomar ekonomiskt oberoende. Föräldrarna gifte sig den 2 januari 1815, Ada föddes den 10 december och föräldrarna separerade den 16 januari 1816. I april samma år lämnade Lord Byron England för att aldrig återkomma. Ada träffade inte sin far efter det. Allt tyder på att Lord Byron gifte sig för att rädda sin ekonomi och att Annabelle lämnade honom på grund av hans kvinnoaffärer.

Annabelle Byron var intresserad av matematik och Lord Byron ironiserade över detta och kallade henne ”Parallellogrammernas prinsessa”. Han och Lady Byron var som två parallella linjer. Hur långt de än dras ut så möts de aldrig. Lord Byron uttryckte sig många gånger sarkastiskt om matematik och han sympatiserade med ludditerna som ville förstöra alla automatiska vävstolar. Han var alltså både matematik- och teknikfientlig. Lord Byron dog i grekiska frihetskriget 1824 och då var Ada åtta år gammal.

Figur 9.19: Ada Lovelace. (Bild: `3fCzLen`)

Annabelle Byron fick ensam vårdnaden om Ada och hon växte upp tillsammans med sin mor i morföräldrarnas hem. Annabelle var fast besluten att hålla sin dotter borta från allt vad lyrik hette och matematiken var då ett lämpligt ämne. Musik var ett annat område som uppmuntrades. För undervisningen engagerades privatlärare. Annabelle drev sin dotter hårt och målmedvetet. När Ada var sex år gammal var geografi hennes favoritämne och hon studerade aritmetik motvilligt för att behaga sin mamma. När Annabelle upptäckte det ersattes geografilektionerna med lektioner i aritmetik och den lärare som engagerats avskedades. När Ada var arton gammal hade hon en kärleksaffär med sin privatlärare. När det upptäcktes försökte de rymma men lärarens släktingar kände igen Ada och tog kontakt men hennes mor. Det hela tystades ner. Hon gifte sig 1834 med en annan privatlärare **William King**, som var baron och kunde då titulera sig baronessa. År 1838 blev William King earl av Lovelace och hans fru kallade sig Ada Lovelace.

Två lärare som betydde mycket för Ada Byrons matematiska utveckling var **Mary Sommerville** och Augstus de Morgan. Mary Sommerville var själv aktiv forskare och hade bl.a. givit ut arbeten som blev av stor betydelse för Maxwell i hans arbete med elektromagnetism. Sommerville var inte bara Ada Lovelaces lärare utan också en av hennes närmaste vänner. De diskuterade matematik och teknik tillsammans och Mary gav Ada råd om lämplig litteratur. De Morgan var en dåtidens främsta engelska matematiker som har givit viktiga bidrag inom symbolisk logik. Han var också känd som en engagerad lärare.

Det var emellertid genom sitt samarbete med Charles Babbage som Ada Lovelace skulle gå till historien. De träffades på en fest 1833 och några veckor senare besökte Ada och hennes mor Babbbages hem där han förevisade sin differensmaskin. Ada blev fascinerad och hon frågade Babbage om han ville bli hennes lärare. Babbage avslog erbjudandet som senare gick till de Morgan. Ada Lovelace följde emellertid Babbages arbete och de blev goda vänner.

År 1842 höll Babbage ett föredrag i Turin om sin nya analytiska maskin. En av åhörarna, italienaren **Menabrea**, förde anteckningar och Ada Lovelace gjorde en översättning, som hon försedde med egna kommentarer. Det är i stort sett dessa kommentarer som har gjort henne berömd. Det visar att hon ser Babbage maskin som något mer än en räkneapparat som löser avancerade matematiska problem. En sådan maskin kan utvecklas till att bli något mer generellt och vi har tidigare kommenterat detta. Hon såg att den analytiska maskinen också måste vara användbara i andra sammanhang. Maskinen skall kunna lagra och bearbeta data som kan tryckas med andra symboler än siffror. Man kan associera till hennes lärare de Morgans arbeten inom symbolisk logik. Men hon går längre och säger:

> ”Den kan agera på annat än tal, om det finns objekt vars ömsesidiga relationer kan uttryckas med hjälp av operationer från de abstrakta vetenskaperna, . . .
>
> Anta till exempel att de grundläggande relationerna av toner med olika höjd i harmoniläran och kompositionen av musik är mottaglig för sådana uttryck och anpassningar. Då skulle maskinen kunna komponera hur genomarbetade och vetenskapliga musikstycken som helst.”

Hon förutsåg vad vi nu upplever: Text, bilder, tal, ljud, film kan uttryckas som digitala symboler och bearbetas av maskiner. Men hennes noter består inte bara av visioner. Hon analyserade hur man kan steg för steg konstruera algoritmer och hon exemplifierar det genom att beräkna Bernoullital.

Efter kommentarerna avtog Ada Lovelaces vetenskapliga verksamhet. De sista åren ryktades det om att hon hade affärer med flera män, hon ägnade sig åt spel och hon missbrukade till en del alkohol. Hon drabbades av cancer och dog 1852 bara 36 år gammal.

Ada Lovelace fick en gedigen matematisk utbildning och i motsats till andra kvinnliga matematiker som Sophie Germain behövde hon inte kämpa för den. Men hon var emellertid inte någon stor matematiker. Hon hade goda matematiska kunskaper och visade i kommentarerna till den analytiska maskinen att hon behärskade avancerade matematiska teorier, men hon bidrog inte med egna resultat till den matematiska forskningen. Hennes berömmelse och hennes storhet ligger i att hon hade visioner om hur matematiska teorier och matematiskt tänkande kan användas för att skapa maskiner som hjälpmedel inte bara inom naturvetenskap utan också inom helt andra områden som humaniora och konstnärlig verksamhet. Hon förutsåg för över hundra år den informationsteknik som nu spelar en central roll i samhället. Samtidigt betonade hon att maskinen inte kan ersätta mänskligt tänkande utan är ett hjälpmedel som styrs av människan. Ada Lovelace har för många blivit en ikon och hon har fått ett programmeringsspråk uppkallat efter sig. **Walter Isaacson** skriver i sin bok *Innovatörerna*:

> ”Tack vare sin lyhördhet för poetisk vetenskap hyllade hon en tänkt räknemaskin, som hennes vetenskapliga etablissemang avfärdade, och hon förstod hur behandlingskapaciteten hos en sådan mekanism kunde utnyttjas för alla former av information. På så sätt bidrog Ada, Lady Lovelace, till att så fröna till en digital tidsålder som skulle blomma hundra år senare.”

Florence Nightingale (1820–1910) föddes i Florens. Hennes föräldrar tillbringade sina två första år som gifta på resande fot i Europa. Både Florence och hennes äldre syster föddes i Italien och Florence fick namnet efter den stad där hon kom till världen. Föräldrarna var förmögna och systrarna växte upp på den engelska landsbygden. Från början undervisades de av en guvernant men sedan tog fadern, som var utbildad vid Cambridge, över. Under hans ledning studerade de klassiker som Aristoteles, Euklides, Bibeln och politiska skrifter.

Figur 9.20: Florence Nightingale. (Bild: `3fDuFhF`)

När Florence Nightingale var 20 år bad hon sina föräldrar att få studera matematik istället för att ”ägna sig åt broderier och öva kadriljer”. Modern motsatte sig det och trots att fadern var intresserad av matematik ansåg han att sådana studier inte var lämpliga för kvinnor. Florence gav inte upp och efter många uppslitande diskussioner gav föräldrarna med sig. Hon fick undervisning i matematik och en av hennes lärare var James Joseph Sylvester, som var en av Englands främsta matematiker med algebra som sin specialitet. Florence Nightingale ansågs vara en av hans bästa elever. Hennes intresse för matematik vidgades och hon kom att ägna sig åt statistik. Hon tog stort intryck av den belgiske vetenskapsmannen **Adolphe Quetelet** som använde statistiska metoder inom olika samhällsvetenskaper.

Nightingales sociala intresse kombinerat med hennes religiositet fick henne att intressera sig för sjuksköterskeyrket. Det var inte heller något föräldrarna kunde acceptera. Yrket hade då låg status och det passade inte en kvinna från överklassen. Florence Nightingale insisterade emellertid och hon utbildade sig och praktiserade i Egypten, Tyskland och Frankrike.

Det var genom sina insatser under Krimkriget (1853–6) mellan Ryssland och en allians mellan Storbritannien, Frankrike och Osmanska riket som Florence Nightingale blev berömd. Hon ombads att organisera sjukvården och utbildningen av sjuksköterskor i vid militärsjukhusen på Krim. Hon lade märke till de sanitära missförhållandena och såg att den stora dödligheten snarare berodde på dem än på själva krigsskadorna. Hon försökte förgäves få den militära ledningen att förbättra förhållandena. Hon använde nu sina statistiska kunskaper och gjorde undersökningar om dödlighetens orsaker. För att göra resultaten lättillgängliga uppfann hon en typ av diagram som hon kallade ”coxcombdiagram”. Ett sådant visas i figur 16.1. När hon presenterade dem för militärledningen blev det tydligt vilka de viktigaste orsakerna till dödligheten var. Nightingale fick resurser att förbättra de sanitära förhållandena och dödligheten sjönk först från 60 procent till 43 procent och genom att införa bättre kost med frukt och grönsaker sjönk den till 2 procent. Florence Nightingale var en pionjär när det gäller att presentera statistiskt material på ett sådant sätt att resultaten blir tydliga och lättillgängliga.

Efter Krimkriget startade Nightingale en skola för sjuksköterskor. Hon kunde själv inte arbeta som sjuksköterska efter en sjukdom som hon ådrog under kriget. Hon var emellertid aktiv genom att propagera för bättre hälsa och hon gav ut 200 böcker, rapporter och artiklar. Hon hade också planer på att donera medel till en professur i statistik vid Oxfords universitet. År 1874 blev hon hedersmedlem i American Statistical association. Florence Nigthingale dog 1910. Hon blev 90 år.

Florence Nightingale var inte någon matematiker. Hon var sjuksköterska och en duktig organisatör med en god matematisk skolning. Hon hade fått kämpa både för att bli sjuksköterska och för att få läsa matematik. I den överklass som hon tillhörde blev man inte sjuksköterska och en kvinna skulle inte läsa matematik. Hon bröt motståndet och gjorde stora samhälleliga insatser inom hälsoområdet genom att kombinera stor empati med kylig analys. Hon kunde använda sitt matematiska tänkande och sina statistiska kunskaper till att påvisa brister som sedan kunde åtgärdas. Hon förnyade presentationstekniken av statistiskt material så att det blev mer lättillgängligt. I dagens samhälle spelar statistiska undersökningar en stor roll och att kunna förmedla dem på ett sätt så att det är lätt för gemene man att ta dem till sig är en fråga av stor demokratisk betydelse. Florence Nightingale var en pionjär inom detta område.

Sonja Kovalevsky (1850–91) föddes i Moskva. Hennes familj tillhörde den ryska överklassen och Sonja fick privatundervisning av guvernanter. Efter några år på ett lantställe utanför Moskva flyttade familjen till S:t Petersburg. I familjens umgängeskrets ingick författaren Fjodor Dostojevskij.

Figur 9.21: Sonja Kovalevsky. (Bild: `3OSrIpm`)

Sonja blev tidigt intresserad av matematik och hon blev inspirerad av sin farbror, som hade stort intresse för matematik. Hon förstod inte mycket av det han berättade men ämnet tilltalade hennes fantasi. Hon skriver i sin självbiografi:

> ”Jag kunde naturligtvis inte förstå betydelsen av dessa begrepp men de tilltalade min fantasi och skapade en vördnad för matematik som en hög och mystisk vetenskap som för de invigda öppnar upp en ny förunderlig värld, som är otillgänglig för vanliga dödliga.”

När Sonja var elva år var hennes sovrum tapetserat med föreläsningsanteckningar i differential- och integralkalkyl av den ryske fysikern och matematikern **Michail Ostrogradski** och Sonja kände igen en del från farbroderns berättelser. Sonjas intresse för matematik var så starkt att hon försummade andra ämnen. Hennes far reagerade mot detta och förbjöd henne att läsa matematik. Hon lyckades låna en bok i algebra och smygläste den på nätterna när ingen såg henne. Så småningom ändrades faderns attityd och hon tilläts ta privatlektioner också i matematik.

När Sonja blev arton år ville hon börja studera utomlands men det var inte tillåtet för en kvinna att lämna landet om hon inte gjorde det tillsammans med sin äkta man. Sonja ingick därför ett formellt äktenskap med den ryske paleontologen **Vladimir Kovalevsky**. Sonja reste 1869 till Heidelberg men upptäckte att hon som kvinna inte fick närvara vid föreläsningarna. Ledningen ordnade emellertid så att hon informellt kunde följa undervisningen om hon bad om tillstånd för varje enskild föreläsning. Hon var kvar i Heidelberg tre terminer och många av professorerna var hänförda över den begåvade eleven.

År 1871 flyttade Sonja till Berlin men inte heller där fick hon följa undervisningen. Weierstrass försökte att ändra ledningens inställning men misslyckades och blev då istället hennes personliga lärare. Under tiden i Berlin skrev hon tre artiklar. Den första som handlade om partiella differentialekvationer publicerades 1875 i *Crelles Journal*. Sonja Kovalevsky doktorerade 1874 vid universitetet i Göttingen med högsta betyg. Trots det fick hon bara arbete som lärare i elementarskolor för flickor där hon undervisade i elementär aritmetik.

År 1878 födde Sonja en dotter och två år senare började hon återta matematisk forskning och skrev tre artiklar om ljusrefraktion. År 1881 separerade hon från Vladimir som två år senare begick självmord. För att döva samvetskvalen engagerade sig Sonja i matematisk forskning.

Den svenske matematikern Gösta Mittag-Leffler, som var professor vid den nystartade högskolan i Stockholm, var god vän med Weierstrass och fick reda på Sonja Kovalevskys svårigheter. Han såg en möjlighet att rekrytera en talangfull matematiker till den nya högskolan. Mittag-Leffler hade stort inflytande både på den egna högskolan och nationellt och han lyckades ordna en anställning som extra ordinarie professor under fem år. Sonja började sin tjänst i Stockholm 1884 och 1889 blev hon ordinarie professor.

Åren i Stockholm var mycket framgångsrika. Hennes viktigaste forskningsbidrag kom till under denna tid. Hon deltog i Franska Akademins tävling om Prix Bordin. Bidraget skulle handla om stela kroppar och Sonja Kovalevskys bidrag segrade. Arbetet ansågs så excellent att prissumman höjdes från 3000 till 5000 francs. Kovalevsky var verksam på många plan. Hon gav också kurser om de senaste landvinningarna i matematisk analys, hon var redaktör för den nybildade tidskriften *Acta Mathematica*, hon stod för högskolans kontakter med Berlin och Paris och hon var med och organiserade internationella konferenser.

Sonja Kovalevsky skrev också dramer tillsammans med Gösta Mittag-Lefflers syster Ann-Charlotte Leffler och hon var också genom sin utstrålning något av en stjärna i det lokala sällskapslivet. Det fanns också kritiska röster. August Strindberg skrev: ”En kvinna som ägnade sig åt den högre matematiken? En monstrositet!”.

År 1891 ådrog sig Sonja Kovalevsky en allvarlig förkylning som övergick i lunginflammation och hon dog bara 41 år gammal.

Av de fyra kvinnorna vars liv och verk vi kommenterat var Sonja Kovalevsky den största matematikern. Hon var den första kvinnliga professorn i Europa sedan fysikern **Laura Bassi** (1711–78) och Maria Agnesi och i Sverige var hon den första kvinnliga professorn i matematik. Det skulle dröja ytterligare över hundra år innan en kvinna utnämndes till professor i matematik vid ett svenskt universitet.

Kapitel 10

1900-talet

Nittonhundratalet präglades av två världskrig 1914–8 och 1939–45 som båda slutade med nederlag för Tyskland. Under mellankrigstiden fick världen uppleva en börskrasch med efterföljande ekonomisk kris. En revolution i det gamla Ryssland i slutet av första världskriget innebar att kommunisterna tog över makten och bildade Sovjetunionen. I Tyskland kunde ett nytt rasistiskt parti, nazistpartiet, genom demokratiska val ta makten 1933. En judeförföljelse inleddes som kulminerade under andra världskrigets sista år i det som brukar kallas Förintelsen. Många judiska vetenskapsmän lämnade Europa och emigrerade till USA. Det andra världskriget följdes av det som brukar kallas det kalla kriget mellan segermakterna i öst och väst representerade av Sovjetunionen och USA. Tyskland delades mellan öst och väst. Berlin, som låg i det nya Östtyskland, blev i sin tur en delad stad. Delningen markerades 1961 genom att Sovjetunionen lät uppföra en mur. Muren revs 1989 och det innebar slutet på sovjetväldet. Ryssland återuppstod som stat och flera mindre stater i det gamla sovjetväldet blev självständiga.

Många av de gamla kolonierna bröt sig loss och blev självständiga stater. I Kina tog kommunisterna med Mao Zedong makten 1949 efter ett blodigt inbördeskrig. I Sydostasien utkämpades 1946–54 ett krig mellan kolonialmakten Frankrike och den vietnamesiska motståndsrörelsen. Det slutade med att Frankrike lämnade Franska Indokina d.v.s. Vietnam, Laos och Kambodja. Stridigheterna fortsatte nu mellan Nordvietnam och den nordvietnamesiska frihetsrörelsen FNL å ena sidan och Sydvietnams regering och USA å den andra. Kriget avslutades genom en nordvietnamesisk invasion och Saigons fall 1975. Vietnamkriget, som var det första krig där striderna skildrades i TV, kom att orsaka stora proteströrelser mot USA både inom USA och i världen i övrigt. En internationell tribunal arrangerades av den brittiska filosofen Bertrand Russel och den franske författaren **Jean-Paul Sartre**. Tribunalens slutsats var att USA begått krigsförbrytelser i Indokina.

Den tekniska utvecklingen var enorm. Vid seklets början var tåget det kanske viktigaste kommunikationsmedlet. De första bilarna hade börjat rulla på vägarna. Därefter gick utvecklingen snabbt. Bilismen ökade, flyget blev under andra halvan ett kommunikationsmedel som de flesta hade möjlighet att utnyttja, den första satelliten skickades upp 1957 och den följdes av flera och de skulle få betydelse för telekommunikationen. År 1969 landade en bemannad rymdfarkost på månen. Telefon, radio, film och television såg dagens ljus och blev tillgänglig för alla. Under de sista decennierna utvecklades datatekniken snabbt med persondatorer, datakommunikation och Internet. Den nya informationstekniken blev en betydelsefull del av samhället.

Inom fysiken kom studiet av atomernas struktur och ljusets natur att resultera i nya teorier, som för mycket små partiklar och för mycket stora hastigheter, innebar, att den klassiska fysiken som byggde på Newtons lagar, fick kompletteras. De ersattes av Einsteins relativitetsteori och kvantmekaniken. Den nya atomläran visade att det var teoretiskt möjligt att omvandla massa till energi och detta realiserades genom de första atombomberna mot Hiroshima och Nagasaki. Under kalla kriget byggde stormakterna upp ansenliga arsenaler av kärnvapen. Kärnkraften utvecklades också så att den kunde användas fredligt men utbyggnaden blev kritiserad. Riskerna för missbruk och för olyckor samt svårigheter med att hantera avfallet innebar att många ställde sig tveksamma till kärnkraften som sådan.

Inom biologin var upptäckten av DNA-molekylen som bärare av våra genetiska egenskaper en av de stora upptäckterna. I början av seklet utvecklade **Sigmund Freud** psykoanalysen och beteendevetenskaper som psykologi, pedagogik och sociologi fick en given plats inom universiteten.

Den ökande användningen av teknik både inom industrin och för privata behov kom att få konsekvenser för miljön. En miljörörelse uppstod och den inleddes med **Rachel Carsons** bok *Tyst vår* från 1962.

En av de mest inflytelserika filosoferna under nittonhundratalet var Ludwig Wittgenstein. Han granskade språket – både det vetenskapliga och vardagsspråket. Inom litteraturen kan nämnas författare som **Thomas Mann**, Jean-Paul Sartre, **Albert Camus**, **Ernest Hemingway**, **Boris Pasternak**, **Alexander Solzjentsyn**, **Nadime Gordimer**, **Samuel Beckett** och **Gabriel Garcia Márquez**. Inom musiken avlöstes den romantiska perioden från slutet av 1800-talet mot en mer experimentell musik representerad av **Igor Strawinsky**, **Arnold Schönberg**, **John Cage** och **Karlheinz Stockhausen**. Jazzen med bl.a. **Louis Armstrong**, **Ella Fitzgerald**, **Duke Ellington** och **Charlie Parker** gjorde sitt intåg under början av seklet och under andra halvan av århundradet kom rockmusiken att bli en ny konstform med grupper som **The Beatles** och **Rolling Stones**. Inom måleri och skulptur var **Pablo Picasso** det stora namnet men man kan också nämna **Marc Chagall**, **Gustav Klimt**, **Andy Warhol** och **Paul Jackson Pollock**. Filmen blev en ny konstform med namn som **Charlie Chaplin**, **Sergej Eisenstein**, **Fredrico Fellini**, **Alfred Hitchcock** och **Ingmar Bergman**.

10.1 Frågor kring matematikens grunder

Vid den internationella matematikerkonferensen 1900 höll David Hilbert en berömd föreläsning där han försökte identifiera områden och problem som skulle komma att prägla det kommande seklet. Han gör det genom att lyfta fram 23 problem som han tror kommer att generera viktiga bidrag till den matematiska vetenskapen. Han skriver:

> ”Det finns en outtömlig källa av problem inom matematiken, och så fort ett problem lösts ersätts det av andra. Tillåt mig att i det följande att på prov nämna vissa speciella problem, valda från olika grenar av matematiken, som när de diskuteras kan förväntas ge vetenskapliga framsteg.”

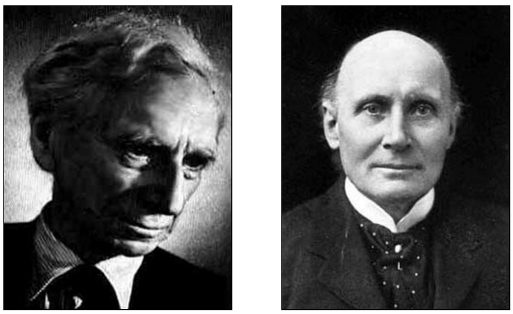
Han fortsätter:

> ”Betrakta principerna inom analys och geometri. De mest tankeväckande och anmärkningsvärda bidragen från det gångna seklet inom dessa områden är den aritmetiska formuleringen av begreppet kontinuum i arbeten av Cauchy, Bolzano och Cantor samt upptäckten

> av den icke-euklidiska geometrin av Gauss, Bolyai och Lobatjevskij. Jag vill därför rikta er uppmärksamhet mot några problem inom dessa områden.”

Det första problemet han tar upp är kontinuumhyptesen: Finns det något kardinaltal mellan $\aleph_0$ och $\aleph_1$? eller Finns det någon mängd som i Cantors mening har fler element än de naturliga talen och färre än de reella? Problemet fick sin lösning på 1960-talet och för att få en förståelse för den redogör vi för några av de diskussioner om matematikens grunder som fördes under början av 1900-talet. Vi kommer då också in på det andra problemet på Hilberts lista.

Diskussionen kring kontinuumhypotenusan berör mängdläran. I Cantors värld är begreppet mängd centralt. Många begrepp och samband inom mängdläran har sin motsvarighet inom logiken. Kan man bygga upp matematiken utifrån grundläggande logiska begrepp? Den frågan ställde sig den engelske matematikern och filosofen Bertrand Russel (1872–1970). Tillsammans med sin kollega **Alfred North Whitehead** (1861–1947) gav han 1910 ut verket *Principia Mathematica* där de försökte bygga upp det kanske mest basala området inom matematiken – aritmetiken – från logiken. Verket är epokbildande inom matematik och logik. Russel hävdade att alla matematiska sanningar kan översättas till logiska sanningar och att alla matematiska bevis kan omarbetas till logiska bevis. Matematiken skulle enligt Russel och Whitehead vara en äkta delmängd av logiken. Det visade sig emellertid att teorin i *Principia Mathematica* leder till paradoxer. Bertrand Russel insåg det själv och gav följande exempel: ”I en by rakar byns barberare alla invånare utom de som rakar sig själva. Frågan är: Vem rakar barberaren? Om han rakar sig själv så rakar han inte sig själv och om han inte rakar sig själv så rakar han sig själv.”.



***54·43.** $\vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54{\cdot}26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

$[*51{\cdot}231] \qquad \equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$

$[*13{\cdot}12] \qquad \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (1)$

$\vdash . (1) . *11{\cdot}11{\cdot}35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda \qquad (2)$

$\vdash . (2) . *11{\cdot}54 . *52{\cdot}1 . \supset \vdash .$ Prop

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

Figur 10.1: I övre raden visas från vänster Bertrand Russel och Alfred North Whitehead, författarna till *Principia Mathematica*. I den undre raden visas ett utdrag ur verket med beviset av påståendet ”1 + 1 = 2”. (Bild: `3fxu94N`, `2UR6m8k`)

Trots paradoxerna kom mängdbegreppet att bli centralt i de flesta grenar av matematiken under 1900-talet. Det blev ett viktigt verktyg i den abstraktionsprocess som utvecklades för att få bättre överblick och för att göra resonemangen mer genomskinliga. Det gällde bara att ha kontroll på att man bildade mängder på ett sådant sätt att paradoxerna kunde undvikas.

Det andra av Hilberts problem handlar om motsägeslefriheten i ett axiomsystem. Den icke-euklidiska geometrin förändrade synen på matematiken. Diskussionen kring parallellpostulatet visade att det finns två geometrier, som båda är lika giltiga. Båda uppfyller fyra av Euklides postulat där en uppfyller hans femte, parallellpostulatet och den andra inte gör det. En matematisk teori kan ses som mängder av element, i geometrin punkter och räta linjer, som uppfyller vissa postulat. Postulaten beskriver de grundläggande egenskaperna hos elementen. Den euklidiska geometrin har sina postulat, den icke-euklidiska sina. Aritmetiken kan också axiomatiseras och ett exempel är det axiomsystem för de naturliga talen som 1889 gavs av italienaren Giuseppe Peano i boken *Arithmetices principia, nova methodo exposita* (”Aritmetikens principer presenterade med en ny metod”).

Under 1800-talet hade man börjat studera mer allmänna begrepp som grupper, kroppar och ideal. De kunde nu definieras som mängder där elementen uppfyllde vissa postulat. Så är t.ex. en grupp en mängd G av element sådan att till varje par av element (a, b) är ordnat ett nytt element i G som vi betecknar $a \star b$ så att operationen $\star$ har följande egenskaper: (1) $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$ för alla a, b och c i G, (2) det skall finnas ett enhetselement e i G sådant att $e \star a = a \star e = a$ för alla a i G samt (3) varje element a i G skall ha en invers a' sådan att $a \star a' = a' \star a = e$. Det finns många exempel på grupper som permutationer, mängden av heltal, olika mängder av avbildningar m.m.

På liknande sätt kan man definiera andra generella begrepp som ringar, kroppar och linjära rum som spelar en stor roll inom algebran. För att studera olika typer av funktioner har man infört abstrakta begrepp som Banachrum och Hilbertrum. Inom differentialgeometrin har man infört begreppet mångfald. De abstrakta begreppen har inneburit att resonemang har blivit överskådliga och inte tyngda av tekniska räkningar. Någon gång måste man konkretisera och utnyttja egenskaperna hos de specifika matematiska begrepp man arbetar med men man kan först genom de generella teorierna på ett relativt enkelt sätt dra vissa viktiga slutsatser.

Figur 10.2: Kurt Gödel. (Bild: `3OMSlw6`)

Genom det axiomatiska förhållningssättet har man alltså skapat kraftfulla generella teorier. Men några frågor inställer sig. Är det axiomsystem vi arbetar med motsägelsefritt? Det skulle ju kunna hända att vi genom en kedja av slutledningar kunde visa att ett påstående gäller och genom en annan kedja att det inte gäller. Det är detta problem som är Hilberts andra problem. Kan man visa att så inte är fallet för aritmetikens axiomsystem? En annan fråga är om axiomsystemet är fullständigt. Kan vi utifrån de axiom vi formulerat avgöra om varje påstående inom den teori vi skapat är sant eller falskt? Uppenbarligen gäller det inte för den geometri som karakteriseras av Euklides fyra första axiom. Frågan om det genom en punkt utanför en rät linje går att dra bara en linje genom parallell med den givna kan inte besvaras. Det finns en geometri där det finns bara en linje och en geometri där det finns oändligt många. Så rent allmänt är svaret nej. Men när är ett axiomsystem fullständigt? Kan man avgöra det?

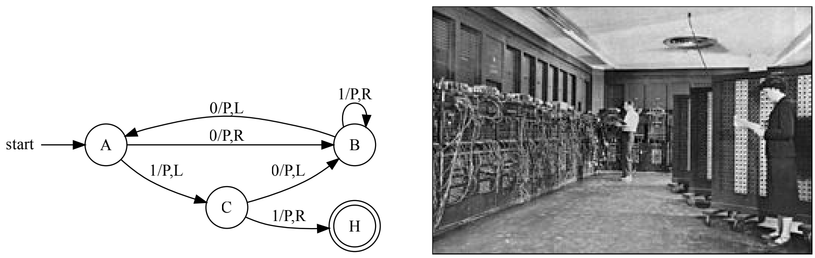
Frågan om ett axiomsystems fullständighet besvarades av den österrikiske matematiken och logikern **Kurt Gödel**. I artikeln *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme* (”Om formellt oavgörbara satser i *Principia Mathemetica* och besläktade system”) från 1931 visar han att i varje axiomatiskt system finns det påståenden som varken kan bevisas eller motbevisas och detta gäller även frågan om ett axiomsystems motsägelsefrihet.

Det första av Hilberts problem var kontinuumhypotesen. Frågan om det inte finns något transfinit tal mellan $\aleph_0$ och $\aleph_1$ visade sig vara oavgörbar inom ramen för det axiomsystem som ligger till grund för mängdläran. Detta visades av den amerikanske matematikern **Paul Cohen** i två artiklar *The independence of the continuum hypothesis I, II* från 1963 och 1964.

Hänvisningar till del 2 I avsnitt 17.3.4 behandlas matematikens grundvalar.

10.2 Om algoritmer

Formaliseringen av logiken för tankarna till möjligheten att formalisera matematiska resonemang och att konstruera automater som kan efterlikna det mänskliga tänkandet. Vi såg tidigare att Charles Babbage och kanske framför allt Ada Lovelace hade idéer om en maskin som inte bara kunde genomföra beräkningar utan också kunde användas i mer generella sammanhang. Maskinen skulle kunna programmeras för att t.ex. skapa mönster eller att komponera musik. Den engelske matematikern och logikern **Alan Turing** kom in på dessa frågor i några epokgörande artiklar. Den första *On Computable Numbers, with an Application to the Entscheidungsproblem* (1936) handlar om beräkningsbara tal och för att ge mening åt det begreppet konstruerade han en abstrakt maskin som numera kallas *Turingmaskin*. En Turingmaskin består av en remsa, ett tecken, ett ändligt antal tillstånd samt ett ändligt antal regler som beskriver hur maskinen övergår från ett tillstånd till ett annat. Maskinen kan flytta remsan, skriva ett tecken och radera ett tecken. Ett tal är beräkningsbart om det finns en Turingmaskin som levererar talets decimalutveckling på remsan. Med Turingmaskinen som modell konstruerades den första datorn. En av förgrundsgestalterna i det arbetet var **John von Neumann**, en matematiker med ungerskt ursprung som verkade i USA de sista tjugo åren. Turing hade själv använt idéerna när han tillsammans med kollegor arbetade med att knäcka tyskarnas kod *Enigma*. Den maskin, som då tillverkades, förstördes emellertid efter krigsslutet. År 1950 publicerade Turing en artikel *Computing Machinery and Intelligence* i tidskriften *Mind*. Han försöker i den besvara frågan ”Kan en maskin tänka?”. Han studerade där frågor som idag är centrala inom artificiell intelligens.



Figur 10.3: Bilden till vänster är en skiss av en Turingmaskin. Till höger visas ett foto av ENIAC. (Bild: `2Nibw8Z`, `3OY2HcJ`)

För att få en dator att lösa ett problem krävs en algoritm. Ett program skall sedan få datorn att utföra de olika stegen i algoritmen. Studiet av algoritmer och deras effektivitet kom att bli en central fråga inom datavetenskap och har gett upphov till områden som algoritmteori och komplexitetsteori. Vilka problem kan lösas med hjälp av algoritmer? Vilka algoritmer är effektivast och vilka är enklast? Frågorna blir inte bara teoretiska. För ett problem som återkommer ofta kan det vara väsentligt att hitta en lösning som i genomsnitt är så snabb som möjligt. Ett sådant problem är att optimera en linjär funktion under ett antal linjära bivillkor. Denna typ av problem kallas *linjär programmering* och förekommer inom t.ex. oljeindustrin, livsmedelsindustrin och transportindustrin och den algoritm som används kallas *simplexmetoden* och utvecklades av den amerikanske matematikern **George Dantzig**. Den växte fram när Dantzig arbetade som expert i amerikanska flygvapnet i slutet av 1940-talet och han beskriver den i en bok *Linear Programming and Extensions* från 1963.

En som tidigt studerade algoritmer ur olika perspektiv var den amerikanske matematikern och datavetaren **Donald Knuth**. Han har i det stort anlagda verket *The Art of Computer Programming* systematiskt behandlat olika problem där algoritmer har stor betydelse. Den första delen *Fundamental Algorithms* kom ut 1968 och de båda följande *Seminumerical Algorithms* och *Searching and Sorting* kom ut 1969 respektive 1973. Verken betraktas numera som klassiker.

Konsten att programmera blev central. Från början skrevs programmen som matades in i datorn i datorns eget språk som är uppbyggt av de två grundelementen 0 och 1. Det blev ganska snart alltför komplicerat. Programmeringsprocessen blev alltför kostsam. Den blev båda tidsödande och risken för felaktigheter i programmen var stor. Man skapade olika programmeringsspråk som låg närmare människan. Ett särskilt program – en kompilator – översatte byggstenarna i det nya språket till maskinens eget språk. Den första kompilatorn skrevs 1952 av **Grace Hopper** som var en av en handfull kvinnor som hade stor betydelse för utvecklingen av programmerinsgtekniken under 1950-talet. Hoppers kompilator skulle senare utvecklas till programmeringsspråket COBOL (Common Business Oriented Language) som är ett s.k. högnivåspråk som skapades 1959. Tillsammans med FORTRAN och LISP är det det enda programmeringsspråk som utvecklades på 1950-talet som fortfarande används. Ett stort antal programmeringsspråk har utvecklats sedan 1950-talet. Ett har fått namn efter Pascal och ett annat Ada efter Ada Lovelace.

Många problem kan lösas med algoritmer åtminstone teoretiskt. Men går de att realisera praktiskt? Tidsåtgången kan vara orimligt stor. Ett exempel får belysa det och vi väljer det s.k. *handelsresandeproblemet*. En handelsresande skall besöka n stycken orter och han skall besöka varje ort precis en gång. Han känner tidsavstånden mellan paren av orter och vill bestämma en rutt som tar så liten tid som möjligt. En enkel algoritm för att bestämma en sådan rutt vore att bestämma tidsåtgången för varje möjlig rutt och sedan välja ut den minsta. Hur många rutter skall han då beräkna? Det är lätt att se att om han startar i en av orterna så är antalet möjliga rutter $(n-1)!$. Antag nu att $n = 25$. Då är antalet rutter lika med $24! \approx 6.2 \cdot 10^{23}$. Om vi antar att vår dator är mycket snabb och varje rutt kan beräknas på 10^{-9} sekunder så skulle beräkningen ta över 10^{14} sekunder eller mer än 10^{6} år. En sådan algoritm är förvisso enkel men alldeles för långsam. Tidsåtgången är inte rimlig.

Problem som kan lösas med en algoritm inom rimlig tid säges vara av typ P. Naturligtvis måste begreppet ”rimlig tid” preciseras men vi avstår från det här. Det är ett öppet problem om handelsresandeproblemet är av typ P. Den algoritm vi skisserade duger inte men det kan ju finnas någon annan. Ett problem som är av typ P är linjär programmering.

Det finns emellertid en annan strategi att lösa ett problem än att ge en algoritm som levererar resultatet. Man kan göra en mer eller mindre kvalificerad gissning av lösningen och testa om den stämmer. En sådan metod är litet hasardartad eller med en engelsk term ”nondeterministic”. Om testen kan göras inom vad vi tidigare kallat rimlig tid så säges problemet vara av typ NP. Uppenbarligen är varje problem av typ P också av typ NP.

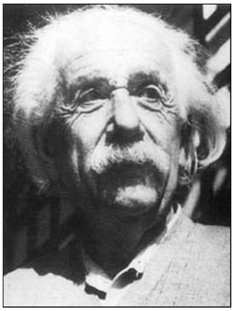
Men gäller det omvända? Det första reflektionen är kanske att det knappast är möjligt. Men man har hittills inte funnit något problem av typ *NP* som inte bevisligen inte är av typ *P*. Handelsresandeproblemet har visats vara av typ *NP* men det kan vara av typ *P* även om man inte lyckats bevisa det. Frågan om problemen av typ *NP* också är av typ *P* är i skrivande stund obesvarad.

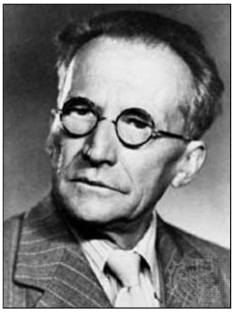
Hänvisningar till del 2 I avsnitt 17.2.3 behandlas handelsresandeproblemet och *P*/*NP*-problematiken. Avsnitt 17.3.5 ägnas åt Turings arbeten.

10.3 En utveckling mot ökad abstraktion

10.3.1 Den nya fysiken och matematiken

Fysiken har varit och är fortfarande det viktigaste tillämpningsområdet för matematiken. Med hjälp av matematiken har det varit möjligt att ge en exakt formulering av fysikens lagar och därigenom kunna dra slutsatser och göra förutsägelser. Omvänt har fysiken givit upphov till matematiska problemställningar som varit av avgörande betydelse för ämnets utveckling. Den nya fysiken med relativitetsteorin och kvantmekaniken innebär att banden mellan fysik och matematik förstärks. Relativitetsteorin formuleras matematiskt med hjälp av differentialgeometrien. Inom den nya kvantmekaniken är Schrödingerekvationen en av hörnpelarna liksom sannolikhetsbegreppet. Kvantmekaniken är oupplösligt förenad med den matematiska formalismen. Symmetribegreppet blir viktigt inte bara inom fysiken utan också inom kemi och biologi och i det sammanhanget är gruppbegreppet ett viktigt redskap.





Figur 10.4: Relativitetsteorin och kvantmekaniken representerar den nya fysiken. Till vänster ses relativitetsteorin skapare **Albert Einstein** (1879–1955) och till höger en av kvantmekanikens förgrundsgestalter **Erwin Schrödinger** (1887–1961). (Bild: `2UThTnv`, `3hzcGLg`)

10.3.2 Teorin för differentialekvationer utvecklas

Matematiska modeller av fysikaliska förlopp beskrivs ofta av differential-ekvationer. Vi kan nämna Schrödingerekvationen inom kvantmekaniken och Maxwells ekvationer inom elektricitetsläran. Värmeledning eller diffusion beskrivs av en differentialekvation, svängningar hos en sträng eller ett membran beskrivs av det vi kallar vågekvationen, inom potentialteorin spelar Laplaces ekvation en fundamental roll. De tre sistnämnda differentialekvationerna är

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

Den första ekvationen beskiver värmeledningen i en stav och den andra svängningarna i ett membran. Lösningarna till Laplaces ekvation beskriver i många sammanhang elektriska potentialer eller gravitationspotentialer. Dessa tre typer av ekvationer började studeras redan under 1700-talet och spelar en stor roll som typexempel på paraboliska, hyperboliska respektive elliptiska differentialekvationer. Andra fysikaliska förlopp beskrivs av andra differentialekvationer och flera olika typer har studerats. I en föreläsning 1945 efterlyste den ryske matematikern **Ivan Petrovsky** en generell teori för linjära partiella differentialekvationer inklusive de som inte förekommer i matematisk fysik. Den svenske matematikern **Lars Hörmander** arbetade systematiskt på att formulera en sådan teori och han presenterade sina arbeten i fyra volymer *The analysis of linear partial differential operators* som kom ut 1983 –5.

Studiet av differentialekvationer och integralekvationer tenderade att bli mycket tekniskt och det var svårt att se de bärande idéerna. Genom abstrakta teorier ökar överskådligheten och generaliteten i resonemangen tydliggörs. Samtidigt minskar naturligtvis konkretionen. Ett centralt begrepp är linjära rum och den teori som nu kallas *linjär algebra*. Redan Hamilton hade i mitten av 1800-talet infört vektorbegreppet och generaliseringar till högre dimensioner finns hos bl.a. Sylvester och Cayley i slutet av 1800-talet. Man började studera linjära rum där elementen är funktioner av en eller flera reella eller komplexa variabler och de rummen är ofta oändligtdimensionella. Ett exempel får antyda hur teorier från den linjär algebran kan kopplas till differentialekvationer. Om u är funktion av tre variabler så avbildas den genom t.ex.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

på en ny funktion av tre variabler. Om vi sätter

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

så kallar vi Δ för en differentialoperator som definierar en linjär avbildning $u \longrightarrow \Delta u$. Undersökningar av differentialekvationer kan överföras till undersökningar av differentialoperatorer som i sin tur är avbildningar av ett linjärt rum av funktioner. Om differentialoperatorerna definierar linjära avbildningar så kallas motsvarande differentialekvationer linjära.

Teorin för ändligtdimensionella rum har som vi nämnt sina rötter i bl.a. Cayleys och Sylvesters arbeten och ingår nu i grundläggande kurser på universitetsnivå. Det förefaller rimligt att försöka utvidga den teorin till oändligtdimensionella rum. Generaliseringen är inte problemfri men låter sig till stora delar göras med nödvändiga modifikationer. Under de två första decennierna av 1900-talet banade arbeten om integralekvationer av bl.a. den svenske matematikern **Ivar Fredholm** och framför allt av David Hilbert väg för det område inom matematiken som idag kallas *funktionalanalys*. En av pionjärerna var den polske matematikern **Stefan Banach**. Hans doktorsavhandling *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations integrals* (”Om operationer på abstrakta mängder och deras tillämpningar på integralekvationer”) från 1920 anses av somliga markera funktionalanalysen födelse. Hans bok *Théorie des opérations linéaires* (”Teori om linjära operatorer”) från 1932 har blivit en klassiker. Redan i avhandlingen finns det som vi idag kallar Banachrum och som spelar en stor roll i modern matematik. År 1929 publicerade John von Neumann arbeten om operatorer på Hilbertrum som skulle få stor betydelse inte minst inom kvantmekaniken. Definitionerna på dessa båda typer av linjära rum är tekniska men mycket förenklat kan man säga att skillnaden är att i ett Banachrum har varje vektor en längd medan man i ett Hilbertrum dessutom kan tala om vinklar mellan vektorer.

10.3.3 Topologin blir en viktig del av matematiken

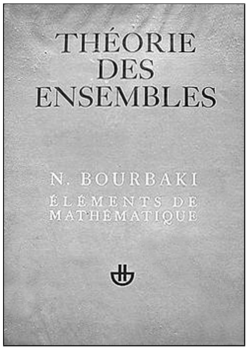
Kring sekelskiftet publicerade den franske matematikern Henri Poincaré ett antal artiklar kring det han kallade *Analysis Situs* och som nu kallas *topologi*. Han framhöll att studier av differentialekvationer och multipelintegraler alltid lett honom till just topologi. I artiklarna utarbetade han metoder för att karakterisera mångfalder av olika dimensioner. En yta i rummet är en 2-mångfald. De punkter i det fyrdimensionella rummet som karakteriseras av att $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$ där f är en reellvärd funktion av fyra reella variabler med vissa egenskaper är exempel på en en 3-mångfald. Två n-mångfalder kallas *homeomorfa* om det finns en kontinuerlig 1:1-avbildning med kontinuerlig invers mellan dem. Med hjälp av algebraiska metoder kunde Poincaré karakterisera alla 2-mångfalder. Varje tvåmångfald är homeomorf med en sfär med ett antal handtag. Differentialgeometri handlar om studiet av mångfalder och hos t.ex. Gauss handlar det konkret om ytor i rummet. I *Über die Hypotesen, welche Geometrie zu Grunde liegen* från 1854 utvidgar Riemann diskussionen till mångfalder av högre dimension och han skisserar också hur man kan införa avståndsbegrepp på dem. Medan Gauss och Riemann studerar krökningen i enstaka punkter i en mångfald och hur man bestämmer avstånd längs olika kurvor i mångfalden så studerar Poincaré i sina arbeten kring sekelskiftet hur mångfalderna uppför sig globalt, t.ex. hur många ”hål” de har. Begrepp som mångfald, avstånd och kontinuitet är centrala. En systematisk framställning av topologiska och metriska rum utformades av den tyske matematikern **Felix Hausdorff** i *Grundzüge der Mengenlehre* från 1914. Det är idéerna i detta verk som ligger till grund för dagens framställning av allmänna topologiska rum och metriska rum. I ett metriskt rum finns ett avståndsbegrepp som uppfyller naturliga villkor. Ett allmänt topologiskt rum behöver inte ha något avståndsbegrepp. Där är begreppet omgivning till en punkt centralt och man kan definiera begreppet kontinuitet av funktioner mellan topologiska rum.

10.3.4 En allmän utveckling mot ökad abstraktion

Utvecklingen mot ökad abstraktion kännetecknade också områden som algebra och talteori. Vi nämnde att Dirichlet införde begreppet ideal inom klassisk talteori. Den tyska matematikern **Emmy Noether** utvecklade dessa tankegångar ytterligare. Hon införde och karakteriserade ideal i godtyckliga ringar. Gränserna mellan algebra, geometri, analys och topologi suddades ut och det skapades nya områden som algebraisk geometri, algebraisk topologi, homologisk algebra och funktionalanalys. Nya begrepp med fantasieggande namn infördes som kärvar och fibrerade rum. Ledande namn i den utvecklingen har varit bl.a. **Jean-Pierre Serre** (1926–) och **Alexander Grothendieck** (1928–2014). Ett försök till endast en ytlig beskrivning av den verksamheten ligger utanför både målsättningen för denna bok och författarens matematiska kunskapsnivå.

10.3.5 Fenomenet Bourbaki

Vi har sett hur abstrakta matematiska begrepp vuxit fram ur en konkret problematik. Lösningarna till de konkreta problemen blir svåröverskådliga och abstrakta teorier, som i regel byggs upp axiomatiskt, tydliggör de bärande idéerna. Vid universitetet i Strasbourg tjänstgjorde under 1930-talet två unga matematiker **Henri Cartan** och **André Weil**. De var missnöjda med matematikutbildningen vid universitetet som de ansåg otidsenlig. En åldrande lärarkår undervisade med hjälp av omoderna läroböcker. De båda matematikerna beslöt sig för att förändra situationen. De tog kontakt med kollegor i Paris och det bildades en grupp som skulle utforma en serie matematiska skrifter som skulle ta hänsyn till de nya strömningarna. Utgångspunkten var att gå från det abstrakta till det konkreta. Gruppen tog sig namnet **Nicolas Bourbaki** efter en fransk general som deltog i fransk-tyska kriget 1870–1. De höll regelbundna möten som kunde vara i flera dagar och mötena var ofta kaotiska. De avstod medvetet från att utnämna en ordförande och det innebar att medlemmar ofta talade i munnen på varandra. Alla beslut skulle tas in plena och det innebar att verksamheten drog ut på tiden. Man enades tillslut om att ge ett en serie böcker där den logiska ordningen var: I. Mängdlära, II. Algebra, III. Topologi, IV. Funktioner av en reell variabel, IV. Topologiska vektorrum, V. Integration. Det innebar inte att böckerna skrevs i samma ordning. Serien hade en viss betydelse för den högre utbildningen i matematik under några decennier. Den syn på matematiken som Bourbaki företrädde smittade också av sig på den elementära matematikundervisningen genom det som kom att kallas ”den nya matematiken”. Projektet hade uppenbara nackdelar. Grundläggande kunskaper om reellvärda funktioner behandlas först efter mängdlära, algebraiska strukturer som grupper, ringar och kroppar samt topologiska grundbegrepp. Den euklidiska geometrin med sin rika flora av problem får en marginell roll. En av de tongivande medlemmarna **Jean Dieudonné** uttryckte det på följande sätt: ”Det är välkänt att euklidisk geometri är ett specialfall av teorin för Hermiteska operatorer på Hilbertrum.”.



Figur 10.5: Till vänster visas ett foto av en grupp medlemmar i Bourbaki under en konferens 1938 med bl.a. Simone Weil, Charles Pisot, André Weil, Jean Dieudonné, Claude Chabauty och Jena Delsarte. Till höger visas första delen av *Èlements de mathématique*. (Bild: `3ORWHCf`)

Under 1970-talet avtog verksamheten men gruppen är fortfarande verksam men med andra medlemmar. En av reglerna var att en ledamot skulle avgå när hon eller han fyller femtio år. Nicolas Bourbaki själv har fyllt sjuttio år. Han är inte längre så aktuell som under 1950- och 1960-talen men har fortfarande sina beundrare. Många är emellertid skeptiska till möjligheten till deras plan att ge en hierarkisk framställning av matematiken. Ny matematik skapas ständigt och det kräver förändringar av grundläggande teorier. Men Bourbaki har utan tvekan haft betydelse både för matematiken och för matematikundervisning. En grundläggande frågeställning i matematikundervisning är hur man skall förhålla sig till införandet av nya abstrakta begrepp. Det verkar naturligt att gå från det konkreta till det abstrakta. Utan förankring i bekanta begrepp kan man inte rimligen tillgodogöra sig nya begrepp. Men tesen kan inte drivas för långt. Ett tidigt införande av abstrakta begrepp kan förenkla resonemangen och göra bilden tydligare. Genom sin extrema hållning har Bourbaki visat på både fördelar och nackdelar i en strikt hierarkisk framställning av matematiken.

Hänvisningar till del 2 Linjära rum behandlas i avsnitt 14.7.5 och abstrakt algebra i avsnitt 14.8. Vågekvationen, värmeledningsekvationen och Laplaces ekvation behandlas i avsnitt 15.7.2. Avsnitt 15.9 ägnas åt analysens utveckling under 1900-talet.

10.4 Sannolikhetslära och statistik

Statistiken har sitt ursprung inom samhällsvetenskapen. Genom kvantitativa data som struktureras så att det blir möjligt att skapa överblick och se trender har politiker fått ett verktyg för att genomföra lämpliga åtgärder. Men statistiken kom under 1800-talet att användas inom många andra områden inte minst inom naturvetenskap och medicin. Genom upprepade observationer av ett fenomen kan man se nya samband och pröva redan etablerade. Observationerna är av olika skäl behäftade med fel och man kan inte vänta sig en exakt överensstämmelse med teorierna.

Statistik kom alltså att användas i många olika sammanhang och det reser frågor. Hur säker kan man vara på att de slutsatser man drar av det statistiska materialet är sanna? Statistiken saknade en teoretisk bas. En av pionjärerna i arbetet med att ge statistiken säkrare grundvalar var **Ronald Fisher**. Han var under drygt tio år anställd som statistiker vid Rothamsted Agricultural Experiment Station – det äldsta institutet för jordbruksforskning i Storbritannien. I inledningen till arbetet *Statistical Methods for Research Workers* från 1925 framhåller han att statistik skall betraktas som en del av tillämpad matematik. De gemensamma dragen i många tillämpningar har ofta förbisetts mycket beroende på att man försummat att utveckla den underliggande matematiska teorin.

Inom statistiken handlar det om att dra slutsatser utifrån information som är ofullständig. För att studera en stor population måste man göra ett hanterligt urval, för att studera ett kontinuerligt förlopp kan man endast göra ett begränsat antal observationer och för att få en överblick över stora informationsmängder vill man förse dem med karakteristiska mått. Ur de data man på detta sätt skaffat sig vill man dra mer generella slutsatser. Det är då väsentligt att på något sätt mäta sannolikheten för att slutsatserna skall vara sanna. Sannolikhetsteorin blir den naturliga matematiska grunden för statistiken.

Sannolikhetsläran har, som den behandlats av Fermat, Pascal, Bernoulli, de Moivre och Laplace, huvudsakligen ägnats åt problem inom hasardspel även om det förekommer undantag. Antalet utfall har i de allra flesta fall varit ändligt. Visserligen arbetade t.ex. de Moivre med oändliga utfallsrum och oändliga serier men utfallsrummen var alltid diskreta och innehöll aldrig ett helt intervall. I verkligheten ställs ofta andra krav. Sannolikhetsläran måste omformuleras så att den kan användas i mer generella sammanhang.

Den ryske matematikern **Andrej Kolmogorov**, som var professor i Moskva, presenterade i ett arbete *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* (”Sannolikhetslärans grundbegrepp”) från 1933 en axiomatisk och strikt framställning av sannolikhetsläran. Den svenske statistikern **Harald Cramér** (1893–1985) utgav tolv år senare ett klassiskt verk *Mathematical Methods of Statistics* där han bygger upp en matematisk teori för statistik där Kolmogorovs teori är basen.

Den matematiska teori för statistik, som kulminerade med Cramérs bok, bygger på att försök kan upprepas och att de relativa frekvenserna stabiliseras efter ett stort antal upprepningar. Men när vi i dagligt tal använder ordet ”sannolikhet” eller ”chans” har det oftast en betydligt vagare betydelse. Det finns händelser som vi inte kan upprepa men som vi betraktar som mer eller mindre sannolika och där vi ofta ger ett mått på sannolikheten. Att en kärnkraftsolycka inträffar med en viss procents sannolikhet är inte möjligt att verifiera vare sig genom antagandet om likformighet eller genom att utföra upprepade försök. När en läkare ger en diagnos så är det alltid med en viss osäkerhet och den anges ibland med ett tal mellan 0 och 1. Bakom diagnosen ligger ofta en kombination av medicinsk kunskap och erfarenhet, men man kan knappast tala om att sannolikhetsmåttet har sin grund i upprepade försök och stabiliteten hos de relativa frekvenserna. Karakteristiskt för denna typ av sannolikhetsbedömningar är att de förändras när informationen ökar.

En som tidigt kritiserade det snäva sannolikhetsbegrepp som det presenterades inom matematiken var **John Maynard Keynes** – en engelsk ekonom vars teorier användes av **Franklin D. Roosevelt** i det ekonomiska program *The New Deal* som skulle råda bot mot USA:s kris efter den stora börskraschen. Keynes intresserade sig inte bara för ekonomi utan för en rad andra områden. I arbetet *A Treatise on Probability* från 1921 pläderar han för en teori med ett vidare sannolikhetsbegrepp och han betraktar denna sannolikhetsteori som en del av logiken. Varje påstående tilldelas en viss sannolikhet – ett tal mellan 0 och 1. Om påståendet under alla omständigheter är felaktigt så har det sannolikheten 0 om det är oomtvistligt har det sannolikheten 1. Påståendet ”3 är större än 4” har sannolikheten 0 och ”3 är mindre än 4” sannolikheten 1. De flesta uttalanden vi gör tillhör inte någon av dessa kategorier. Sannolikheten ligger någonstans mellan de båda ytterligheterna. Keynes skisserade en ny teori för ett mer generellt sannolikhetsbegrepp där sannolikhet innebär graden av övertygelse. Den tolkning av sannolikhetsbegreppet som Keynes förespråkar kallas subjektiv. Sannolikhet är en grad av övertygelse och den modifieras med hänsyn till graden av kunskap. En strikt matematisk uppbyggnad av denna teori är abstrakt och tekniskt avancerad. Tankegångar från den engelske prästen och matematikern Thomas Bayes i hans arbete *Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances* som gavs ut postumt 1764 spelar en stor roll.

I dagens samhälle är både sannolikhetsläran och statistiken mer närvarande än någonsin. Datoriseringen har inneburit att det är möjligt att snabbt behandla stora datamängder. Den har också ökat möjligheterna att ge pedagogiska presentationer av resultaten, något som redan Florence Nightingale insåg vikten av. Ett närliggande exempel är den svenske läkaren och statistikern **Hans Rosling** (1948–2017) som har lett utvecklingen av en programvara, *Gapminder*, som visar hur folkhälsan förändrats globalt över långa tidsperioder. Vi konfronteras dagligen med prognoser som bygger på statistiska undersökningar och sannolikhetsberäkningar. Det kan gälla marknadsundersökningar, opinionsmätningar, väderleksutsikter och instrument för att förutse utvecklingen på börsen. Statistiska metoder används vid mätningar inom alla vetenskaper från humaniora till naturvetenskap och medicin. Sannolikhetsbegreppet är centralt inte bara i statistisk metodik utan också i den del av fysiken – kvantmekaniken – som utforskar naturens innersta byggstenar. Statistik och sannolikhetslära har både blivit en viktig medborgarkunskap och ett oumbärligt redskap för specialister inom vitt skilda områden.

Hänvisningar till del 2 Subjektiva sannolikheter behandlas i avsnitt 16.1.7, Kolmogorovs axiomsystem i avsnitt 16.1.8 och Roslings *Gapminder* i avsnitt 16.2.5.

10.5 Matematiken får fler tillämpningsområden

Fysiken har under sekler varit matematikens viktigaste och nästan enda tillämpningsområde. Under 1900-talet kom förhållandena att förändras. Fortfarande är naturligtvis fysiken en viktig tillämpning, kanske den viktigaste, men utvecklingen av nya teorier, datoriseringen och statistikens utveckling innebär att matematiken blir ett redskap inom allt fler ämnesområden. Vi har tidigare nämnt linjär programmering som användes för optimering i många olika sammanhang ofta med företagsekonomisk anknytning. Optimeringsteori är en ny gren av matematik och behandlar problem där de ingående funktionerna inte behöver vara linjära. Inom nationalekonomin utvecklas matematiska modeller av bl.a. engelsmännen John Maynard Keynes och **Frank Plumpton Ramsay**. John von Neumann och **Oskar Morgenstern** publicerade 1944 ett epokgörande verk *Theory of Games and Economic Behaviour*. Inom biologin utarbetade den italienske matematikern **Vito Volterra** (1860–1940) under början av 1920-talet modeller som beskriver utvecklingen av djurarter som lever tillsammans och är beroende av varandra. Alan Turing intresserade sig för biologiska och medicinska tillämpningar av matematiken och gav 1952 ut ett arbete om utvecklingen av mönster och former hos levande organismer.

Den nya informationsteknologin har inneburit att matematiken fått allt fler tillämpningsområden men utvecklingen av den kräver också speciella matematiska kunskaper. Det gäller inte minst säkerhetsaspekten, som ställer ökade krav på kryptering och kodning, som i sin tur kräver kunskaper inom bl.a. talteori. Den matematik som har stor betydelse för informationsteknikens utveckling har fått namnet Diskret matematik och innehåller klassiska områden som logik, kombinatorik och talteori men också mängdlära, abstrakt algebra, grafteori samt algoritm- och komplexitetsteori.

10.6 Lösta och olösta problem

Enligt Nationalencyklopedin är matematik ”en abstrakt vetenskap för problemlösning och metodutveckling”. Problem och problemlösning är centrala i matematiken och David Hilbert skriver i sitt berömda anförande från Internationella matematikerkongressen i Paris 1900:

> ”Den stora betydelse speciella problem har för matematikens framsteg i allmänhet och den viktiga roll de spelar för den enskilde forskaren kan inte förnekas. Så länge ett vetenskapsområde erbjuder ett överflöd av problem, så länge är det levande; brist på problem förebådar ett utdöende eller ett upphörande av en oberoende utveckling. Precis som varje mänskligt företag drivs av speciella objekt, så behöver matematiken sina problem. Det är genom att lösa problem som forskarens förmåga utmanas; han finner nya metoder och utblickar och hans horisont blir friare och vidare.
>
> Det är svårt och ofta omöjligt att bedöma värdet av ett problem i förväg; för den slutliga belöningen beror på den vinst vetenskapen fått från problemet. Vi kan ändå fråga oss om det finns generella kriterier som utmärker ett bra matematiskt problem. En gammal fransk matematiker sade: ”En matematisk teori kan inte anses vara färdig förrän den är så klar att du kan förklara den för första person du möter på gatan.”. Den klarhet och lättförståelighet som här hävdas skola gälla för en matematisk teori vill jag i ännu högre grad kräva av

> ett matematiskt problem om det skall vara perfekt; för det som är klart och lätt att förstå attraherar oss, det komplicerade stöter bort oss.
>
> Dessutom bör ett matematiskt problem vara svårt så att det utmanar oss, men ändå inte fullständigt oåtkomligt, för att inte trotsa våra ansträngningar. Det skall vara en vägvisare på den slingrande vägen mot fördolda sanningar och till sist en erinran om vår tillfredsställelse över den lyckosamma lösningen.”

10.6.1 Hilberts sjunde problem

Hilberts föreläsning utmynnade i 23 problem som han ansåg skulle ha stor betydelse för matematikens utveckling. Vi har tidigare nämnt två – kontinuumhypotesen samt fullständigheten och motsägelsefriheten av ett axiomsystem för aritmetiken. De har båda fått ett svar men har också givit upphov till frågor. Problemen har fördjupat och fördjupar den matematiska kunskapen. Hilbert poängterar vikten av förenkling. Problemen skall kunna förstås av så många som möjligt. Att förklara de 23 problemen för ”den första person man möter på gatan” är naturligtvis inte möjligt, om man inte till äventyrs råkar möta en person med hög matematisk utbildning. Ett så ambitiöst mål är antagligen omöjligt att uppnå om man samtidigt önskar att problemet skall förnya den matematiska forskningen. De flesta av de 23 problemen kräver en hel del bakgrundskunskap för att kunna förstås. Vi skall ta upp ett av dem – det sjunde. Det lyder på följande sätt:

> ”Talet α^β där basen α är algebraisk och exponenten β är irrationell och algebraisk är alltid transcendent eller åtminstone irrationellt. Det skulle innebära att t.ex. $2^{\sqrt{2}}$ och $e^\pi = i^{-2i}$ är transcendenta eller åtminstone irrationella.”

Hilbert säger att lösningen av detta och liknande problem måste leda till utveckling av nya metoder och ny insikt i irrationella och transcendenta tals natur. Påståendet visades 1934 av den ryske matematikern **Aleksander Gelfond** och oberoende av honom av **Theodor Schneider** ett år senare. Satsen kallas nu *Gelfond-Schneiders sats* och Hilberts förmodan att α^β är transcendent är riktig. På 1960-talet bevisade den engelske matematikern **Alan Baker** en långtgående generalisering av Gelfond-Schneiders sats som innebar att man kan identifiera en lång rad av hittills okända transcendenta tal och han visade också hur den underliggande teorin kunde användas för att lösa ett brett område av diofantiska ekvationer.

10.6.2 Fyrfärgsproblemet

Ett problem som gäckat många under en längre tid finns inte med bland Hilberts problem. Det formulerades av en ung engelsk matematiker 1852 och det uppfyller med råge kravet att problemet kan förstås men inte lösas av gemene man. **Francis Guthrie** försökte färglägga Englands grevskap så att två grevskap som gränsar till varandra inte har samma färg. Han upptäckte då att det räckte med fyra färger och frågade sig om det var så generellt. Francis vidarebefordrade frågan till sin bror Frederick som var elev till de Morgan, som i sin tur vidarebefordrade det till Hamilton. Fler försök att bevisa påståendet gjordes men det verkar inte som om någon av den tidens stora matematiker, trots att kända matematiker som de Morgan, Hamilton och Cayley kände till det, gjorde några allvarliga försök.

Engelsmannen **Alfred Kempe** ansåg sig ha bevisat Guthries förmodan 1879 i en artikel *On the Geographical Problem of the Four Colours* i *American Journal of Mathematics* och året efter publicerade fysikern **Peter Guthrie Tait** ett bevis. Elva år senare hittade **Percy**

Figur 10.6: En karta över USA:s delstater. Läsaren kan själv försöka färglägga staterna med bara fyra färger för att komma in i problemställningen. En möjlig sådan färgläggning finns på Internet http://olleh.se/start/teori/teori-grafer.htm. (Bild: 2UU0Ph2)

Heawood ett fel i Kempes bevis och fyrfärgsproblemet var fortfarande olöst. Heawood visade emellertid att fem färger räcker. Den danske matematikern **Julius Petersen** visade 1891 att också Taits bevis var felaktigt.

Fyrfärgsproblemet kan översättas till ett problem om grafer. De olika länderna svarar mot noderna och det finns en kant mellan två noder om motsvarande länder har en del av en gräns gemensam. Omformuleringen för tankarna till Eulers behandling av broarna i Königsberg. Även om om Kempes och Taits bevis var felaktiga så utvecklade de grafteorin som nu är en viktig del av det som kallas *diskret matematik* och som utgör en matematisk grund för datavetenskap.

Fyrfärgsproblemet fick en lösning 1976. De två matematikerna **Kenneth Appel** och **Wolfgang Haken** som båda var verksamma vid University of Illinois visade att Guthries förmodan var riktig. Det räcker med fyra färger för att färglägga noderna i en plan graf så att två noder som förbinds med en kant aldrig har samma färg. De kunde visa att om det fanns ett motexempel så skulle det finnas bland 1 936 konfigurationer. Det räcker alltså att visa att påståendet för dessa. Att göra det ”för hand” är orimligt och de utnyttjade en dator för undersökningarna. Det tog datorn över tusen timmar att göra kontrollerna. Beviset har sedan ”förenklats” så att antalet fall som skall kontrolleras reducerats till drygt 600.

Beviset har varit och är fortfarande kontroversiellt. Det var första gången ett matematiskt bevis genomfördes med hjälp av en dator. Komplexiteten är stor och det var svårt att få någon överblick. Beviset underlättade knappast förståelsen för satsen. Efter hand har det accepterats och beviset har förenklats även om man ännu inte klarat sig utan datorhjälp.

10.6.3 Ett problem om Fourierserier

Fourier påstod att varje funktion kan skrivas som en oändlig summa av trigonometriska funktioner, en s.k. Fourierserie. Om $f(x)$ är en godtycklig periodisk funktion med perioden 2π så är enligt Fourier

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

med fourierkoefficienterna

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \quad \text{och} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x.$$

Vi vet nu att Fourier var alltför optimistisk men i början av 1800-talet var inte funktionsbegreppet definierat och begrepp som gränsvärde och kontinuitet hade inte givits en precis innebörd. Vi har nämnt hur Weierstrass med hjälp av en trigonometrisk serie konstruerade en funktion som visserligen är kontinuerlig men som inte har derivata i någon punkt. Det visade sig också att det finns Fourierserier som konvergerar mot funktioner som inte är integrerbara i Riemanns mening. Frågor kring Fourierseriers konvergens har sysselsatt matematiker sedan Fourier införde dem i början av 1800-talet.

I studierna av Fourierserier visade sig Riemanns integralbegrepp vara otillräckligt. Det var alltför begränsat. Det var svårt att hantera gräns-övergångar då en gränsfunktion av en följd av funktioner inte alltid är integrerbar även om följdens funktioner är det. I en berömd artikel från 1901 med titeln *Sur une généralisation de l'intégrale définie* (”Om en generalisation av bestämd integral”) i den franska tidskriften *Comptes Rendus* generaliserade den franske matematikern **Henri Lebesgue** (1875–1941) Riemanns integralbegrepp så att många av svårigheterna hos det gamla begreppet eliminerades. Ett centralt begrepp i den nya teorin är begreppet ”nästan överallt”. Två funktioner säges vara lika nästan överallt om de bara skiljer sig åt i en punktmängd med måttet 0. Det är omöjligt att här ge en exakt definition av vad det innebär att en mängd har måttet 0 men några exempel ger en uppfattning om vad det rör sig om. En ändlig mängd punkter har naturligtvis måttet 0 och det har också en uppräknelig mängd t.ex. de rationella talen. Ett intervall har däremot inte måttet 0. I Riemanns mening är de rationella talen inte mätbara men de är det enligt Lebesques.

Fourierserier visar sig vara mycket användbara i olika sammanhang, t.ex. när det gäller att lösa olika typer av differentialekvationer. Man har visat olika kriterier på funktionen f så att dess Fourierserie konvergerar mot f och man har formulerat och bevisat samband mellan funktionen och dess Fourierkoefficienter. Ett viktigt samband, som går tillbaka till ett arbete från 1799 av den franske matematikern **Antoine Parseval**, är

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)^2\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

som nu kallas *Parsevals formel*. Sambandet förutsätter naturligtvis att integralen till vänster existerar. Funktionen får inte växa alltför snabbt kring någon punkt om integralen skall bli ändlig. Den ryske matematikern **Nikolai Luzin** framförde 1913 följande förmodan:

> Om funktionen f är kvadratiskt integrerar i Lebesgues mening så konvergerar f:s Fourierserie punktvis mot f nästan överallt.

En matematiker som inte trodde på Luzins förmodan var **Antoni Zygmund**. Han var född i Polen men utvandrade till USA 1940 och blev 1947 professor vid universitetet i Chicago. Han var en av den tidens främste specialister på trigonometriska serier. Zygmund försökte konstruera ett motexempel – en funktion som är kvadratiskt integrerar men vars fourierserie inte konvergerar. Under åren 1950–1 var han gästprofessor vid Harvard university och träffade den unge svenske matematikern **Lennart Carleson** som nyss disputerat i Uppsala. Carleson följde Zygmunds seminarier och hade själv tankar om hur man skulle konstruera ett motexempel. Zygmund blev imponerad och uppmuntrade honom att utveckla sina idéer.

Carleson blev 1954 professor i Uppsala. Hans forskning kretsade kring svåra problem som många matematiker misslyckats lösa och han löste några av dem. Luzins förmodan arbetade han med från och till. Han har själv beskrivit sitt arbete på följande sätt i en intervju 2001:

> ”Den stora auktoriteten var då Zygmund och han var fullständigt övertygad om att vad man skulle göra var inte ett bevis utan ett motexempel. När jag var ung student i USA träffade jag Zygmund och hade en idé om hur man skulle konstruera komplicerade motexempel och Zygmund uppmuntrade mig att göra det. Jag funderade från och till i ungefär 15 år på hur man skulle få dessa motexempel att fungera och det intressanta hände att jag insåg varför det skulle finns ett motexempel och hur man skulle konstruera det. Jag trodde att jag verkligen förstod bakgrunden och till min förvåning kunde jag bevisa att detta motexempel inte existerade och plötsligt insåg jag att jag skulle försöka göra det motsatta, vilket inte just då var opportunt, nämligen att visa förmodan. Den viktigaste aspekten på matematisk problemlösning är övertygelsen om vilket som är det korrekta resultatet. Därefter tog det mig 2 till 3 år genom att använda den teknik jag utvecklat under cirka 20 år.”

Carleson presenterade sitt bevis för Luzins förmodan vid den internationella matematikerkonferensen i Moskva 1966. Det väckte naturligtvis stort uppseende och Lennart Carleson fick för detta arbete och några andra några av matematikvärldens mest prestigefulla priser.

Naturligtvis är det av stort intresse att ett problem som gäckat matematiker i decennier får en lösning och naturligtvis är det en stor prestation att kunna genomföra ett så komplicerat bevis som det här är frågan om. Men själva arbetet har också genererat metoder som i sin tur utvecklats och som är användbara i många andra sammanhang. Metoderna som Carleson utvecklade är minst lika värdefulla som de satser han bevisade.

10.6.4 Fermats gåta

Det var 1637 som Pierre Fermat vid läsningen av Diofantos *Arithmetica* formulerade det som kallas *Fermats gåta* eller *Fermats stora sats*. Den säger att om n är ett heltal som är större än 2 så saknar ekvationen

$$x^n + y^n = z^n$$

positiva heltalslösningen. I marginalen till Diofantos arbete skrev han att han hittat ett underbart bevis för satsen men att han inte fick plats med det för marginalen var för liten. Sedan dess har många matematiker och många av de allra främsta försökt visa påståendet. Fermat visade påståendet för $n = 4$, Euler, Legendre m.fl. visade påståendet för $n = 3$ och $n = 4$, Legendre och Dirichlet visade den för $n = 5$ och **Gabriel Lamé** (1795–1870) visade den för $n = 7$. Arbetet med att hitta ett bevis resulterade många gånger i upptäckter av nya samband och utveckling av nya metoder inom talteorin.

I juni 1993 gav Andrew Wiles en serie föreläsningar om modern algebra i Cambridge. Wiles är engelsman men var då och är fortfarande professor i matematik i Princeton. Den sista lektionen hölls 23 juni och ryktet hade gått att han skulle presentera något sensationellt.

Föreläsningssalen var fylld och Wiles visade en avancerad sats som i sin tur medförde Fermats stora sats. Det var en sensation inte bara bland matematiker. *New York Times* och många andra publicerade en artikel om händelsen. Nu skulle Wiles arbete publiceras i en vetenskaplig tidskrift men först skulle det granskas av experter. Det visade sig att beviset innehöll vad som då verkade vara ett smärre fel. Wiles började arbeta med att rätta till det men fann att det var allvarligare än han från början trott. Han arbetade hårt i över ett år och hade nästan givit upp. Han skulle göra ett sista försök och den 19 september 1994 såg han plötsligt lösningen framför sig. Han beskriver detta på följande sätt:

> ”. . . plötsligt, totalt oväntat, fick jag denna otroliga uppenbarelse. Det var det viktigaste ögonblicket i mitt yrkesliv. Ingenting som jag någonsin kommer att återuppleva . . . det var så obeskrivligt vackert och så elegant, och jag bara betraktade det misstänksamt i tjugo minuter, sedan gick jag under dagen omkring på institutionen. Jag kom gång på gång tillbaka till mitt skrivbord för att se om det fortfarande fanns där . . . och det fanns där.”

Denna gång klarade beviset experternas granskningar och det publicerades 1995 i *Annals of Mathematics* i artikeln *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*. Beviset är mycket komplicerat och använder tekniker från talteori, algebraisk geometri, gruppteori, kommutativ algebra och Galoisteori. Central är Taniyama-Shimuras förmodan från 1953 som gjordes av de japanska matematikerna **Ytaka Taniyama** och **Goro Shimura** och som handlar om elliptiska kurvor och s.k. modulära former. Wiles visade förmodan för en speciell typ av elliptiska kurvor och det räckte för att kunna visa Fermats förmodan.

Lösningarna av problemen i 10.7.2, 10.7.2 och 10.7.4 är komplicerade. De bevis som presenteras är inte utan vidare tillgängliga ens för utbildade matematiker och ett av dem kräver datorhjälp. Vi får lita till de experter som granskat bevisen. Det pågår förmodligen ett arbete att förenkla dem och göra dem mer transparenta. Det troliga är att nya abstrakta begrepp och teorier skapas som tydliggör tankegångarna och gör dem tillgängliga för flera.

10.6.5 Några ännu olösta problem

Några klassiska problem har lösts under det senaste århundradet men några är olösta och vi skall nämna tre. Två är enkla att formulera och de handlar båda om primtal. Det ena är Goldbachs förmodan som säger att varje positivt jämnt tal större 2 kan skrivas som summan av två primtal och och det andra är frågan om antalet primtalstvillingar är ändligt eller oändligt. Den fråga som många matematiker kanske anser som mest central finns med på Hilberts lista och berör också primtalen. Det är Riemanns hypotes att alla nollställen till zeta-funktionen

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

har realdelen $1/2$.

Nya tillämpningsområden kräver ny matematisk metodik som också leder till problemställningar som innebär att begrepp måste analyseras och kunskaperna om dem fördjupas. Så har t.ex. datavetenskapen aktualiserat områden som algoritm- och komplexitetsteori där frågan om varje problem av typ *NP* också är av typ *P* är obesvarad. Men det är inte bara tillämpningar som förnyar och utvecklar matematiken. Kanske minst lika stor betydelse har arbetet med interna matematiska problem som t.ex. Riemanns hypotes, Godbachs förmodan och antalet primtalstvillingar. Arbetet med svåra matematiska problem kan leda till nya fruktbara teorier som i sin tur kan ge upphov till nya problem som kräver att nya teorier utvecklas o.s.v. Så kan matematiken hela tiden utvecklas.

10.7 Ökat intresse för matematikundervisning

Vi har huvudsakligen beskrivit utvecklingen av forskningen i matematik; hur problem får sin lösning och hur nya begrepp, metoder och teorier skapas. Men det finns en annan sida av matematiken som vi endast berört marginellt och det är hur den kunskapsmassa som utvecklats skall traderas. Delar av matematiken är oundgänglig för att kunna fungera som medborgare i dagens samhälle. Olika yrken kräver olika typer av matematikkunskaper och den professionelle matematikern behöver ofta någon form av vägledning för att komma till forskningsfronten av sitt intresseområde. Hur skall matematikutbildningen utformas på olika nivåer i utbildningssystemet för att bäst möta både samhällets och individens krav?

Matematikundervisningen har en lång historia. Många av de babyloniska lertavlorna var med största säkerhet övningsexempel för elever. I gamla Egypten fanns skolor som invigde utvalda elever i matematiska metoder. Under antiken fanns akademier och lycéer. De första tryckta läromedlen i västerlandet gavs ut under medeltiden och de är i första hand inriktade mot grundläggande aritmetik. Euklides *Elementa* var standardverket inom undervisningen i geometri, den andra av de två ursprungliga delarna av matematiken. Läromedlen utvecklades under 1600-, 1700- och 1800-talet för att möta de pedagogiska krav som successivt växte fram då allt större delar av befolkningen måste lära sig grundläggande aritmetik. Men det arbetet var till stor del oberoende av den matematiska vetenskapens utveckling. Forskarna i matematik ägnade som regel inte så stort intresse åt matematikundervisning i allmänhet och elementarundervisningen i synnerhet.

Slutet av 1800-talet och framför allt 1900-talet innebar en förändring. Den tyske matematikern Felix Klein, som byggde upp ett världsledande matematiskt forskningscentrum i Göttingen, intresserade sig för och tog aktivt del i utformningen av matematikutbildningen i skolan. Han förespråkade en modernisering av matematikundervisningen och spelade en avgörande roll vid utarbetandet av de nya kursplaner i matematik som trädde i kraft 1905. En av de förändringar han fick till stånd var att funktionsbegreppet samt grundläggande differential- och integralkalkyl skulle ingå i gymnasieskolans matematikkurser. I samband med den internationella matematikerkongressen i Rom 1908 bildades International Commission of Mathematical Instruction (ICME) och Felix Klein var dess förste ordförande. Var fjärde år arrangerar ICME en stor internationell kongress där matematikutbildning belyses och diskuteras.

Innehållet och hur de olika momenten skall följa på varandra är en viktig del matematikutbildningen. Men hur skall innehållet läras ut? Hur skall det presenteras? Hur uppfattas det av eleverna? Hur tacklar man matematiska problem? Hur uppnår man och vad är matematisk förståelse? Det är frågor som är viktiga för varje lärare. Två franska matematiker Henri Poincaré och Jacques Hadamard funderade över hur de själva hade kommit till matematisk insikt. I en föreläsning med titeln *Matematiskt nyskapande* som Poincaré gav vid l'Institute Général Psychologique i Paris reflekterar han över de tankeprocesser som lett till hans matematiska upptäckter. Hadamard gav 1945 ut boken *The psychology of invention in the mathematical field*.

Problemlösning är en central del i all matematikundervisning. En speciell ställning inom det området har den ungerskfödde matematikern **George Pólya**. I en rad böcker analyserar han problemlösningsprocesser och gav i samband med det exempel på lämpliga strategier. Det är hans erfarenheter från akademisk undervisning som ligger till grund för hans arbeten. Boken *How to solve it* från 1945 riktar sig emellertid till lärare och elever på alla nivåer. Boken har sålts i över en miljon exemplar och är översatt till över 15 språk. Amerikanen **Alan**

Schoenfield, som bedriver forskning kring matematikutbildning, säger om boken:

> ”För matematikutbildning och för problemlösning i allmänhet markerar den en skiljelinje mellan två eror; problemlösning före och efter Pólya.”

Under 1960-talet uppstod en livlig diskussion kring matematikundervisningen. Bakgrunden var Sovjetunionens framgångar i rymden som tog USA på sängen. Undervisningen skulle moderniseras och matematiken var i det sammanhanget ett centralt ämne. ”Den nya matematiken” skulle vara en nyckel till den förnyelse man önskade. Den var tydligt inspirerad av tankarna i gruppen bakom Bourbaki. Färdighetsträning skulle bytas ut mot mer träning i abstrakt tänkande. Mängdläran blev grunden. Den nya matematiken blev starkt ifrågasatt inte bara av lärare utan också av flera professionella matematiker. En tillnyktring ägde rum och i vissa fall slog pendeln över åt andra hållet. Den nya matematiken blev inte bara en amerikansk angelägenhet. Många länder i västvärlden inklusive Sverige prövade samma koncept.

En av dem som var motståndare till den nya matematiken var **Hans Freudenthal**. Han disputerade 1931 i Berlin på en avhandling om grupper men flyttade till Amsterdam där han fick en tjänst vid universitetet. Han blev 1971 den förste föreståndaren för Institutet för utveckling av matematikutbildning, som från och med 1991 kallas Freudenthalinstitutet. Det har bidragit och bidrar till att förnya och förbättra matematikutbildningen inte bara i Nederländerna. Det är ett exempel på de många ofta fristående institut i olika länder med samma målsättning.

En forskningsverksamhet har uppstått kring utvecklingen av matematikutbildningen. Ett nytt ämne Matematikdidaktik eller Mathematics education har etablerats på många universitet. Forskningsverksamheten kräver inte bara kunnande i matematik utan också i olika beteendevetenskaper som psykologi, pedagogik och sociologi. Bland de vetenskapliga auktoriteter som åberopas märks framför allt två pedagoger och utvecklingspsykologer, **Jean Piaget** (1896–1980) från Schweiz och **Lev Vygotsky** (1896–1934) från Ryssland. Medan Piaget har intresserat sig för individens utveckling har Vygotsky studerat hur kunskap bildas i ett sociokulturellt sammanhang.

10.8 Några matematiker och deras verk

Under 1900-talet blev forskningen i matematik mer global. Tidigare hade den varit koncentrerad till i första hand Central- och Västeuropa. De stora universiteten i USA kom nu att i allt högre grad bidra till matematikens utveckling, många gånger genom europeiska matematiker som tvingats fly från sina hemländer. I Sovjetunionen – nuvarande Ryssland – blev framför allt Moskva ett centrum för matematisk verksamhet där betydelsefulla genombrott gjordes. Forskare från Japan bidrog med viktiga matematiska resultat och i slutet av seklet blev Kina, som förut varit relativt isolerat, medlem i International Mathematical Union. Antalet verksamma forskare inom matematiken och dess tillämpningsområden växte i och med att ämnet breddades och fördjupades. Valet av matematiker i denna presentation har därför gjorts mycket strikt. David Hilbert, Henri Poincaré och John von Neumann har alla gjort stora avtryck inom många delar av matematiken. Emmy Noether var en föregångare för den utveckling mot abstraktion som kännetecknade seklet och hon är också den kvinnliga matematiker från 1900-talet som har haft störst betydelse. Alan Turing är en portalfigur när det gäller utvecklingen av informationsteknologin. Andrej Kolmogorov, som bl.a. lade grunden för sannolikhetsläran, får representera den framgångsrika ryska skolan och George Pólya får representera det ökade intresset för matematikundervisning. Svensk matematik skördade stora framgångar under

1900-talet och Lennart Carleson är kanske dess främste representant. Vi avslutar vår kavalkad med Andrew Wiles, som i slutet av århundradet visade Fermats förmodan.

David Hilbert (1862–1943) föddes i Wehlau nära Königsberg. Han började skolan först när han var åtta år och hade dessförinnan undervisats av sin mor. Under de första skolåren utmärkte Hilbert sig inte. Han karakteriserade sig själv som ”dum och enfaldig”. Skolan hade mycket gott rykte men undervisningen koncentrerades kring klassiska språk. Matematiken spelade en underordnad roll och naturvetenskap fanns inte på schemat. När han senare började på gymnasiet ändrades förutsättningarna. Matematiken fick större utrymme och lärarna värdesatte självständigt tänkande. Det passade Hilbert som nu förbättrade sina resultat i alla ämnen och fick högsta betyget i matematik.

Figur 10.7: David Hilbert. (Bild: `2UUw3EL`)

Hösten 1880 började Hilbert studera vid universitetet i Königsberg och han försvarade i december 1884 en avhandling i matematik om invarianta egenskaper hos algebraiska former. I februari 1885 skrev han två avhandlingar den ena i fysik och den andra i filosofi. Därmed hade han fått doktorstiteln. Under sin studietid hade han studerat för och knutit kontakt med många av den tidens främsta matematiker. Han hade träffat **Hermann Minkowski**. De kom att bli goda vänner och påverkade varandras matematiska utveckling. Efter doktorsexamen besökte Hilbert ibland tillsammans med Minkowsky olika universitet i Europa bl.a. Leipzig, Erlangen, Paris och Berlin. Han knöt kontakter med flera framstående matematiker som Felix Klein, Charles Hermite, Karl Weierstrass och Leopold Kronecker.

Hilbert blev anställd vid universitetet i Königsberg 1886 och professor vid samma universitet 1893. År 1895 blev han utnämnd som professor vid universitetet i Göttingen och där förblev han under resten av sitt yrkesverksamma liv.

David Hilbert har haft en enorm påverkan på matematikens utveckling. Han har publicerat viktiga bidrag inom teorin för algebraiska talkroppar, algebraisk talteori, funktionalanalys, integralekvationer och matematisk fysik. Han bidrog med viktiga arbeten om matematikens grunder och i samband med det försvarade han Cantors transfinita matematik. Hans uttalande ”Ingen skall fördriva oss från det paradis som Cantor skapat” brukar ofta citeras. Hans stora kontaktnät kombinerat med hans djupa kunskaper gjorde honom till en av den tidens mest respekterade matematiker och det var en av anledningarna till att hans föreläsning vid matematikerkonferensen i Paris 1900, som vi citerat i avsnittet om problem, fick sådan betydelse. Den tyske matematikern **Otto Blumenthal** (1876–1944) karakteriserar Hilberts insats på följande sätt:

> ”När man analyserar matematisk talang måste man skilja mellan å ena sidan förmågan att skapa nya begrepp som genererar nya typer av tankestrukturer och å andra sidan gåvan att kunna se djupare samband och underliggande sammanhang. I Hilberts fall ligger hans storhet i en enormt kraftfull insikt som penetrerar djupen hos en fråga. Alla hans arbeten innehåller exempel från vitt skilda områden i vilka bara han kunde urskilja inbördes samband och koppling till problemen ifråga. Från dessa skapade han syntesen, hans konstverk.”

Vi skall ta upp några av Hilberts arbetet. Vi har redan behandlat hans föreläsning 1900. Året innan hade hans *Grundlagen der Geometrie* kommit ut. I den ger han en fullständig axiomatisk framställning av den klassiska geometrin. Euklides *Elementa* hade i årtusenden varit en modell för en axiomatisk framställning men den hade brister och Hilberts arbete fyller de luckor som saknas och hans framställning fyller de krav som man ställer på ett modernt axiomsystem.

Tillsammans med sin assistent **Paul Bernays** började Hilbert 1917 studera matematikens logiska grundvalar. Arbetet utmynnade i verken *Grundlagen der Mathematik* i två volymer som kom ut 1934 och 1939. Planen var att studera matematikens grundvalar i tre steg: För det första ville man överföra matematiska teorier till aritmetiken, för det andra ville man skapa en logisk grund för aritmetiken och för det tredje ville man visa att aritmetikens axiom var motsägelsefria. Man studerade aritmetikens logiska uppbyggnad med s.k. finita metoder. Gödel visade 1931 att Hilberts program inte gick att genomföra. Publiceringen av verket försenades och det delades upp på två arbeten. Det första ägnas åt de båda första punkterna i Hilberts program. Den andra delen handlar om bevisteori eller matematik där formella matematiska system undersöks med ”ändliga” metoder.

Ett annat område som Hilbert ägnade stort intresse och där han gjorde stora insatser var matematisk fysik. Tillsammans med den i USA verksamme matematikern **Richard Courant** skrev han *Methods of Mathematical Physics* som kom ut 1924. Courant stod för huvuddelen av arbetet med Hilberts föreläsningsanteckningar som underlag. En andra del kom ut 1939. De båda verken fick stor betydelse och var inkörsporten för många matematiker till områden som linjära avbildningar och kvadratiska former, utveckling av funktioner i ortogonala funktioner, integralekvationer, variationskalkyl, vibrationsproblem, egenvärdesproblem och speciella funktioner.

Några decennier tidigare blev Hilbert indragen i en diskussion med Einstein om den allmänna relativitetsteorin. Einstein, som då arbetade på den, hade en del problem kvar att lösa. Han blev 1915 inbjuden av Hilbert till Göttingen där han redogjorde för sina tankar. De båda forskarna kom mycket väl överens och Hilbert blev intresserad. Han blev så intresserad att han själv försökte utforma en teori. Hilbert och Einstein brevväxlade och det uppkom en form av tävling om vem som först skulle utforma teorin. Hilbert skickade in sin artikel, som hade titeln *The Foundations of Physics*, den 20 november 1915 och Einstein skickade in sitt arbete som hade titeln *The Field Equations of Gravitation* fem dagar senare. En prioritetsdiskussion uppstod men Hilbert själv gav äran åt Einstein. Det var han som stod för de fysikaliska idéerna även om Hilbert kanske var först med den matematiska formuleringen.

Det finns många begrepp och satser som är uppkallade efter Hilbert. Det som de flesta som läst matematik på högre nivå stött på är Hilbertrum. Teorin för Hilbertrum är en central del av funktionalanalysen där man studerar rum av funktioner. De är av stor betydelse inom bl.a. kvantmekaniken. Det var Hilberts arbeten om integralekvationer som banade väg för studiet av oändligtdimensionella rum. Det kan nämnas att den svenske matematikern Ivar Fredholms bidrag till teorin om integralekvationer var av betydelse för Hilberts teorier.

Hilbert bidrog inte bara med egna banbrytande arbeten inom matematiken. Han handledde också många studenter och en del av dem skulle bli framstående matematiker. Den mest kände är kanske **Hermann Weyl** (1885–1955).

David Hilbert pensionerades 1930 men slutade inte att ge lektioner. När nazisterna kom till makten 1933 ändrades livet i Göttingen radikalt. Judiska lärare avskedades och på hösten samma år hade de flesta flyttat därifrån. Hilbert gav en lektion i veckan under läsåret 1933–4 och därefter besökte han aldrig institutionen mer. År 1942 föll han och bröt armen under en promenad i Göttingen. Det gjorde honom helt inaktiv och och det verkar vara huvudanledningen till att han dog året därpå.

I det avskedstal han höll den 9 september 1930 i samband med sin pensionering avslutade han med att bemöta den latinska devisen ”Ignoramus et ignoramibus” eller ”Vi vet inte och vi kommer inte att veta” med orden ”Wir müssen wissen. Wir werden wissen.” eller ”Vi måste veta. Vi skall veta.”. De orden står på hans gravsten.

Henri Poincaré (1854–1912) föddes i Nancy i Frankrike. Fadern var professor i medicin vid stadens universitet och hans kusin Raymond Poincaré var premiärminister under flera perioder samt Frankrikes president under första världskriget.

Figur 10.8: Henri Poincaré. (Bild: 3OYMK5I)

Henri hade som barn besvär med att kontrollera sina muskler som en följd av att han under en tid var svårt sjuk i difteri. Han var också mycket närsynt. Han fick som liten privatundervisning av sin mor. När Poincaré var åtta år började han på läroverket i Nancy, som nu kallas Lycée Henri Poincaré. Han var toppelev i alla ämnen han studerade och beskrevs som ett ”monster” i matematik där han vann flera första priser i nationella tävlingar. Efter gymnasiet började Poincaré studera vid École Polytechnique 1873 och han avlade examen 1875. Därefter började han studera gruvdrift vid École de Mines och arbetade efter avslutade studier som gruvingenjör samtidigt som han skrev på sin doktorsavhandling i matematik. Hans handledare var Charles Hermite och ämnet för avhandlingen var differentialekvationer. Han erhöll doktorsexamen vid Universitetet i Paris 1879. Därefter gjorde han akademisk karriär och från och med 1886 till sin död 1912 var han professor dels vid Sorbonneuniversitetet och dels vid École Polytechnique.

Poincaré har bidragit med banbrytande arbeten inom en rad skilda områden, inte bara i matematik utan också i optik, celest mekanik, telegrafi, elasticitet, termodynamik och kosmologi. Tillsammans med Albert Einstein och den holländske fysikern **Hendrik Lorentz** (1853–1928) anses han som upptäckare av den speciella relativitetsteorin. Inom matematiken har vi nämnt att hans arbete *Analysis Situs* från 1895 lade grunden till topologin. Han är grundare av teorin för analytiska funktioner av flera variabler och han gav viktiga bidrag till algebraisk geometri genom några arbeten 1910–1.

Under Poincarés sista år skrev han en rad mer övergripande artiklar om vetenskap i allmänhet och matematik i synnerhet. Några var mer populära och riktade sig till en bredare publik; andra var riktade till aktiva vetenskapsmän som till exempel *Vetenskap och hypotes* (1901), *Värdet av vetenskap* (1905) och *Vetenskap och metod* (1908). Vi citerar en mening ur det sistnämnda arbetet:

> ”Den sanna metoden att förutse matematikens framtid är att studera dess historia och dess aktuella tillstånd.”

Redan tidigt hade Poincaré intresserat sig för den psykologiska processen i matematisk skapande. Han försökte genom introspektion beskriva sina egna erfarenheter. Poincaré framhöll intuitionens stora betydelse när det gäller matematisk problemlösning och utveckling av matematisk teoribildning. I artikeln ”Matematiska definitioner i utbildningen” som ingår i *Vetenskap och metod* skriver han:

> ”Det är med hjälp av logik vi bevisar, det är med intuition vi skapar.”

I en artikel ”Intuition och logik i matematiken” som ingår i *Värdet av vetenskap* skriver Poincaré:

> ”Jag har redan haft tillfälle att framhålla att intuitionen måste få plats i undervisningen i de matematiska vetenskaperna. Utan den kan eleverna inte börja förstå matematik; de kan

> inte lära sig älska den och de kommer att se den som en strid om ord; och, framför allt, utan intuition kommer de aldrig att kunna tillämpa matematik.”

Poincarés reflektioner om tankeprocesser och matematikens väsen kan tillsammans med Felix Kleins intresse för matematikundervsining ses som preludier till de studier om matematikundervisning som skulle utvecklas framför allt under senare delen av 1900-talet och som kom att få namnet Matematikdidaktik.

Poincaré dog 1912 bara 58 år gammal efter sviterna av en operation. Han var vid sin död mycket respekterad och var medlem av många vetenskapliga sällskap både inom och utom Frankrike. Vid hans begravning närvarade senatens president, flera ministrar, prinsen av Monaco samt representanter för olika vetenskapliga samfund.

Emmy Noether (1882–1935) föddes i Erlangen i Tyskland. Hennes far var professor i matematik vid stadens universitet och hennes mor tillhörde en rik köpmanssläkt. Båda föräldrarna hade judiskt ursprung. I gymnasiet läste hon tyska, engelska, franska och aritmetik. Hon var också intresserad av musik och tog pianolektioner. Dans var ett av hennes favoritnöjen. Meningen var att hon skulle bli språklärare och 1900 avlade hon lärarexamen i engelska och franska.

Figur 10.9: Emmy Noether. (Bild: `3OUJgBk`)

Emmy Noether blev emellertid aldrig språklärare. Hon valde istället att studera matematik. Det var ett djärvt val eftersom kvinnor inte utan svårigheter fick möjligheter att följa universitetsundervisning. Det var möjligt att följa en kurs inofficiellt om professorn gav speciellt tillstånd. Tillsammans med ytterligare en kvinna följde hon matematikundervisningen vid universitetet i Erlangen mellan 1900 och 1902. Hon flyttade till Göttingen där hon 1903–4 följde kurser av bl.a. Hilbert, Minkowski och Klein. Trots att hon blivit godkänd i inträdesprovet kunde hon som kvinna inte skrivas in vid universitetet utan fick också här följa undervisningen inofficiellt. Regelverket ändrades och hösten 1904 kunde Noether skrivas in vid universitetet i Erlangen. Hon studerade nu bara matematik och avlade doktorsexamen 1907. I doktorsavhandlingen studerade hon konkreta invariansproblem. Efter doktorsavhandlingen vändes hennes intresse mot Hilberts mer abstrakta teorier och hennes arbeten gav henne ett internationellt rykte. Hon blev invald i vetenskapliga samfund och inbjuden att föreläsa vid olika universitet i Europa.

År 1915 blev Emmy Noether inbjuden till Göttingen av Hilbert och Klein. Hilbert behövde hennes hjälp med några idéer han hade inom relativitetsteorin. Hon löste två viktiga problem och det ena kallas numera för *Noethers sats*. Klein och Hilbert övertalade henne att stanna kvar i Göttingen och efter en strid med universitetsförvaltningen kunde hon efter fyra år få en tjänst. Under tiden kunde Noether föreläsa på kurser som annonserats i Hilberts namn.

Under tiden i Göttingen övergick Noether från att studera invarianter till mer abstrakt inriktade arbeten om ringar. Hon publicerade banbrytande arbeten som *Idealtheorie in Ringbereichen* (”Idealteori i ringar”) (1921) och *Abstrakter Aufbau der Idealtheorie in algebraischen Zahlkörpern* (”Abstrakt uppbyggnad av talteori i algebraiska talkroppar”) (1924). Den holländske matematikern **B. L. van der Waerden** tillbringade året 1924 i Göttingen för att arbeta tillsammans med Noether. Stora delar av hans klassiska verk *Moderne Algebra* bygger på Noethers arbeten.

År 1933 kom nazisterna till makten och det innebar att hon som jude avskedades från universitetet. Hon accepterade en inbjudan från Bryn Mawr College i USA och kom från och med hösten 1934 också att ge någon lektion i veckan vid Institute for Advanced Study i Princeton. Efter ett besök i Tyskland sommaren 1934 återvände hon till Bryn Mawr där hennes professur hade förlängts. På våren 1935 upptäcktes att hon hade en cancertumör. Hon opererades men avled 14 april 1935 några dagar efter operationen.

Noether var en av den nya moderna algebrans galjonsfigurer. van der Waerden karakteriserar hennes insats på följande sätt:

> ”För Emmy Noether blev relationer mellan tal, funktioner och operationer transparenta, tillgängliga för generalisering och produktiva endast efter det att de avlägsnats från varje form av speciella objekt och reducerats till generella begreppsmässiga relationer.”

Emmy Noether var inte bara en stor matematiker. Hon hade ett stort intresse för människor och en stor integritet. Hon stimulerade medarbetare och elever och många av deras arbeten är resultat av hennes förslag och idéer. Hennes kollega Hermann Weyl belyser i sitt tal på Emmy Noethers begravning hennes integritet:

> ”Du trodde inte på ondskan, det föll dig faktiskt aldrig in att den kunde spela en roll i mänsklig verksamhet. Det blev aldrig så klart för mig som den sista sommaren vi tillbringade tillsammans i Göttingen, den stormiga sommaren 1933. Mitt i den kamp, den förstörelse och den omvälvning som försiggick överallt omkring oss, i ett hav av hat och våld, av fruktan och desperation och förstämning – gick du din egen väg, grubblade över matematiska utmaningar lika idogt som förut. När du inte tilläts använda institutionens lektionssalar samlade du dina studenter i ditt eget hem. Till och med de i bruna skjortor var välkomna; aldrig för en sekund tvivlade du på deras integritet. Utan hänsyn till ditt eget öde, med öppet hjärta och utan fruktan, alltid försonlig, gick du din egen väg. Många av oss såg ett hat som sluppit lös där det inte fanns någon förlåtelse; men du var oberörd av allt detta.”

Andrey Kolmogorov (1903–87) föddes i Tambov i Ryssland 48 mil sydost om Moskva. Han blev tidigt föräldralös och uppfostrades av sin moster. Kolmogorov tog sitt namn efter sin morfar.

Figur 10.10: Andrey Kolmogorov. (Bild: `2YLioRv`)

Efter skolan arbetade Kolmogorov som järnvägskonduktör och på lediga stunder skrev han ett arbete om Newtons lagar. Han började på universitetet i Moskva 1920 och läste förutom matematik bl.a. metallurgi och rysk historia. Kolmogorov publicerade redan under sin studenttid vetenskapliga artiklar av internationell betydelse inom bl.a. mängdlära, sannolikhetslära och analys. Han fick doktorstiteln 1929 och hans handledare var Nikolai Luzin som hade byggt upp en framstående forskargrupp ”Luziniana” vid universitetet i Moskva. Kolmogorov var en av deltagarna i gruppen och en annan var **Pavel Aleksandrov** som var en av de främsta experterna på topologi. Kolmogorov och Alexandrov blev goda vänner och 1935 köpte de tillsammans ett hus Komarovka i en liten by utanför Moskva.

Kolmogorov blev professor vid universitetet i Moskva 1931. År 1933 utkom hans epokgörande bok *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* där han bygger upp sannolikhetsläran axiomatiskt. Hans axiomsystem ligger till grund för de allra flesta av dagens framställningar av sannolikhetslära. I en artikel från 1938 *On the analytic methods in probability theory* lägger han grunden för teorin om Markovprocesser.

För dagens studenter på grundutbildningen förknippas Kolmogorov med sannolikhetsteori. Men han gav också viktiga bidrag inom många andra områden som topologi och dynamiska system. Vid den internationella matematikerkongressen i Amsterdam 1954 gav han en berömd föreläsning med titeln *General theory of dynamical systems and classical mechanics*. Kolmogorov löste också ett av Hilberts 23 problem.

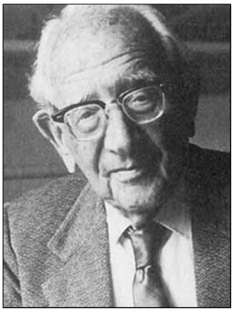
Men Kolmogorov var inte bara en framstående forskare. Han bidrog också till att skapa stimulerande vetenskapliga miljöer. Hans och Aleksandrovs hem i Komarovka blev en mötesplats för den tidens matematiker både från Sovjetunionen och från andra länder. Han handledde 82 studenter fram till doktorsexamen och många av dem kom att bli världsledande. Kolmogorov engagerade sig också i ett projekt där man gav speciell undervisning åt begåvade elever. I en artikel om honom i *Bulletin of London Mathematical Society* från 1990 skriver författarna:

> ”Han ägnade under många år en stor del av sin tid åt denna skola, planerade kurser, avsatte ett stort antal lektionstimmar tillsammans med barnen, introducerade dem i litteratur och musik och deltog i deras utflykter . . . [Kolmogorov] sökte tillförsäkra dessa barn en bred och naturlig utveckling av sina personligheter, och det bekymrade honom inte om barnen i hans skola inte blev matematiker. Vilken yrkesinriktning de än valde var han nöjd om deras synsätt förblev brett och om deras nyfikenhet inte kvävdes.”

Hans elev **Vladimir Arnold** har en gång sagt:

> ”Kolmogorov – Poincaré – Gauss – Euler – Newton är bara fem liv som skiljer oss från vår vetenskaps källa.”

George Pólya (1887–1985) föddes i Budapest. Båda hans föräldrar var judar men de konverterade till katolicismen 1886. I skolan visade George inget intresse för matematik och hans resultat var medelmåttiga. Efter skolan började han studera juridik vid universitetet i Budapest men han fann ämnet alltför tråkigt och övergick till att studera språk, något som alltid intresserat honom. Han ville komplettera sin utbildning med studier i filosofi men fick då rådet att först läsa kurser i matematik och fysik. Hans lärare i matematik blev **Lipót Fejér**, som var en av den tidens ledande experter på Fourierserier.



Figur 10.11: George Pólya. (Bild: 30VJGHF)

Pólya doktorerade så småningom i matematik och hans doktorsavhandling handlade om ett problem inom geometrisk sannolikhetslära.

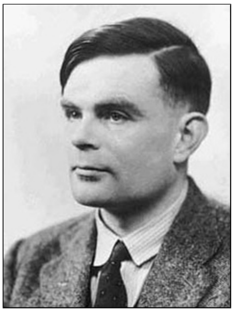
Pólya gästade under åren 1912 och 1913 Göttingen och skapade kontakter med många av den tidens stora matematiker bl.a. Klein, Hilbert och Weyl. Han gjorde ett kortare besök i Paris där han träffade **Émile Picard** och Jacques Hadamard. Pólya träffade under några år många av den tidens yppersta matematiker men den som gjorde störst intryck på honom var **Adolf Hurwitz** som då var professor vid Eidgenössische Technische Hochschule i Zürich (ETH). Genom kontakterna med honom fick Pólya en tjänst där. Han blev efter några år schweizisk medborgare och gifte sig med en schweiziska. Under sin tid i Zürich fick han möjligheter att 1924 gästa Oxford och Cambridge där han träffade **G. H. Hardy** och **J. E. Littlewood** och de började samarbeta om boken *Inequalities* som kom ut 1934. Åren 1926–8 var Pólya mycket produktiv och han blev utnämnd till professor vid ETH 1928.

År 1933 fick Pólya ett stipendium som gav honom möjlighet att besöka Princeton och Harvard. Han återvände till Zürich men återvände 1940 till USA där han så småningom blev professor vid Harvard. Han pensionerades 1953 men han fortsatte att undervisa. 91 år gammal gav han en kurs i kombinatorik.

Som forskare var Pólya aktiv inom många områden som Fourieranalys, sannolikhetslära, gruppteori, kombinatorik, talteori, komplex analys och randvärdesproblem för partiella differentialekvationer. Det är emellertid hans böcker om problemlösning som har gjort honom känd. Tillsammans med **Gábor Szegö** gav han 1925 ut *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* i två volymer. Det nya med problemsamlingen var att problemen inte strukturerades efter ämnesområden utan efter metod. Han gav ut flera böcker där han diskuterade problemlösning och den mest kända är *How to solve it* från 1945. Den har använts och används fortfarande världen över i lärarutbildningen i matematik. Den grundläggande strategin som Pólya förordar är enkel och kan användas i matematikundervisning på alla nivåer och på problemlösning i allmänhet utanför matematiken. Den består av fyra steg: 1. Förstå problemet. 2. Utforma en plan. 3. Genomför planen. 4. Reflektera över resultatets rimligt och fundera på eventuella utvidgningar. Det första stycket i förordet till första upplagan av *How to solve it* får avsluta vår korta presentation av Pólya och hans verk.

> ”En stor upptäckt löser ett stort problem men det är ett korn av upptäckt i lösningen av varje problem. Ditt problem kan vara blygsamt; men om det utmanar din nyfikenhet och sätter igång din uppfinningsrikedom, och om du löser det med dina egna metoder, kan du erfara spänningen och njuta av upptäcktens triumf. Sådana erfarenheter i en mottaglig ålder kan skapa smak för intellektuellt arbete och ge avtryck på tänkande och personlighet som varar livet ut.”

Alan Turing (1912–54) föddes i London. Hans föräldrar tjänstgjorde i Indien och de pendlade mellan Indien och hemmet i Guildford. Föräldrarna skrev in Alan vid St. Michaels school vid sex års ålder.



Figur 10.12: Alan Turing. (Bild: 3ORsPpj)

År 1926 började Alan Turing studera vid Sherborne School i Dorset. Samma år utbröt en strejk i England och för att ta sig till skolan cyklade Alan de drygt nio milen från hemmet till skolan. Skolan var profilerad mot de klassiska ämnena. Matematik och naturvetenskap stod inte högt i kurs. Han studerade på egen hand och löste avancerade matematiska problem. Han vann under skoltiden de matematiska pris som fanns att vinna. I kemi gjorde han experiment efter sitt eget huvud och det föll inte läraren i smaken. Hans rektor gav följande omdöme: ”Om han skall vara kvar i kommunal skola måste han anstränga sig att bli bildad. Om han endast vill bli specialist inom naturvetenskap slösar han bort sin tid här.”. Turing fortsatte emellertid och studerade på egen hand Einsteins relativitetsteori och kvantmekanik.

I Sherborne träffade Alan den ett år äldre **Christopher Morcom** och de arbetade tillsammans med vetenskapliga idéer. Det var första gången Alan träffade någon som helt delade hans intressen. Christopher dog 1930 och den händelsen kom att kasta en skugga över Turings liv.

Turing började studera vid King’s College i Cambridge 1931. Han läste bl.a. Bertrand Russels bok *Introduction to mathematical philosophy*, John von Neumanns arbeten om kvantmekanik samt sannolikhetsteori. Han gick på seminarier om matematikens grunder där bl.a. Hilberts avgörbarhetsproblem diskuterades: Kan man alltid hitta en algoritm som avgör om ett påstående inom aritmetiken är sant eller falskt utgående från aritmetikens axiomsystem?

Turing arbetade med problemet under några år och 1936 publicerade han sin epokgörande artikel *On Computable Numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*. För att precisera begreppet algoritm konstruerade Turing en abstrakt maskin som nu kallas *Turingmaskin*. Den kan skriva och läsa ett tecken på en remsa och övergå från ett tillstånd till ett annat enligt ändligt många regler. Turing kallade ett tal beräkningsbart om dess decimalutveckling kunde genereras av en Turingmaskin. Han visade att π är beräkningsbart. Han kunde också visa att mängden av beräkningsbara tal är uppräknelig. Det finns alltså reella tal som inte är beräkningsbara och han lyckades också konstruera ett sådant. En konsekvens av artikeln var att Hilberts förhoppning om avgörbarhet är falsk. Samma resultat kom den amerikanske logikern **Alonzo Church** fram till. Turings metod visade sig mer fruktbar då den maskin han konstruerade skulle stå modell för den första datorn.

Diskussionerna med Church medförde att Turing år 1936 blev doktorand vid Princeton med Church som handledare. Han återvände till England 1938 och deltog bl.a. i Ludwig Wittgensteins filosofiska seminarier. När andra världskriget bröt ut 1939 började Turing arbete vid regeringens enhet för kodning och kryptering vid Bletchley Park. Han tillhörde den grupp som arbetade med att knäcka tyskarnas krypteringsmaskin *Enigma*. Gruppen utvecklade en maskin, *The Bombe*, och med hjälp av den och kunskapen om stående fraser i meddelandena lyckades man knäcka koden. Från och med mitten av 1941 kunde signaler från den tyska flottan avkodas i Bletchley Park. Tyskarna ändrade systemet så att det blev mer komplext men Turings idéer innebar att även denna variant kunde knäckas även om Turing inte själv då var delaktig. Han var i USA för att diskutera olika typer av avkodningssystem. Turing och hans medarbetares arbete sparade antagligen mer liv under kriget än någon annan insats.

Efter kriget fortsatte Turing arbetet med att realisera en dator men hans planer var alltför komplicerade enligt många och projektet fördröjdes. Han fick en tjänst vid universitet i Manchester 1948. Två år senare publicerade han den berömda artikeln *Computing Machinery and Intelligence* i tidskriften *Mind*. där han ställde frågan om en maskin kan tänka och införde det som kallas *Turingtestet*. Om en människa kommunicerar med en dator och inte kan avgöra om det är en dator eller människa så uppfyller datorn testet på att kunna tänka. De frågor han behandlar är centrala i det som idag kallas *artificiell intelligens*.

Under tiden i Manchester arbetade Turing också med problem inom morfogenes, kvantmekanik och relativitetsteori. Han arbetade också i hemlighet för den brittiska underrättelsetjänsten. Turing ägnade också mycket tid åt idrott och han var en framstående medel- och långdistanslöpare som inte var långt ifrån att kvalificera sig till de olympiska spelen 1948.

Turing var homosexuell och i Storbritannien var då homosexuella handlingar brottsliga. År 1952 inledde Turing ett förhållande med en ung arbetslös man. Samtidigt blev Turings våning utsatt för ett inbrott av vad som visade sig vara en bekant till Turings partner. Turing anmälde inbrottet och under utredningen avslöjades hans homosexuella förhållande. Han fick välja mellan fängelse och s.k. kemisk kastrering som innebar behandling med kvinnligt könshormon. Han valde det senare.

Alan Turing dog 1954 av cyanidförgiftning då han arbetade med fysikaliska experiment. Ett halvätet äpple låg bredvid honom och visade sig innehålla cyanid. Den utredning som gjordes kom till slutsatsen att döden var självförvållad. Hans mor accepterade emellertid aldrig det utan hävdade att det var experimenten som var orsak till Turings alltför tidiga död.

Turing har idag blivit något av en ikon. Det har skrivits böcker om honom och det har gjorts en film. Hans kanske främste biograf **Andrew Hodges** skriver på hemsidan *Alan Turing: The Enigma* att han var ”grundare av datavetenskap, matematiker, filosof, kodknäckare och en gay man före sin tid.”.

I september 2009 bad premiärminister **Gordon Brown** offentligt om ursäkt för det sätt han behandlades på av den brittiska staten. Han skrev:

> ”. . . Turing var en briljant matematiker mest berömd för att han knäckte de tyska Enigmakoderna. Det är ingen överdrift att säga att utan hans enastående bidrag, hade det andra världskrigets historia slutat annorlunda. Han är sannerligen en av de individer vars unika bidrag hjälpte till att vända krigets utveckling. Den djupa tacksamhet han förtjänar gör det än hemskare att han behandlades så omänskligt.
>
> . . .
>
> Så på uppdrag av den brittiska regeringen och alla dem som kan leva fritt tack vare Alans arbete är jag mycket stolt över att kunna säga: Förlåt oss. Du förtjänade mycket bättre.”

John von Neumann (1903–57) föddes i Budapest i Ungern. Hans far var jude och en framstående bankman och John uppfostrades i en stor familj med guvernanter. Han började som åttaåring studera vid Lutheran Gymnasium i Budapest och utmärkte sig redan under skolåren för sin stora matematiska begåvning. Han avslutade gymnasiestudierna 1921 men hade redan då skrivit en matematisk artikel som publicerades året därpå.

Figur 10.13: John von Neumann.
(Bild: 2UVThua)

År 1921 började von Neumann studera kemi vid universitetet i Berlin. Han hade egentligen velat studera matematik och blev antagen till matematikstudier vid universitetet i Budapest trots att antalet platser för judar var mycket litet. Johns far ville emellertid inte att han skulle studera något som verkade svårt att tjäna sitt uppehälle på och han ville att John skulle studera ekonomi. Kemistudier blev en kompromiss. Han flyttade från Berlin till Zürich efter två år och 1926 utexaminerades han som kemiingenjör från Zürichs tekniska högskola. Parallellt med studierna i kemi läste han matematik och han kom i kontakt med Hermann Weyl och George Pólya i Zürich. Han tog över Weyls kurser under en tid då Weyl var bortrest.

von Neumann fick sin doktorstitel vid universitetet i Budapest 1926. Hans avhandling handlade om mängdlära. Under åren som följde gav han lektioner i Hamburg och Berlin. Han studerade under ett år i Göttingen där Hilbert var hans handledare. von Neumann var nu känd i matematikkretsar som ett ungt geni. Han blev inbjuden till Princeton och undervisade där mellan 1930 och 1933. År 1933 var han en av de sex professorer som var med från starten av Institute for Advanced Study in Princeton. De övriga var **James Alexander** med topologi som specialitet, Albert Einstein, **Marston Morse** och **Osvald Veblen** med differentialgeometri och topologi som specialiteter samt Hermann Weyl, som bl.a. bidrog med banbrytande insatser inom gruppteori.

von Neumann var kvar vid Princeton till sin död 1955. Han anses vara en av 1900-talets främsta matematiker, kanske den främste, och han bidrog med epokgörande insatser inom en rad områden som mängdlära, ergodteori, teorin för operatorer, måtteori, kvantmekanikens matematiska grunder, spelteori, matematisk ekonomi, linjär programmering och matematisk statistik. Med arbetet *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* från 1932 var han den förste som gav en stringent matematisk grund för kvantmekaniken och han kunde koppla samman den med teorin för Hilbertrum. Tillsammans med ekonomen Oskar Morgenstern gav han 1944 ut det klassiska verket *Theory of Games and Economic Behaviour* som fick stor uppmärksamhet med bl.a. en helsidesartikel i *New York Times*.

Det var emellertid inte bara som vetenskapsman som von Neumann gjorde stora insatser. Han deltog under kriget som expert i Manhattanprojektet som konstruerade den första atombomben, han var ledamot av den amerikanska atomkommissionen från 1950, han var en av de ledande experterna för att realisera den första datorn ENIAC och han utvecklade beräkningstekniken. Han intresserade sig också för väderprognoser och för klimatfrågor. Han var en av de första som förutsåg den globala uppvärmningen.

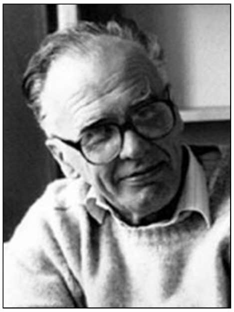
Vetenskapsmän i allmänhet och matematiker i synnerhet har kanske ett rykte om sig att vara inåtvända enstöringar. von Neumann var motsatsen. Han tyckte om fester och tog gärna del i storstädernas nattliv.[1]

År 1956 fick von Neumann beskedet att han drabbats av obotlig cancer och han dog den 8 februari 1957. Han fick en lång rad utmärkelser bl.a. Medal of Merit 1947 och Medal of Freedom 1956 som båda delades ut av USA:s president.

Två citat av von Neumann få avsluta denna korta framställning:

> ”I matematik kan du inte förstå saker och ting. Du kan bara vänja dig.”
>
> ”Det verkar som om vi nått gränserna när det gäller beräkningsteknologi, fast man måste vara försiktig med sådana påståenden, eftersom de tenderar att vara ganska löjliga inom fem år.” (Sagt 1949)

Lennart Carleson (1928–) är kanske den främste av de många svenska matematiker under 1900-talet som hade internationell ryktbarhet. Vi har nämnt Ivar Fredholm, Harald Cramér och Lars Hörmander. **Torsten Carleman** (1892–1949) gjorde betydande insatser inom klassisk analys och dess tillämpningar. Några av hans resultat förebådade von Neumanns abstrakta teorier.



Figur 10.14: Lennart Carleson. (Bild: 2URWPxN)

Lennart Carleson föddes i Stockholm. Han avlade studentexamen 1945 i Karlstad och började sedan studera vid Uppsala universitet. År 1947 avlade han filosofie kandidatexamen och började därefter doktorera i matematik. Han blev professor vid Uppsala universitet 1954. Hans handledare som doktorand var en annan av de stora svenska matematikerna **Arne Beurling**, som bidragit med viktiga arbeten inom harmonisk analys, komplexa funktioner och potentialteori. Beurling var från 1954 och till sin pensionering professor vid Institute of Advanced Study i Princeton. Mest känd för en större allmänhet blev han för att han i början av andra världskriget knäckte koden till tyskarnas Geheimschreiber.

Efter doktorsexamen vistades Carleson ett år vid Harvard University där han bl.a. kom i kontakt med den tidens expert på trigonometriska serier, Antoni Zygmund. Vi har tidigare nämnt hur det ledde till att han började arbeta med Luzins förmodan och till slut lyckades visa den. Beviset publicerades 1966. Det är framför allt genom det arbetet som Carleson blev känd i breda matematikerkretsar men han har löst flera mycket svåra problem både tidigare och senare. Han har för dessa prestationer belönats med många av de mest prestigefyllda priser en matematiker kan få. År 2006 tilldelades han Abelpriset. I motiveringen står det:

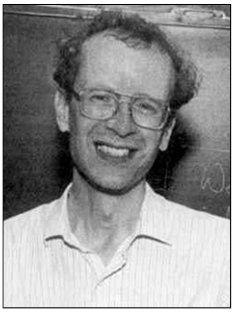
[1]Von Neumann var i motsats till många stora matematiker väl känd i bredare kretsar. Den amerikanske filmregissören Stanley Kubrik skapade huvudpersonen i sin film *Dr. Strangelove or: How I Learned to Stop Worrying and Love the Bomb* som en blandning av von Neumann, strategen Hermann Kahn, raketforskaren Wernher von Braun och vätebombens fader Edward Teller.

> ”Carleson är alltid långt före massan. Han koncentrerar sig bara på de svåraste och djupaste problemen. När de en gång är lösta, låter han andra invadera det kungarike han har upptäckt och han går vidare till ännu vildare och mer avlägsna områden av Vetenskapen.
>
> . . . Carlesons arbete har för alltid ändrat vår syn på analysen. Han inte bara bevisade ytterst svåra satser, utan de metoder han introducerade för att visa dem har visat sig vara minst lika viktiga som satserna själva. Hans unika stil karakteriseras av geometriskt skarpsinne och en häpnadsväckande kontroll över bevisens förgrenande komplexitet.”

Carleson var inte bara en briljant forskare. Han var också framstående lärare och akademisk ledare. Han har varit handledare till 26 doktorander. Under perioden 1968–84 var han chef för Mittag-Leffler institutet som då han tog vid hade en relativt blygsam ställning. Under hans ledning utvecklades det till ett forskningscentrum av hög internationell klass. Han var också under perioden 1978–82 ordförande i International Mathematical Union och som sådan verkade han för att Folkrepubliken Kina skulle bli medlem och bidrog till att skapa Nevanlinnapriset som utdelas till unga framstående teoretiska datavetare.

Andrew Wiles (1953–) föddes i Cambridge i England. Han växte upp i en akademisk familj. Hans far var kaplan i Ridley Hall i Cambridge. Han var redan som mycket ung intresserad av matematik och som tioåring läste han om Fermats förmodan. Han har sagt:

> ”. . . jag var tio år och en dag råkade jag se mig omkring i det lokala biblioteket och fann en bok om matematik och den berättade historien om detta problem och jag, en tioåring, kunde förstå det. Från det ögonblicket försökte jag lösa det själv, det var en sådan utmaning, ett sådant vackert problem. Problemet var Fermats stora sats.”



Figur 10.15: Andrew Wiles. (Bild: `2YLxBlO`)

Wiles började studera vid universitetet i Oxford 1971 och avlade Bachelor of Arts 1974. Han doktorerade i matematik vid universitetet i Cambridge. Under sina doktorandstudier vistades han en tid vid Harvard University. Wiles avlade doktorsexamen 1980. Hans handledare var **John Coates** och tillsammans gav de ut arbeten inom den japanske matematikerns Knekichi Iwasawas teori om elliptiska kurvor. Han följde sin handledares råd och lät inte Fermats förmodan vara ämnet för sin avhandling. Risken ansågs vara alltför stor för att mycket arbete inte resulterar i någonting.

År 1981 blev Wiles utnämnd som professor vid Institute for Advanced Studies i Princeton. Han tilldelades Guggenhem Fellowship och kunde med hjälp av det vistas en tid vid Institut des Hautes Études Scientifique och École Normale Superieure i Paris. Tio år tidigare hade man visat att Fermats sista sats följer av Shimura-Taniyamas förmodan att varje elliptisk kurva definierad över de rationella talen är modulär. Begreppen ”elliptisk kurva” och ”modulär” är tekniska begrepp inom geometri och algebran och definitionerna faller utanför ramen av denna framställning.

Wiles forskning ändrade nu inriktning och han koncentrerade sig helt på att visa Shimura-Taniyamas förmodan. Han lyckades visa en svagare variant genom att använda avancerad algebra och det räckte för att bevisa Fermats förmodan. Vi har tidigare beskrivit hur han trodde sig ha ett bevis som han presenterade vid en konferens i Cambridge men att det vid en granskning inte visade sig hålla måttet. Efter ett års hårt arbete kunde han fylla igen luckorna och resultatet publicerades 1995 i *Annals of Mathematics*.

Efter att ha bevisat Fermats sista sats fick Wiles ta emot flera utmärkelser bl.a. Abelpriset 2016. År 2000 blev han adlad och kan nu kalla sig Sir Andrew Wiles.

I samband med utdelandet av Abelpriset gav den brittiske författaren **Alexander Bellos** en mer populär version som av Wiles arbete och han avslutar den på följande sätt:

> ”Proof of the Taniyama-Shimura conjecture, a result now known as the modularity theorem, meant that Wiles had also proved Fermat's Last Theorem, thus bringing to a close a chapter of mathematical history that began 350 years previously. Yet more than settling an old and famous riddle, the impact of the modularity theorem on mathematics has been immense. Wiles demonstrated a fundamental structural connection between elliptic curves and modular forms, a rich and important result within number theory with many deep consequences. He also devised a powerful conceptual toolkit that has been used over the past two decades by other mathematicians in spectacular ways.”

Trots de tekniska termerna torde det av den beskrivningen framgå, att Wiles in bara löst ett 350 år gammalt problem, utan att han också visat viktiga och djupa samband inom talteorin och att han samtidigt försett matematikerna med kraftfulla begreppsmässiga redskap.

En populärvetenskaplig skildring av Wiles arbete finns i **Simon Singhs** bok *Fermats gåta*.

Kapitel 11

Matematiken i andra kulturer

Dagens matematik är global. Den har sina rötter i de kulturer som utvecklades i tvåflodslanden, Egypten och Indien. Den nådde oanade höjder under antiken. Vetenskapsmän i det islamiska väldet dokumenterade och vidareutvecklade under medeltiden antikens landvinningar. Decimalsystemet med de hinduarabiska siffrorna, intresset för ekvationslösning och arbetet med att ge fysiken en matematisk formulering banade vägen för algebran, infinitesimalkalkylen och en effektiv beräkningsteknik. Arvet från Euklides med krav på struktur och stringens skulle ge upphov till frågeställningar som gav nya perspektiv. Problem som vitaliserade verksamheten formulerades och vissa av dem kunde lösas. Andra trotsade till och med de största matematikernas ansträngningar men försöken att lösa dem utvecklade nya begrepp och teorier. Matematiken är nu en väv med inslag av aritmetik, geometri, analys, algebra, topologi, funktionalanalys, beräkningsteknik, sannolikhetslära och statistik och den rymmer båda konkreta tillämpningar och fantasifulla abstraktioner. Och utvecklingen fortsätter. Nya områden skapas genom avknoppningar och genom fusioner. Matematiken är i hög grad levande.

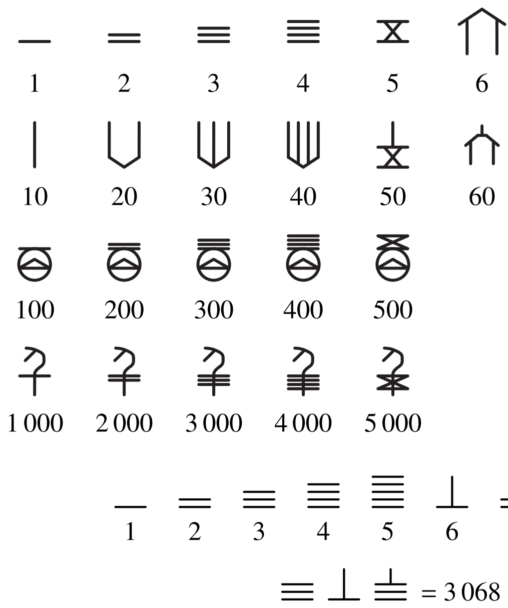
Det finns emellertid kulturer som varit isolerade från den utveckling vi beskrivit och där avancerad matematik utvecklats. Det stora kinesiska riket var under långa tider avskuret från andra delar av världen. I Sydamerika hade mayafolket under en period som varade från 1000 f.Kr. till 1600-talet utvecklat en rik kultur med avancerad matematik som inte påverkat eller påverkats av den övriga världen. Vi skall ge en kortfattad beskrivning av den matematiska verksamheten i dessa båda kulturer.

11.1 Matematiken i Kina – konkret och probleminriktad

Det område som vi idag kallar Kina har varit bebott i flera hundratusen år. Under förhistorisk tid avlöste enligt sägnen olika kejsardynastier varandra. Uppgifterna om den första Xia-dynastin är mycket knapphändiga. Om den andra Shang-dynastin som varade mellan 1600–1040 f.Kr. vet man mer. Det fanns då ett fullständigt skriftspråk och astronomin var väl utvecklad. Under den efterföljande Zhu-dynastin var samhället feodalt med flera delstater. Efter inre stridigheter segrade fursten **Shi Huangdi** i den östligaste provinsen Quin och utropade sig 221 f.Kr. som kejsare under namnet Quin Shi Huangdi. Det första kejsardömet, Quin-dynastin, varade bara i femton år. Shi Huangdi avled 215 f.Kr. men under hans korta regim förändrades Kina och många av de grundläggande principerna för det första kejsardömet skulle finnas kvar i tvåtusen år. Under Quindynastin avskaffades feodalstaterna och lagar stiftades som gällde för hela riket. Skrift-, mynt-, längd- och viktsystemen standardiserades och blev gemensamma för hela kejsardömet. Shi Huangdi började bygga den kinesiska muren inte bara som skydd mot främmande makter utan också för att hindra de egna medborgarna från att fly. Murbygget kom att fortsätta fram till 1600-talet. Shi Huangdi lät också bränna alla böcker som inte handlade om medicin, spådomskonst och skogsbruk samt historiska verk som skrivits Quin-historiker. Han avrättade akademiker som använde det förflutna för att kritisera nuet. Shi Huangdi uppförde ett mausoleum där han är begravd och där man hittat den berömda terrakottaarmén.

Efter Shi Huangdis död avlöste dynastierna varandra. Kina invaderades under vissa perioder av främmande trupper men det påverkade inte kulturen. De verkar som inkräktarna anpassade sig till den kinesiska kulturen istället för att påtvinga kineserna sin egen. Naturliga gränser med höga berg och stora vattendrag bidrog tillsammans med den kinesiska muren till Kinas isolering från kulturerna i andra delar av världen. År 1912 blev Kina republik och efter ett blodigt inbördeskrig bildades Folkrepubliken Kina 1949.

Som i alla utvecklade samhällen hade också Kina behov av matematiska kunskaper och färdigheter. Arvsskiften, handel och tidmätning är några områden som kräver matematik. Sättet att beteckna tal är som vi tidigare sett av stor betydelse. I Kina använde man sig av ett decimalt positionssystem som var starkt knutet till de räknebord eller *abacusar* som man använde. I figur 11.1 visas två olika system. Det äldsta användes tämligen oförändrat i mer än tusen år. Efter c:a 400 f.Kr. ersattes de av ett system med stavar.



Figur 11.1: Ovan visas en tabell över de siffror som användes under Kinas forntid. Vi observerar att t.ex. tecknet för talet 300 är en kombination av tecknet för 3 och tecknet för 100 och vi kan tolka det som $3 \cdot 100$. Talet 562 skrivs alltså med hjälp av tre siffror: Siffran för 500, som är en kombination av tecknen för 5 och 100, siffran för 60, en kombination av tecknet för 6 och 10 samt siffran 2. Detta talsystem kräver inte en nolla. Nedan visas de tecken som används vid räkning med räknebord. Talsystemet är uppbyggt på samma sätt som vårt nuvarande decimalsystem. Man använde sig av stavar som lades i bordets rutor. Stavarna lades vågrätt (ental) eller lodrätt (femtal). På det sättet betecknades talen 1–9. Nederst visas hur talet 3 068 skrevs. Siffran noll markeras med en tom ruta.

Texter som innehåller matematik är av relativt sent datum vilket kan förklaras av bokbålet 213 f.Kr. Före 100 f.Kr. finns bara fragmentariska delar bevarade förutom boken *Suan shu shu* ("En bok om aritmetik") som upptäcktes 1984 och som är skriven på bambublad. Det finns flera matematiska texter från de första århundradena efter Kristus. Under Sui-dynastin som endast varade från 581 till 618 gjordes stora försök att ena landet som innan var splittrat i småstater. Utbildningen blev viktig och matematik undervisades vid det kejserliga universitetet. Det gjordes en genomgång av drygt tio av de existerande böckerna i ämnet. De fel som fanns rättades och man gav ut dem på nytt. Den viktigaste var *Jiuzhang suanshu* eller *Nio kapitel om den matematiska konsten*. Den kinesiske matematikern **Liu Hui** (c:a 220–80) kommenterade år 263 verket, som innehöll 246 problem med lösningar. Liu Hui påstod i sina kommentarer att de äldsta delarna härstammade från 1000 f.Kr. men det anses tveksamt bl.a. med tanke på bokbålet 212 f.Kr. Det troliga är att problemen formulerats under tiden 210 f.Kr. till 50 e.Kr. Verket kom att dominera kinesisk matematik under 1600 år och dess roll kan jämföras med *Elementas* i västerlandet. Skillnaderna är emellertid stora. Båda dokumenterar den tidens matematiska kunskap men de gör det på helt olika sätt. Medan *Elementa* bygger upp en logiskt deduktiv framställning där bevis spelar en stor roll så är framställningen i *Nio kapitel om den matematiska konsten* problemorienterad. Att boken innehåller avancerad matematik framgår med önskvärd tydlighet av följande redogörelse för innehållet:

1. *Lantmäteri* – Innehåller förutom areamätning räknelagar för addition, subtraktion, multiplikation av hela tal och av bråk samt bestämning av största gemensamma delaren av två heltal. De områden som undersöks är rektanglar, trianglar, trapetser och cirklar. Talet π bestäms med stor noggrannhet.

2. *Hirs och ris* – Innehåller problem om utbyte av varor som spannmål, bönor och utsäde. Det matematiska innehållet är proportionalitet, procent och reguladetri.

3. *Fördelning av summor* – Här studeras hur summor skall fördelas till tjänstemän av olika rang. Förutom direkt proportionalitet studeras omvänd och sammansatt proportionalitet. Aritmetiska och geometriska summor används i några problem.

4. *Kort bredd* – I de första problemen beräknas längden av ett område om bredden ökas och arean är konstant. Vidare behandlas bestämning av kvadrat- och kubikrötter. Begrepp som gränsvärde och infinitesimaler förekommer och det görs ett försök att approximera volymen av en sfär som emellertid visar sig vara felaktigt. Försöket avslutas med kommentaren: "Låt oss lämna problemet till den som kan tala om sanningen.".

5. *Ingenjörskonst* – Här behandlas konstruktion av kanaler, diken, dammar m.m. Volymer av prismor, pyramider, tetraedrar, cylindrar och koner beräknas. Liu Hui uppfinner en "uttömningsprincip" för att bestämma den korrekta volymen av en tetraeder.

6. *Rättvis fördelning av varor* – Här studeras proportionalitet. Kapitlet innehåller förutom problem om skatter och fördelningar också hastighets- och flödesproblem.

7. *Över- och underskott* – Linjära ekvationer löses genom att man gissar två lösningar och bestämmer den korrekta lösningen med hjälp av felen.

8. *Beräkning med hjälp av kvadratiska tabeller* – Problemen leder till linjära ekvationssystem med upp till sex obekanta. Väsentligen använder man vad vi kallar Gausselimination. Negativa tal och räknelagar för dem behandlas.

9. *Rätvinkliga trianglar* – Här behandlas problem som leder till det vi kallar Pythagoras sats och som kineserna kallar ”Gouguregeln”. Några problem löses med hjälp av likformighet. Vidare behandlas andragradsekvationen som löses med hjälp av geometriska resonemang.

De övriga verken som ingick i Sui-dynastins undersökning behandlade i stort sett samma områden som i *Nio kapitel om den matematiska konsten*.

Från 600-talet och fram till 1200-talet var utvecklingen inom matematiken svag. Kraven från astronomin medförde att trigonometriska tabeller konstruerades och att interpolationsmetodiken förbättrades. **Jia Xian** (c:a 1010–70) utvecklade och förbättrade metoder för att bestämma kvadrat- och kubikrötter samt för att numeriskt bestämma nollställen till polynom. Han undersökte potenser av summor och han konstruerade det vi idag kallar Pascals triangel.

En ny storhetstid för kinesisk matematik inträffade under 1200- och 1300-talet. År 1248 ger **Quin Jiushao** (1202–61) ut *Shushu Jiuzhang* (”Ett matematiskt arbete i nio avdelningar”) som inte ska förväxlas med *Nio kapitel om den matematiska konsten*. Det innehåller bl.a. det vi idag kallar kinesiska restsatsen som handlar om att bestämma tal som har givna rester vid division med ett antal givna heltal. I verket studeras också ekvationer upp till och med grad 10 och de löses med hjälp det vi kallar Ruffini-Horners schema, uppkallad efter de båda europeiska matematikerna Paulo Ruffini och **William Horner** som var verksamma på 1800-talet. Qin Jiushao visar också Herons formel. **Li Zhi** (1192–1279) studerade polynomekvationer och löste geometriska problem algebraiskt. **Yang Hui** (c:a 1238–98) gjorde en detaljerad analys av de matematiska metoderna i *Nio kapitel om den matematiska konsten* och studerade magiska kvadrater och magiska cirklar. **Guo Shoujing** (1231–1316) arbetade med sfärisk trigonometri, löste ekvationer med Ruffini-Horners metod och utvecklade metoder för interpolation. **Zhu Shijie** (c:a 1260–1320) studerade bl.a. polynom av flera variabler och bestämde summor av oändliga serier.

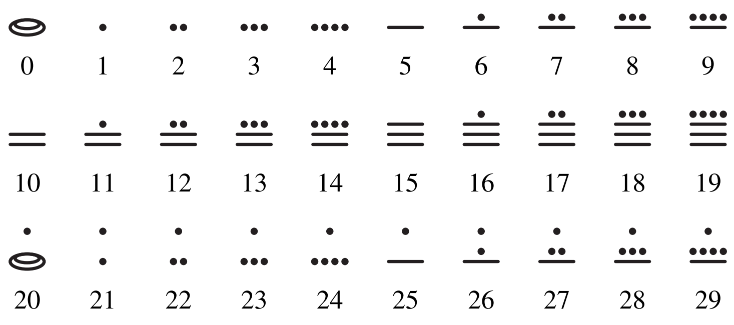
Figur 11.2: Från vänster: Liu Hui som under 200-talet kommenterade *Nio kapitel om den matematiska konsten*, Guo Shoujing som bl.a. utvecklade sfärisk geometri undre den kinesiska matematikens storhetstiden på 1200- och 1300-talen, samt Li Shanlan, som under 1800-talet översatte västerländsk matematik till kinesiska och framställde delar analysen enligt kinesisk tradition. (Bild: `2Y8P1ti`, `3egpmVi`, `2YaRaoD`)

Efter storhetstiden stagnerade utvecklingen. *Nio kapitel om den matematiska konsten* var fortfarande modell för undervisningen och nya arbeten skrevs i dess anda. Under 1700-talet och framåt gjorde omfattande arbeten för att dokumentera de klassiska matematiska verken och de har därför blivit tillgängliga för oss idag. Hundra år tidigare hade västerländska arbeten började översättas till kinesiska. En av de viktigaste översättarna av västerlands matematik var **Li Shanlan** (1811–82). Han behandlar på sitt eget sätt logaritmer, oändliga serier och kombinatorik och hans framställning följer den kinesiska traditionen.

Västerländska matematiker började föreläsa i Kina under början av 1900-talet och samtidigt började kinesiska studenter att studera utomlands. Kina deltog för första gången vid International Congress of Mathematics i Zürich 1932. Landet är sedan slutet av 1900-talet medlem i International Mathematical Union.

11.2 Talsystem och kalendrar hos Mayafolket

I de delar av Mellanamerika som idag omfattar södra Mexiko med Yucatánhalvön, Guatemala, Belize, El Salvador och Honduras utvecklades det vi kallar Mayakulturen. Nya fynd och ny teknik visar att den funnits från 2000 f.Kr. Den nådde sin höjdpunkt under den s.k. *klassiska perioden* som varade 260–900 e.Kr. Därefter gick den tillbaka och när spanjorens erövrade områden i början av 1500-talet hade dess betydelse minskat. Man kan emellertid se spår av storhetstiden. Det har funnits stora städer med över 100 000 invånare som visar att samhället måste varit välutvecklat med en fungerande infrastruktur. Imponerande byggnadsverk som pyramider visar på ett avancerat tekniskt kunnande. Det måste ha funnits utvecklad matematisk kunskap för att göra de beräkningar som krävts. Tyvärr finns inte så mycket skriftligt material bevarat. Under spanjorernas kolonialisering hjälpte en ung spansk missionär, **Giego de Landa**, ursprungsbefolkningen. Samtidigt ville han få dem att avsvära sig sin gamla tro och övergå till katolicismen. Gamla texter förstördes. Möjligen ångrade de Landa sig. Han skrev en bok *Relación de las cosas de Yucatán* (1566) (”Yucatán före och efter erövringen”) som återfanns i Madrid 1869. I den beskriver han Mayafolkets hieroglyfer, seder, tempel, religiösa vanor och historia. Ett fåtal dokument överlevde de Landas åtgärder och de finns bevarade i Sächsische Landesbibliothek Dresden och kallas *Dresden Codex*.



Figur 11.3: Mayafolkets positionssystem med basen 20. Bilden visar beteckningarna för talen 0–29.

Det fanns i mayakulturen två kalendrar. Den rituella kalendern, *Tzolkin*, bestod av 260 dagar och var indelad i 13 ”månader” med 20 dagar vardera. Månaderna hade namn efter gudar. Den andra kalendern för mer civilt bruk kallades *Haab* och bestod av 18 ”månader” med 20 dagar och en månad, *Wayeb'*, med fem dagar. Den andra kalenderns månader var uppkallade efter tilldragelse inom jordbruket eller religiösa händelser. Wayeb' var en olycksmånad. Under Wayeb' varken tvättade eller kammade man sig inte och man utförde inte heller hårt arbete. Ett barn som föddes under Wayeb' ansågs bli olyckligt och fattigt under hela sitt liv.

Det finns inte så mycket bevarad dokumentation av den matematik som utvecklats av Mayafolken. Vi vet emellertid att de använde ett positionssystem med basen 20 för att beteckna talen och att de använde sig av tre symboler: Ental betecknades med punkter, fem punkter ersattes med ett vågrätt streck och en snäcka betecknade talet 0. I figur 11.3 visas beteckningarna för talen 0–29.

Om vi för enkelhets skull använder våra hinduarabiska siffror så är det tal mayafolket skrev (5; 12; 0; 7) lika med det tal som vi betecknar med

$$7 + 0 \cdot 20 + 12 \cdot 20^2 + 5 \cdot 20^3 = 44\,807.$$

Detta resultat skulle vi få om basen 20 användes konsekvent. Den dokumentation vi har från *Dresden Codex* visar emellertid något annat. De två första positionerna anger i vårt exempel tal upp till 400. Enligt den skriftliga dokumentationen anger de tal upp till 360. Därefter övergår man till potenser av 20 och vårt tal är lika med

$$7 + 0 \cdot 20 + 12 \cdot 18 \cdot 20 + 5 \cdot 18 \cdot 20^2 = 40\,327.$$

De skrifter vi har tillgängliga är utformade av astronomer och präster. Det är troligt att deras sätt att räkna har med antalet dagar på året att göra. Det finns forskare som anser det troligt mayafolket i vardagslivet använde det enklare och mera konsekventa 20-systemet.

Mayafolken kunde göra mycket exakta astronomiska mätningar trots en relativt enkel utrustning. De beräknade längden av ett år till 365.343 dagar och längden av månvarv till 29.5308 dagar. Idag räknar man med 365.242198 respektive 29.53059 dagar. Uppenbarligen var mayafolkets astronomer inte bara skickliga på att göra mätningar. De måste också haft goda matematiska färdigheter.

Del II

Utvecklingen inom olika matematikområden

Kapitel 12

Aritmetik och beräkningsteknik

Aritmetiken är den mest ursprungliga delen av matematiken. Att kunna bestämma antal genom att införa tal, att införa ändamålsenliga beteckningar för dem och att kunna använda de fyra räknesätten är grundläggande för all matematik. Från början var problemen relativt enkla men kraven växte och de blev mer komplicerade, samtidigt som kraven på exakthet ökade. Räknandet överläts ofta till specialister och blev en konstform. Den första räkneläran i Sverige kallades *Recknekonsten*. Den tekniska utvecklingen ställde krav på ökad räkneeffektivitet samtidigt som den så småningom erbjöd nya hjälpmedel som underlättade räknearbetet. Det senaste ledet i den utvecklingen är datorn.

Den marockanske matematikläraren **Georges Ifrah**, numera bosatt i Frankrike, har i ett stort verk i två delar, *Räknekonstens kulturhistoria*, skildrat räknekonstens utveckling från forntid till nutid. Det är ett verk som omfattar över tusen sidor och är frukten av ett tålmodigt och systematiskt arbete där han under en tioårsperiod befann sig på resande fot för att samla in data. Den läsare som vill fördjupa sina kunskaper hänvisas till Ifrahs prisade verk.

12.1 Tvåflodslandet

12.1.1 Ett positionssystem med basen 60

I vårt försök att förstå den utveckling som lett till våra dagars matematik startade vi i Mesopotamien eller Tvåflodslandet som var beläget kring floderna Eufrat och Tigris. Där hade det under 2000-talet före vår tideräkning utvecklats ett skriftspråk, som vi kallar kilskrift. Med hjälp av enkla verktyg trycktes tecken in på lertavlor som sedan brändes. Flera tavlor har ett matematiskt innehåll. Den matematik som utvecklades under denna tid kallas ofta babylonisk efter områdets största stad Babylon.

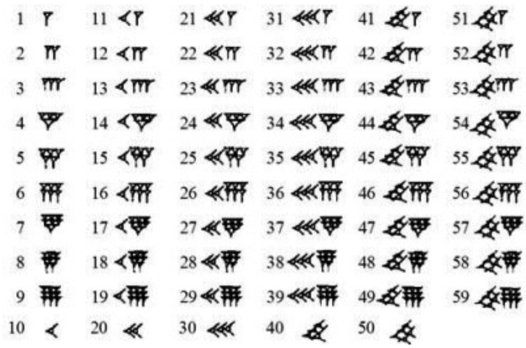
Det talsystem som användes var ett positionssystem med basen 60. I figur 1.2 visades beteckningarna för talen 1–59 och vi återger den i figur 12.1. Systemet använder sig av kombinationer av två tecken som vi stiliserar | och $<$ och de representerar 1 respektive 10.

Talen 82 och 7 273 skrivs på följande sätt:

$$82 = 1 \cdot 60 + 22 = |\ \ {<}{<}||$$

respektive

$$7\,273 = 2 \cdot 60^2 + 1 \cdot 60 + 13 = ||\ \ |\ \ {<}|||\ .$$



Figur 12.1: Talen 1–59 i kilskrift. (Bild: `2ANiJLz`)

12.1.2 Ett positionssystem utan nolla

Ett positionssystem kräver en nolla för att det inte skall kunna uppstå tolkningssvårigheter. En sådan verkar ha saknats i det babyloniska systemet och det måste ha inneburit problem. Talet 7 273 skrivs || | <||| men samma teckenkombination kan också betyda

$$2 \cdot 60^3 + 1 \cdot 60^2 + 13 \cdot 60 = 436\,380$$

eller

$$2 \cdot 60^4 + 1 \cdot 60^3 + 13 \cdot 60^2 = 26\,182\,800.$$

Talsystemet användes också för att uttrycka bråkdelar och vår teckenkombination || | <||| kan också betyda

$$2 \cdot 60 + 1 + 13 \cdot \tfrac{1}{60} \quad \text{eller} \quad 2 + 1 \cdot \tfrac{1}{60} + 13 \cdot \tfrac{1}{60^2} \quad \text{eller} \quad 2 \cdot \tfrac{1}{60} + 1 \cdot \tfrac{1}{60^2} + 13 \cdot \tfrac{1}{60^3}.$$

Det är uppenbart att det är sammanhanget som avgör vilket alternativ man skall välja. De matematiska problemen ställdes nästan alltid i en situation där talen kunde kopplas till konkreta storheter som t.ex. areor, volymer, pengar eller tidsmått.

Men även om den konkreta situationen kan avgöra var man skall sätta ”decimalkommat” så kan det uppstå problem om det i ett tal finns en nolla mellan två av ”siffrorna”. Talet som skrivs || kan betyda 2, men det kan också betyda 61 eller om det till äventyrs skulle var en nolla mellan tecknen 3601. Det är rimligt att tänka sig att även här kan man ibland av sammanhanget inse vilken tolkning som är riktigt. Det måste emellertid finnas situationer där detta är svårt. Det verkar som babylonierna gjorde ett extra mellanrum för att markera att man hoppade över en potens av 60.

12.1.3 De fyra räknesätten

Hur använde babylonierna sitt talsystem för att addera, subtrahera, multiplicera och dividera?

Addition och subtraktion kan göras ungefär som i vårt decimalsystem. Man bearbetar varje position för sig och börjar med den som har lägst värde. Vid addition får man komma ihåg att ersätta tio stycken | med en < och på vanligt sätt räknar man med minnessiffror. Vid subtraktion kan man behöva omvandla en < till tio | och man kan ibland behöva låna från en högre position.

Multiplikation i ett 60-system är svårare. Vi har en algoritm som bygger på att man behärskar multiplikationstabellerna för de första nio talen som är grundstenarna i vårt positionssystem. Babylonierna skulle i princip kunna använda samma metodik men behöver då 59 multiplikationstabeller. I praktiken måste detta innebära stora svårigheter. Visserligen har man funnit multiplikationstabeller och vi har visat en i figur 1.2 men förmodligen använde de andra metoder och andra tabeller. Man har funnit tabeller med kvadrater och kuber och de har förmodligen spelat en stor roll vid beräkningar. En produkt av två tal kan beräknas med hjälp av kvadrater. Med vårt skrivsätt har vi sambanden

$$a \cdot b = \tfrac{1}{2}\big((a+b)^2 - a^2 - b^2\big) \quad \text{och} \quad a \cdot b = \tfrac{1}{4}\big((a+b)^2 - (a-b)^2\big).$$

Det är mycket troligt att babylonierna använde sig av sådana samband för att beräkna produkter. Det finns som vi nämnt många lertavlor med kvadrattal. En berömd lertavla, *Plimpton 322*, innehåller pythagoreiska tripler. Vi återkommer till den i avsnitt 13.1.

Division Babylonierna hade inte någon divisionsalgoritm i vår mening. En kvot a/b beräknas med hjälp av produkten

$$\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

och för att kunna beräkna den finns tabeller för $1/b$. Konstruktionen av sådana tabeller underlättas av att basen $60 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5$ är rik på delare. Vi ger några exempel och byter beteckningssystem. I stället för || | ≺||| skriver vi $(2; 1; 13)$ och istället för ≺≺| ≺| skriver vi $(21; 11)$.

b	$1/b$
2	$1/2 = 30/60 = (30)$
3	$1/3 = 20/60 = (20)$
9	$1/9 = 400/3600 = (6 \cdot 60 + 40)/60^2 = 6/60 + 40/60^2 = (6; 40)$
25	$1/25 = 144/3600 = 2/60 + 24/60^2 = (2; 24)$
30	$1/30 = 2/60 = (2)$
50	$1/50 = 72/3600 = 1/60 + 12/60^2 = (1; 12)$
64	$1/64 = 15 \cdot 15 \cdot 15/60^3 = 3375/60^3 = 56/60^2 + 15/60^3 = (56; 15)$

Så länge nämnaren b bara innehåller faktorerna 2, 3 och 5 är det möjligt att genom förlängning skriva $1/b$ som ett bråk där nämnaren är en potens av 60 och $1/b$ kan framställas exakt i 60-systemet. Vad händer om b innehåller andra faktorer? Antag t.ex. att $b = 7$. Hur beräknade babylonierna $1/7$? Det är omöjligt att representera talet exakt i deras system. De var tvungna att approximera. Det kan ha gjort på följande sätt

$$\frac{1}{7} = \frac{13}{91} \approx \frac{13}{90} = \frac{520}{3\,600} = \frac{8 \cdot 60 + 40}{60^2} = 8 \cdot \frac{1}{60} + 40 \cdot \frac{1}{60^2} = (8; 40).$$

Vi har nämnt att det finns lertavlor med multiplikationstabeller, tabeller på kvadrater och kuber samt tabeller på inverterade värden. Man har också hittat en tabell där man beräknat $n^3 + n$ för naturliga tal n. Den har förmodligen använts för att lösa tredjegradsekvationer.

Figur 12.2: Bilden till vänster visar en kilskriftstavla som har stiliserats i bilden till höger. (Bild: `2MNpCyP`)

12.1.4 En lertavla som visar prov på avancerad beräkningsteknik

En av de mest berömda lertavlorna med babylonisk matematik visade vi redan i figur 1.3. Vi återger den på nytt i figur 12.2 och ger en mer detaljerad tolkning.

Kvadraten i figuren har sidan (30) och diagonalen $(42; 25; 50)$. Förhållandet mellan diagonalen och sidan har man angivit till $(1; 24; 51; 10)$ d.v.s. $1 + 24/60 + 51/60^2 + 10/60^3 \approx 1.414212963$ som alltså är en approximation av $\sqrt{2}$. En korrekt approximation med nio decimaler är 1.414213562. Felet är alltså mindre än $6 \cdot 10^{-7}$ vilket måste betecknas som anmärkningsvärt. Hur har de kunnat nå en sådan hög grad av precision? Att det bara rör sig om god mätteknik är uteslutet. De måste ha använt någon form av beräkningsmetod. En enkel metod att snabbt komma fram till en god approximation ges som följer.

Låt oss först slå fast att babylonierna måste använt Pythagoras sats åtminstone i specialfallet då kateterna är lika långa. Det är för övrigt relativt enkelt att genom en figur se att arean av kvadraten på diagonalen är lika med två gånger arean av kvadraten. Låt oss anta att man beräknat ett närmevärde för diagonalen i en kvadrat med sidan 1 till det som anges i figuren nämligen $(1; 24; 51; 10)$. Den aktuella diagonalen får man sedan genom att multiplicera detta tal med längden av sidan som är (30). Men hur kan man med elementära metoder på ett enkelt sätt bestämma ett tal vars kvadrat är lika med 2? Det är det samma som att bestämma ett tal som är lika med talets inverterade värde multiplicerat med 2 eller med vårt skrivsätt bestämma x så att

$$x = \frac{2}{x}.$$

Det ligger nära till hands att testa olika värden på x. Vi börjar med $x = 1$. Då är vänsterledet lika med 1 och högerledet 2 så $x = 1$ duger inte. Vi försöker istället med talet 1.5 som ligger mitt emellan 1 och 2. Då är vänsterledet 1.5 medan högerledet är lika med $4/3$. Inte heller 1.5 uppfyller kraven men vi är närmare en lösning. Vi försöker med det tal som ligger mitt emellan $1.5 = 3/2$ och $4/3$ nämligen $17/12$. Då är vänsterledet $17/12 \approx 1.416667$ och högerledet $24/17 \approx 1.411765$. Vi har inte en exakt överensstämmelse men skillnaden mellan de båda leden är nu mycket liten. Upprepar vi förfarandet får vi allt bättre approximationer. Redan vid nästa försök blir skillnaden mellan de båda leden mindre än $5 \cdot 10^{-6}$.

Det finns alltså en enkel metod, som bara använder sig av de fyra räknesätten och som snabbt ger en mycket god approximation. Det är naturligtvis inte alls säkert, kanske inte ens troligt, att babylonierna använde sig av denna metod men den är enkel och effektiv. En mer genomtänkt framställning av hur babylonierna approximerade $\sqrt{2}$ finns i en artikel av **David Fowler** och **Eleanor Robson** med titeln *Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in Context* i tidskriften *Historia Mathematica* 25 (1998).

12.2 Faraonernas Egypten

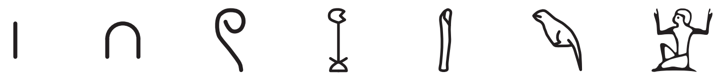
12.2.1 Ett talsystem med nya symboler för varje tiopotens och med stambråk

De viktigaste källorna till vår kunskap om matematiken i det forna Egypten är *Moskvapapyrusen* från 1850 f.Kr. och *Rhindpapyrusen* från 1600 f.Kr. De är utformade av skrivare, som var räknekunniga och som hade en hög ställning i det egyptiska samhället. Skrivaren till *Moskvapapyrusen* är okänd men vi vet att skrivaren till *Rhindpapyrusen* hette **Ahmes**.

I det talsystem som användes i det forntida Egypten representeras varje tiopotens av en ny hieroglyf. Talet 1 representeras med | och tio |:or ersätts med ∩, som skall vara en bild av boskap. I figuren visas hieroglyferna för talen 1–10, 15 och 20.

Figur 12.3: Hieroglyferna för talen 1–10, 15 och 20.

I figur 12.4 visas hieroglyferna för 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 och 1 000 000.



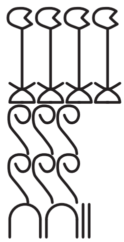
Figur 12.4: Hieroglyferna för talen 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 100 000 och 1 000 000.

Talet 100 symboliseras av ett rep, talet 1 000 av en lotusblomma, 10 000 av ett finger, 100 000 av en groda och 1 000 000 av en gud som sträcker upp sina händer eller kanske en häpen man.

Beteckningen för talet 4 622 visas i figur 12.5. Den består av fyra exemplar av tecknet för 1 000, 6 exemplar av tecknet för 100, två exemplar av tecknet för 10 och två exemplar av tecknet för 1.

Egyptiernas talsystem är inte ett positionssystem. Det har ingen nolla och det behövs inte heller för att talen skall kunna framställas utan att det skall uppstå tveksamheter.

För att kunna utföra divisioner införde egyptiern stambråk d.v.s. bråk med täljaren 1 samt en särskild symbol för $2/3$. Se figur 12.6. Hieroglyfen för $1/2$ är en bild av ett linnetyg som är vikt på mitten. De övriga stambråken $1/n$ består av en bild av mun över tecknet för nämnaren n. Talet $2/3$ är bilden av en mun över två olika långa streck.



Figur 12.5: Beteckningen för 4 622.

Figur 12.6: Hieroglyferna för några stambråk.

De egyptiska skrivarna räknade alltså med bråk men förutom $2/3$ hade de bara beteckningar för stambråk. Varje bråk kan naturligtvis skrivas som en summa av stambråk. Talet m/n kan ju skrivas som en summa av m termer som alla är lika med $1/n$. Men framställningen är inte entydig. Vi har t.ex.

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6}.$$

Vilken framställning valde skrivarna? Bråken är resultat av divisioner och framställningen blir ofta beroende av den metod som använts. Vi återkommer till det i nästa avsnitt om de fyra räknesätten.

12.2.2 De fyra räknesätten

Addition och subtraktion kan utföras enkelt och rakt fram. Man adderar de olika symbolerna var för sig och börjar lämpligen med dem som representerar de lägsta värdena. Tio exemplar av en symbol byts ut mot den symbol som har närmast högre värde. Vid subtraktion kan man behöva ”låna” d.v.s. en symbol ersätts med tio symboler av närmast lägre värde.

Multiplikation bygger, som vi visade i avsnitt 1.2, på fördubbling. Vi ger ett exempel och använder de siffror vi är vana vid istället för de egyptiska hieroglyferna. För att beräkna $41 \cdot 83$ använde sig skrivaren av följande tabell:

1	83	√
2	166	
4	332	
8	664	√
16	1 328	
32	2 656	√

De talen som bockats för adderas och ger resultatet av multiplikationen. Vi har alltså att

$$41 \cdot 83 = 83 + 664 + 2\,656 = 3\,403.$$

Vi kan med hjälp av våra vanliga metoder kontrollera att resultatet stämmer. Varför gör det det? Hur är tabellen konstruerad och hur beräknas produkten? På första raden skriver vi talen 1 och den ena faktorn 83. På andra raden dubblerar vi båda talen och vi fortsätter på detta sätt att dubblera och vi slutar när det första talet i raden är 32. Nästa rad skulle nämligen börja med 64 och det talet är större än 41. Vi väljer ut tal ur första kolumnen så att deras summa är lika med 41 och vi finner att $41 = 32 + 8 + 1$. Med moderna beteckningar får vi att

$$83 + 664 + 2\,656 = 83 \cdot 1 + 83 \cdot 8 + 83 \cdot 32 = 83(1 + 8 + 32) = 83 \cdot 41.$$

Metoden fungerar alltid. Vi vet att varje positivt heltal har en framställning i ett binärt talsystem där vi bara använder siffrorna 0 och 1. I vårt speciella fall är

$$41 = 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5.$$

En generell beskrivning av metoden i moderna termer kan vara följande: Vi vill beräkna produkten $a \cdot b$ där a och b är positiva heltal. Vi skriver den ena faktorn a i det binära systemet och talen 1, 2, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 16$, ... skrivs upp i den första kolumnen. Vi slutar när 2^n är större än a och bockar för de tal där a har en etta i den binära framställningen. Motsvarande tal i den andra kolumnen adderas och summan är den sökta produkten.

För tydlighetens skull skall sägas att den generella förklaringen som vi nyss gett inte är historisk. De egyptiska skrivarna använde sig naturligtvis inte av vår terminologi och inte av våra beteckningar. Konkreta exempel fick antagligen vara mönster för hur räkningarna skulle utföras och något sammanhängande resonemang varför metoden fungerar finns inte dokumenterad.

Division Av de fyra räknesätten ger division upphov till de mest komplicerade beräkningsmetoderna. Det gäller för alla talsystem och så också för det egyptiska. Vi skall studera några exempel från *Rhindpapyrusen*. Bråktalen är väsentliga vid division och de bråktal de egyptiska skrivarna använde sig av var som vi tidigare nämnt stambråken $1/2$, $1/3$, $1/4$, $1/5$, ... samt $2/3$. Vi är vana vid att bråken har en täljare och en nämnare men i det egyptiska beteckningssystemet anges bara nämnare. Beteckningarna styr i stor utsträckning tankarna och för att bättre förstå hur egyptierna räknade undviker vi att skriva ut täljaren. Att använda de egyptiska beteckningarna är utrymmeskrävande och komplicerat men en medelväg skulle vara att för stambråken använda beteckningarna $\overline{2}$, $\overline{3}$, $\overline{4}$, $\overline{5}$, ... och för $2/3$ beteckningen $\overline{1\frac{1}{2}}$.

I det första exemplet skall 19 divideras med 8. I *Rhindpapyrusen* finner vi följande uppställning:

$$\begin{array}{rcl} 8 & 1 & \\ 16 & 2 & \surd \\ & & \\ 4 & \overline{2} & \\ 2 & \overline{4} & \surd \\ 1 & \overline{8} & \surd \end{array}$$

Hur har skrivaren resonerat? Det verkar som han söker det tal som 8 skall multipliceras med för att produkten skall bli 19. Han gör först en fördubbling och får 16. Ytterligare en fördubbling skulle ge 32 som är större än 19. Han övergår till att halvera och får i tur och ordning 4, 2 och 1. Han noterar att $19 = 16 + 2 + 1$ och märker ut motsvarande rader. I de märkta raderna har andra kolonnen värden 2, $\overline{4}$ och $\overline{8}$. Han dar nu slutsatsen att det sökta talet är $2\,\overline{4}\,\overline{8}$ eller med våra beteckningar $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = 2\frac{3}{8}$.

Metoden med fördubblingar och halveringar fungerar eftersom divisorn 8 är en potens av 2. Hur gör man om så inte är fallet? Vi studerar ett annat exempel från *Rhindpapyrusen* där beräkningarna är betydligt svårare att följa. Lydelsen av problemet är ungefär: ”Kom till 2 genom att operera på 17”. En större del av *Rhindpapyrusen* ägnas åt att fördubbla stambråk och detta exempel är en del av den. Man vill alltså veta hur man genom multiplikationer med 17 skall få 2. För oss är det självklart. Det tal vi söker är $2/17$ men egyptierna har ingen beteckning för det. Beräkningarna är komplicerade och vi väljer att först beskriva skrivarens manipulationer, som inte alltid är så lätta att genomskåda, och därefter göra en tolkning med våra beteckningar.

Beräkningarna görs i ett antal steg. Först visar skrivaren hur han kommer till ett tal mindre än 2 genom att successivt multiplicera med $\overline{1\frac{1}{2}}$, $\overline{3}$, $\overline{6}$ och $\overline{12}$.

1	17
$\overline{1\frac{1}{2}}$	$1\,1\,\overline{3}$
$\overline{3}$	$5\,\overline{1\frac{1}{2}}$
$\overline{6}$	$2\,\overline{2}\,\overline{3}$
$\overline{12}$	$1\,\overline{4}\,\overline{6}$

Vi har nu passerat 2 och skrivaren fortsätter nu med att först beräkna skillnaden mellan 2 och $1\,\overline{4}\,\overline{6}$. Denna subtraktion är besvärligare än de vi tidigare skisserat eftersom en av termerna innehåller stambråk. Skrivaren anger skillnaden till $\overline{3}\,\overline{4}$ utan att beskriva hur han kommit fram till det resultatet. Liknande beräkningar har gjorts och redovisats i tidigare problem och han har förmodligen utnyttjat dem. Skrivaren gör nu följande beräkningar:

1	17	
2	34	
3	51	$\overline{3}$
4	68	$\overline{4}$

och drar slutsatsen att om $\overline{51}\,\overline{68}$ adderas till $\overline{12}$ så får vi det resultat som söks. Det tal 17 skall multipliceras med för att få 2 är alltså $\overline{12}\,\overline{51}\,\overline{68}$.

Innan vi analyserar den egyptiska skrivarens metoder med hjälp av vårt beteckningssystem studerar vi hur han bestämmer skillnaden mellan 2 och $1\,\overline{4}\,\overline{6}$. Han uttrycker de båda bråken med hjälp av $\overline{12}$ och skriver $\overline{4}$ med hjälp av 3 och $\overline{12}$ samt $\overline{6}$ med hjälp av 2 och $\overline{12}$. Medan övriga hieroglyfer är svarta har tecknen för 3 och 2 skrivits med röd färg. Han adderar 3 och 2. Summan 5 subtraheras från 12 och han undersöker hur man får skillnaden 7 med följande uppställning:

1	12	
$\overline{1\frac{1}{2}}$	8	
$\overline{3}$	4	$\surd$
$\overline{2}$	6	
$\overline{4}$	3	$\surd$

Skrivaren drar nu slutsatsen att den sökta skillnaden är $\overline{3}\,\overline{4}$. Metoden för naturligtvis tankarna till den metod vi använder för att addera bråk. Först gör vi liknämnigt och sedan adderar vi täljarna. Bråken i det egyptiska skrivsättet har inga täljare. Skrivaren markerar motsvarigheterna med en annan färg.

Vi beskriver nu den egyptiske skrivarens räkningar med hjälp av våra egna beteckningar. Först beräknar han $17/12$ och får

$$17 \cdot \tfrac{1}{12} = 1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} < 2.$$

Därefter beräknar han skillnaden mellan 2 och 17/12

$$2 - \left(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6}\right) = 1 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6} = 1 - 5 \cdot \tfrac{1}{12} = 7 \cdot \tfrac{1}{12} = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}.$$

Han konstaterar att

$$\frac{1}{3} = 17 \cdot \tfrac{1}{51} \quad \text{och} \quad \tfrac{1}{4} = 17 \cdot \tfrac{1}{68}$$

och kan då dra slutsatsen att

$$17 \cdot \left(\tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{51} + \tfrac{1}{68}\right) = 17 \cdot \tfrac{1}{12} + 17 \cdot \tfrac{1}{51} + 17 \cdot \tfrac{1}{68} = 17 \cdot \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}.$$

Genom att utnyttja tidigare resultat kan vi nu konstatera att

$$17 \cdot \left(\tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{51} + \tfrac{1}{68}\right) = \left(1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6}\right) + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) = 1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{6} + \left(1 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{6}\right) = 2.$$

Lösningen på problemet är alltså $1/12 + 1/51 + 1/68$.

Det kan verka vara mycket arbete för att skriva $2/17$ som en summa av stambråk. Vägen dit är minst sagt slingrig. Man ställer sig frågan: Varför just dessa stambråk? Det finns oändligt många möjligheter. Det hade varit betydligt enklare att skriva $2/17 = 1/17 + 1/17$ eller $2/17 = 1/9 + 1/153$. Svaret på den frågan ligger nog till en del i hur egyptierna uppfattade bråken. Kanske skulle stambråksframställningen ske enligt vissa principer? Vilka dessa är framgår inte tydligt. Vi skall inte fördjupa oss i det utan hänvisar till ett material, *Mathematics in Egyptian history* från *Open University* som finns på Internet. Där finns det ett avsnitt om egyptiernas uppfattning om bråk. Det är för övrigt denna text som är underlag för vår genomgång av divisionerna.

12.3 Joniska och romerska talsystem

12.3.1 Det joniska talsystemet

Den tidsepok som vi kallar antiken varade i över tusen år mellan 800 f.Kr. till 500 e.Kr. och den var lokaliserad till länderna kring Medelhavet. Det var en epok då vetenskap och kultur utvecklades och nådde en hög nivå och det gällde inte minst matematiken. Den antika matematiken förknippar vi kanske framför allt med geometri och med ett mer filosofiskt synsätt där den systematiska uppbyggnaden med definitioner, satser och bevis står i förgrunden. Men naturligtvis krävdes också beräkningar. Arkimedes, Ptolemaios och Aristarchos, för att bara ta några exempel, utförde omfattande beräkningar. Den antika kulturen var påverkad av den babyloniska och egyptiska. Ledande vetenskapsmän hade besökt länderna kring Nilen, Eufrat och Tigris och tagit del av deras beräkningsmetoder.

Efter 500 f.Kr. användes i Grekland det joniska talsystemet där talen representerades av bokstäverna i det grekiska alfabetet. De nio första bokstäverna representerar talen 1–9, de nio därpå följande representerar tiotalen 10–90 och de nästkommande nio bokstäverna hundratalen 100–900. För det behövs 27 tecken. Då alfabetet bara innehöll 24 tecken lade man till tre äldre tecken för talen 6 (Digamma), 90 (Koppi) samt 900 (Sampi). Tecknen visas i figur 12.7.

För att beteckna tusental använde man de första nio bokstäverna med en apostrof före bokstaven antingen upptill eller nertill. På det sättet kunde man beteckna tal mellan 1 och 9 999.

1	α	10	ι	100	ρ
2	β	20	κ	200	σ
3	γ	30	λ	300	τ
4	δ	40	μ	400	υ
5	ε	50	ν	500	φ
6	ϛ	60	ξ	600	χ
7	ζ	70	ο	700	ψ
8	η	80	π	800	ω
9	ϑ	90	ϟ	900	ϡ

Figur 12.7: Beteckningar för några tal i det joniska talsystemet. (Bild: `2Ya7y8x`)

För större tal införde man bokstaven M för 10 000 och före M angav man antalet tiotusental. Talet 123 457 skrivs alltså på följande sätt

$$\iota\beta\mathrm{M}\,'\gamma\upsilon\nu\zeta.$$

Talsystemet var som det egyptiska additivt. Det var alltså inte ett positionssystem och det innebär att man inte behöver någon nolla. Grekerna räknade också med bråktal och som egyptierna använde de sig väsentligen av stambråk.

Det joniska talsystemet används än idag i Grekland vid beteckning av ordningstal t.ex. vid numrering av kungar och fotbollsligor.

12.3.2 Det romerska talsystemet

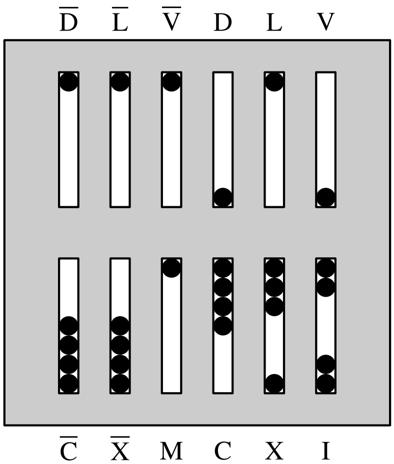
Det romerska talsystemet har de flesta kommit i kontakt med. I det används beteckningarna I, V, X, L, C, D och M för ett, fem, tio, femtio, hundra, femhundra och tusen. Ett streck över en av dessa bokstäver betyder att motsvarande tal skall multipliceras med 1 000. Alltså betecknar $\overline{\mathrm{V}}$ talet 5 000. Talen 1–9 betecknas på följande sätt:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX

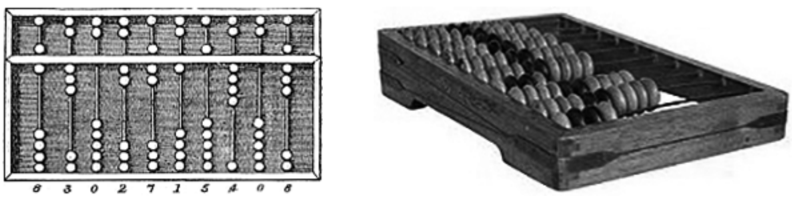
För att göra framställningen kortare skriver man IV istället för IIII och IX istället för VIIII. Om beteckningen för ett lägre tal står före en beteckning för ett högre skall det lägre subtraheras från det högre. Med detta viktiga undantag skall talen som motsvarar de olika tecknen adderas. Hur skall MMMCDLVI översättas till vårt talsystem? Talet inleds med tre M och det betyder att motsvarande tal skall adderas vilket med våra beteckningar ger 3 000. Därefter kommer ett C, som betecknar 100, följt av ett D, som betecknar 500, och eftersom C står före D ger kombinationen 400. Kombinationen LVI ger $50+5+1 = 56$. Talet MMMCDVI är alltså beteckning för 3 456.

Det romerska talsystemet används fortfarande i västerlandet bland annat vid numrering. Kungar numreras alltid med romerska siffror. som t.ex. Karl XII, Gustav V och Karl XVI Gustav. På gamla byggnader och på statyer är ofta årtal skrivna med romerska siffror. Ett historiskt viktigt årtal är 1789 då den franska revolutionen ägde rum. Med romerska siffror skrivs det MDCCLXXXIX. I många böcker pagineras inledande sidor som förord m.m. med romerska siffror – i, ii, ... Metoden har sina rötter från blysättartiden och skälen är både praktiska och estetiska. De inledande texterna skrevs ofta sist och man visste inte från början hur många sidor de omfattade. Numera sker sådant per automatik med datorer så idag är skälen estetiska.

Precis som det joniska systemet är det romerska additivt. Det är inte ett positionssystem. Tecknens värde är inte beroende av positionen även om det i det romerska systemet ibland skall adderas och ibland subtraheras. Addition och subtraktion kan göras rakt fram. Multiplikation och framför allt division är besvärligare. Viktiga hjälpmedel vid beräkning var abacusar och det fanns många olika typer. Några var direkt knutna till det romerska talsystemet och vi visar en sådan i figur 12.8.



Figur 12.8: Ett räknebräde där kulorna i de undre skårorna betecknar ental, tiotal, hundratal, tusental, tiotusental och hundratusental. I de övre skårorna finns bara en kula i varje och de representerar fem, femtio, femhundra, femtusen, femtiotusen och femhundratusen. Talen markeras genom att kulorna förs mot mitten. I figuren har vi markerat 1 937. Observera att denna abakus inte speglar romarnas sätt att ibland skriva beteckningen för ett lägre tal före beteckningen för ett högre. De nio hundratalen representeras av ett D och fyra C.



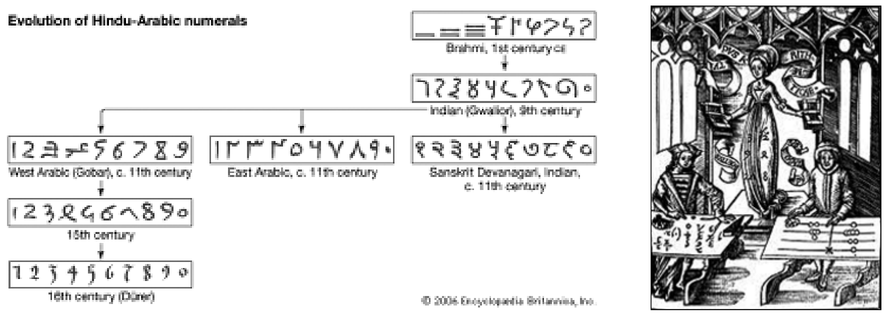
Figur 12.9: I den vänstra figuren visas en kinesisk abakus och den högra en rysk. Båda har använts i moder tid. Den kinesiska abakusen visar talet 6 302 715 408. (Bild: `3cW2etL`)

Det romerska talsystemet kom så småningom att ersättas av det decimalsystem med hindu-arabiska siffror som idag används över hela världen. Vi har tidigare sett andra exempel på talsystem som avvändes i Kina och hos Mayafolket. Det fanns också olika former av abacusar med vars hjälp man kunde utföra de fyra räknessätten. Kulor kunde föras fram och tillbaka enligt vissa bestämda regler och en skicklig abacist kunde utföra komplicerade beräkningar lika snabbt som de räknemaskiner som användes i mitten av 1900-talet. Vissa abacister kunde också beräkna kvadratrötter. I t.ex. Ryssland och Kina användes abacusar inom handeln ända in på 1990-talet.

12.3.3 Vårt decimalsystem blir så småningom förhärskande

Vi har i den första delen beskrivit hur arabiska matematiker bl.a. Al Khwarizmi i olika verk lanserade vårt nuvarande decimalsystem med de hindu-arabiska siffrorna. Deras arbeten baserades på en skrift som överlämnades av ett indiskt ombud till kalifen i Bagdad. Till Europa introducerades systemet av Fibonacci i verket *Liber Abaci* från 1202. Det var emellertid först under 1400- och 1500-talet som decimalsystemet började användas mer allmänt inom t.ex. handeln. Många höll kvar vid den abacus man var van vid. De räkneläraror som kom ut under renässansen bör ha medverkat till att vårt decimalsystem användes allt mer och att det till slut blev dominerande. Abacusen förblev under mycket lång tid ett effektivt hjälpmedel och konkurrerade med det hindu-arabiska siffrorna och de algoritmer som är knutna till dem. Bilden i figur 12.10 visar en tävling mellan abacister och algoritmiker. Inom handeln hade algoritmerna en fördel. Det var möjligt att i efterhand kontrollera räkningarna.

Även om vårt decimalsystem med dess algoritmer var allmänt använt så var det inte var mans egendom. Det var inte en självklarhet att högt bildade människor kunde t.ex. multiplikationstabellen. **Samuel Pepys** (1633–1703) var en engelsk ämbetsman som hade stor betydelse för utvecklingen av den engelska flottan. Han var ordförande i Vetenskapsakademin och god vän med Isaac Newton. Som vuxen lärde han sig multiplikationstabellen av en styrman i flottan. Han skriver i sin berömda dagbok: ”Den 9de. Upp klockan fyra och läste flitigt på min multiplikationstabell, som är det svåraste jag stött på i aritmetiken.” Multiplikation verkar också ha varit obekant för kompositören Ludvig van Beethoven. Förutom att han var en skicklig instrumentalist och kompositör hade han en god humanistisk bildning. Han bokförde också noggrant sina ekonomiska transaktioner men använde aldrig multiplikation. Om han fick t.ex. nio lika stora arvoden skrev han upp en addition med nio termer.



Figur 12.10: Bilden till vänster visar hur våra siffror utvecklats genom århundrade. Till höger visas en tävling mellan en abacist och en algoritmiker. Bilden är förmodligen från 1400-talet. (Bild: `2MQwMm1`, `2MM52Ps`)

12.4 De första räknelärorna i Europa

12.4.1 Fibonaccis *Liber Abaci*

> ”Dessa är indiernas nio tecken
> 987654321.
> Med dessa tecken och tecknet 0, som på arabiska kallas zephirum, kan varje tal skrivas och det kommer att visas nedan.”

Med de orden börjar Fibonaccis *Liber Abaci* som kom ut 1202 och som introducerade decimalsystemet med de hindu-arabiska siffrorna i västerlandet. De räkneläror som gavs ut under 1400- och 1500-talen och som medverkade till att systemet blev mer allmänt spritt bygger till stora delar på Fibonaccis arbete. Fibonacci är en av de mest betydelsefulla matematikerna i västerlandets historia och *Liber Abaci* är ett epokgörande verk.

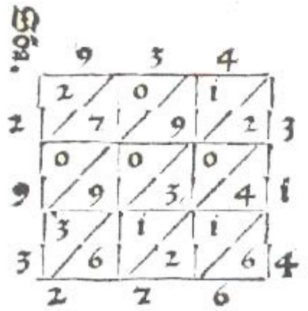
Liber Abaci innehåller inte bara en beskrivning av decimalsystemet och algoritmer för de fyra räknesätten. Ett kapitel handlar om handelsräkning. I ett annat diskuteras relativt avancerade resultat inom talteorin. Vidare behandlas bestämning av kvadratrötter. I kapitlet om talteori presenteras de tal som idag kallas *Fibonaccital* och som dyker upp i skilda sammanhang som t.ex. i biologi och i datavetenskap. I figur 4.2 visas den sida där de presenteras och man kan se talen i marginalen. En översättning av den text där Fibonaccitalen presenteras får avsluta vår korta presentation av *Liber Abaci*.

> ”En man har ett kaninpar på en inhägnad plats. Vi vill veta hur många kaninpar, som kan födas på ett år, utifrån det, om dessa kaniners natur är sådan att de föder ett nytt par varje månad och att de börjar föda den andra månaden efter sin födelse. Låt det första paret föda ett par den första månaden. Det har då dubblerats och det är 2 par efter en månad. Av dessa par föder en, nämligen det första ett par under den andra månaden och alltså finns det 3 par efter två månader. Av dessa kommer under en månad två bli dräktiga, så att under den tredje månaden kommer 2 kaninpar att födas. Alltså är de 5 par under denna månad. Av dessa kommer 3 att bli dräktiga så att under den fjärde månaden finns det 8 par. Av dessa kommer 5 par att föda 5 nya par, som adderat till de 8 paren ger 13 par under den femte månaden, av dessa kommer 5 par (de som föddes under samma månad) inte att bli havande under den månaden medan de andra 8 blir dräktiga. Alltså finns det 21 par under den sjätte månaden. När vi adderar till dessa de 13 par som föds under den sjunde månaden kommer det att finnas 34 par under denna månad . . .. Till slut kommer det att finnas 377 par. Och detta antal par har fötts från det förstnämnda paret på en given plats under ett år. Ni kan i marginalen se hur vi utfört detta, nämligen genom att kombinera det första talet med det andra, alltså 1 och 2, det andra med det tredje och det tredje med det fjärde . . .. Till sist kombinerar vi det tionde med det elfte, alltså 144 med 233, och vi får den ovannämnda summan av antalet kaninpar nämligen 377, och på detta sätt kan ni fortsätta för oändligt många månader.”

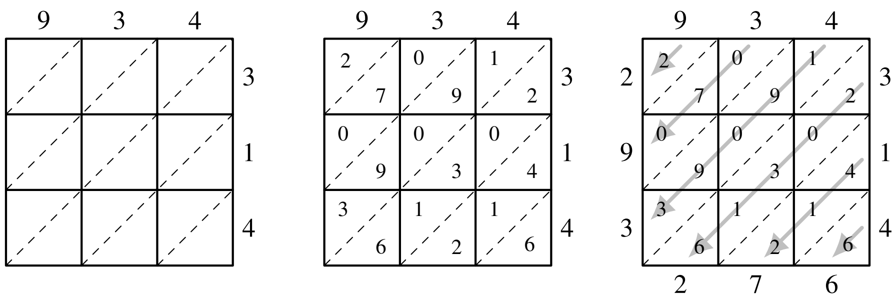
12.4.2 Algoritmer för de fyra räknesätten

I ett antal räkneläror från 1400- och 1500-talet presenterades decimalsystemet med de hindu-arabiska siffrorna tillsammans med algoritmer för de fyra räknesätten. Några av de viktigaste är *Trevisoaritmetiken* från 1478, vars författare är okänd, Luca Paciolis *Summa de Arithmetica Geometria Proportioni et Proportionalita* från 1494 och Robert Recordes *The Ground of Artes* från 1543 och *The Whetstone of Witte* från 1557. Uppställningarna för addition och subtraktion skiljer sig inte mycket från de vi använder idag. För multiplikation och division presenterade både *Trevisoaritmetiken* och Paciolis *Summa* flera varianter bl.a. de vi är vana vid men också andra. Vi ger exempel på två – *jalusimetoden* för multiplikation och *galärmetoden* för division.

I *Trevisoaritmetiken* ger den okände författaren fem olika uppställningar för att beräkna produkten $934 \cdot 314$. En av dem är så gott som identisk med den vi använder idag, två av dem är varianter på den som kallas *jalusimetoden*. De två övriga kan sägas vara ett mellanting mellan dagens metod och jalusimetoden. Vi studerar den ena varianten av jalusimetoden. Det färdiga resultatet visas i figur 12.11 och vi beskriver med hjälp av figur 12.12 hur tabellen fylls i stegvis.

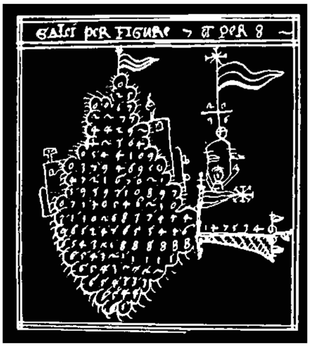


Figur 12.11: Beräkning av $934 \cdot 314$ enligt jalusimetoden. (Bild: 2BnUYd4)



Figur 12.12: De olika stegen som leder till figur 12.11.

Eftersom det är två tresiffriga tal som skall multipliceras startar man med ett rutnät av typen 3×3. I de nio rutorna drar man diagonalerna. Över de översta rutorna skriver man från vänster till höger siffrorna i talet 934 och till höger om rutnätet skriver man siffrorna i 314 uppifrån och ner. I nästa steg fyller man i rutorna genom att multiplicera det tal som står över rutan i fråga med det tal som står till höger. Entalen skrivs under och tiotalen över diagonalen. I rutan längst ner till höger skriver man alltså 1 över diagonalen och 6 under eftersom $4 \cdot 4 = 16$ och i mittenrutan skriver man 0 över och 3 under diagonalen eftersom $3 \cdot 1 = 3$. I sista steget betraktar vi de områden som begränsas av de streckade linjerna som består av diagonaler. I det området längst ner till höger, som bara består av en triangel, står entalen, i området till vänster tiotalen o.s.v. I området längst upp till vänster står hundratusental. Vi adderar talen i rutorna snett nedåt från höger till vänster som pilarna visar och börjar med området längst ner. Vi skriver entalssiffran i omedelbar anslutning till området och tiotalssiffran läggs till summan i området till vänster. Resultatet utläses nu uppifrån och ner till vänster om rutnätet och sedan från vänster till höger under nätet. Vi har alltså att $934 \cdot 314 = 293\,276$. Riktigheten av detta kan läsaren kontrollera med hjälp av miniräknare.



Figur 12.13: Ett exempel på division med hjälp av galärmetoden. (Bild: `2BgyYAU`)

Jalusimetoden var mycket vanlig under århundraden och används även idag om än inte så ofta. När det gäller division har många uppställningar prövats under århundraden och inom de senaste decennierna har de uppställningar som rekommenderats i skolan varierat. En som var vanlig under flera århundraden och som redovisas i svenska läroböcker på 1700-talet är den s.k. *galärmetoden*. I figur 12.13 visas hur en uppställning kan se ut. Bilden är hämtad från *Trevisoaritmetiken*. Vi avstår från att redogöra för hur metoden fungerar utan hänvisar till en artikel av **Staffan Rodhe**, *Algoritmer i Trevisoaritmetiken* i *Nämnaren*, 7A 2010, som finns på Internet. Namnet har metoden fått av att uppställningen liknar ett galärskepp och i figuren har det betonats genom att förse den med flaggor.

Liknande divisionsuppställningar finns i den första räkneläran på svenska som är författad av Ægidius Aurelius och som har den imponerande titeln *Arithmetica Eller Een Kort och Eenfaldigh Räknebook uthi heele och brutne Taal medh lustige och sköne Exempel the Eenfaldigom som til thenne Konst lust och behagh hafwe*. Den är från 1614 och publicerades alltså mer än hundra år efter *Trevisoaritmetiken*. Division inleds med det exempel som visas i figur 12.14.

I. Een begärer at wetta huru många Dal. 1340 mk. göra? Fac. 335. Dal. Efter thet 1. Dal. hafwer 4 mk. Så deele thetta taalet medh 4 Altså.

1 2
1 3 4 0
4 4 4 (3 3 5.
1 2 2 0
1 2

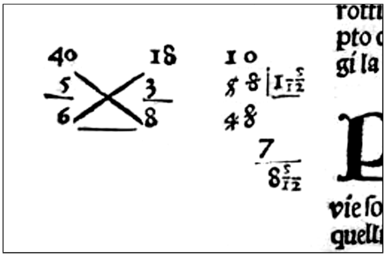
Huru ofta hafwer iagh 4 uthi 13 fac. 3 gångor. Ty tree gångor 4 fac. 12 Subtrahere **12. af 13 så blifwer 1 igen. Sätt thesse 3 uthi** quoto. **Sedhan ryck medh 4 delaren bätter fram under 4. Och sägh åter igen Huru ofta hafwer iagh 4 uthi 14. så finner tu åter igen 3 reesor. Ty tree reesor 4 göre 12.** Subtrahere **åter igen 12 af 14. så blifwe 2 öfwer. Ryck ännu widhare medh 4 och sätt honom under then yterste och sägh. 4 uthi 20 hafwer iagh 5 gångor: Ty 4 gångor 5 fac. 20. Så befinner tu** in quoto **335 Daler.**

Figur 12.14: Ett problem ur Aurelius räknelära. (Bild: `2zHneab`)

Läsaren kan själv försöka tolka texten för att på det sättet få en känsla för de problem en matematikhistoriker ofta står inför.

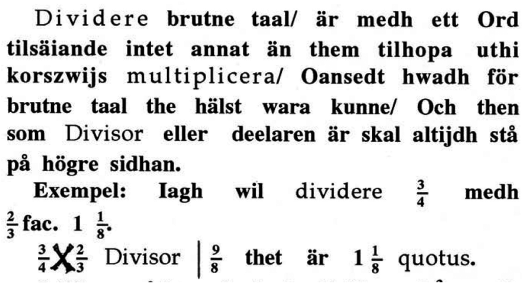
12.4.3 Bråkräkning

Trevisoaritmetiken saknar avsnitt om bråkräkning medan Pacioli i *Summa* går igenom hur man multiplicerar, adderar, subtraherar och dividerar bråk. Hans framställning är mycket ordrik och beräkningar görs ofta i marginalen. I figur 12.15 visas ett exempel på addition av två bråk och läsaren kan övertyga sig om att räkningarna är desamma som vi är vana vid. Pacioli använder sig av vårt bråkstreck men inte av våra beteckningar för addition, subtraktion och multiplikation.



Figur 12.15: Räkningarna i Paciolis *Summa* är oftast gjorda i marginalen. Det gäller också detta exempel på addition av talen 5/6 och 3/8. Tydligen skall enligt texten talet 7 läggas till denna summa. Det verkar emellertid som Pacioli räknat fel. Det korrekta resultatet är $8\frac{5}{24}$ och inte $8\frac{5}{12}$. (Bild: 2zLxuhG)

I figur 12.16 visas hur Aurelius introducerar division av bråktal.


Dividere **brutne taal/ är medh ett Ord tilsäiande intet annat än them tilhopa uthi korszwijs** multiplicera/ **Oansedt hwadh för brutne taal the hälst wara kunne/ Och then som** Divisor **eller deelaren är skal altijdh stå på högre sidhan.**

Exempel: Iagh wil dividere $\frac{3}{4}$ **medh** $\frac{2}{3}$ **fac.** $1\frac{1}{8}$.

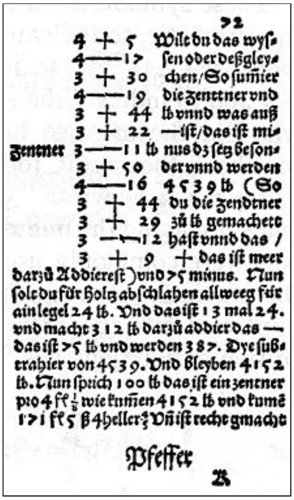
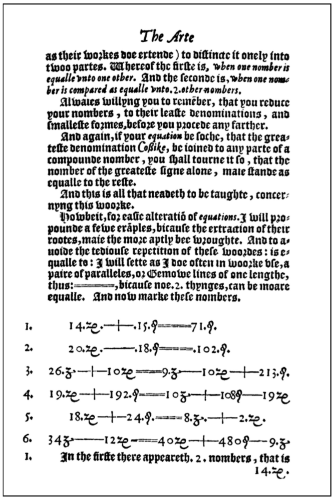
$\frac{3}{4} \times \frac{2}{3}$ Divisor | $\frac{9}{8}$ **thet är** $1\frac{1}{8}$ quotus.

Figur 12.16: Introduktion av division av bråktal i Aurelius räknelära. (Bild: 2zHneab)

Vi kan notera att varken i Paciolis *Summa* eller i Aurelius räknelära görs några försök att motivera de räknelagar de beskriver. De nöjer sig med att tala om hur man gör.

12.4.4 Räknesymboler

Varken *Trevisoaritmetiken* eller Paciolis *Summa* använder våra tecken för addition och subtraktion. De infördes av den tyske matematikern Johannes Widmann i arbetet *Mercantile Arithmetic oder Behende und hüpsche Rechenung auff allen Kauffmanschafft* som publicerades i Leipzig 1489. Likhetstecknet infördes av Robert Recorde i *The Whetstone of Witte* från 1557.

Figur 12.17: Den vänstra bilden, som visar hur Widman inför plus- och minustecknen, är identisk med figur 5.7. Bilden till höger visar hur Recorde inför likhetstecknet. Han säger att i stället för att upprepa ”är lika med” skriver han två parallella linjer. Likheterna som visas är ekvationer. Det förekommer två olika symboler efter talen. De är obekanta storheter och i en dialog mellan lärare och elev visas hur många enheter av den ena som svarar mot en enhet av den andra. (Bild: `2NjES7b`, `2MOG3LB`)

12.4.5 Problemfloran i räknelärorna

Samtliga räkneläror innehåller problem där de fyra räknesätten tillämpas. De sorteras i olika fack beroende på lösningsmetoden. Vi skall ge exempel på två typer av problem, reguladetri och regula falsi.

Reguladetri eller ”räkning med de tre” är en metod som under samma namn undervisades ännu på senare delen av 1900-talet. Vi hämtar ett exempel från Aurelius räknelära:

I. Såsom: Een köper 4 alnar Klädhe för 7 Daler. Huru dyre äre 20 alnar af samma slaghet? Fac. 35 Daler.

Aln.	Daler	Aln.
4	7.	20
		7
		1 4 0 (35 Dal.
		4

Multiplicere **20 medh 7 fac. 140. deele thet medh 4.** quotus **blifwer 35 Dal. Så myket kosta the 20 alnar.**

Figur 12.18: Ett problem på reguladetri i Aurelius räknelära. (Bild: `2zHneab`)

Aurelius har strax innan angett den metod som skall användas. Vi skriver upp den i modern språkdräkt.

> Problemet är av sådan natur att tre tal är kända och vi söker ett fjärde. Två av de kända talen har samma sort, det tredje och det sökta talet har också samma sort. Gör på följande sätt: 1. Skriv upp dem i ordning så att det första och det tredje talet har samma sort liksom det andra och det fjärde, som är det okända. 2. Du får det okända talet genom att multiplicera det andra och tredje talet och dividera produkten med det första.

Det finns inget resonemang som förklarar varför metoden fungerar. Naturligtvis ser läsaren direkt att eftersom 20 alnar är 5 gånger så mycket som 4 alnar så kostar de 20 alnarna 5 gånger så mycket som de 4 alltså 35 daler. Men om de ingående talen inte har så enkla förhållanden behövs ett mer generellt sätt att resonera t.ex.: Om 4 alnar kläde kostar 7 daler så kostar 1 aln $7/4$ daler. Alltså kostar 20 alnar $20 \cdot 7/4 = 140/4 = 35$ daler.

Problemen kan bli tekniskt komplicerade och vi ger ett exempel från *Trevisoaritmetiken*

> ”1 och 1/2 pund saffran kostar 2 och 1/3 dukater. Hur mycket kostar 1 och 1/4 uns? 1 pund är lika med 12 uns. Svaret ges i grossi och piccioli. 1 dukat är lika med 24 grossi och en grossi är lika med 32 piccioli. Det rätta svaret är att 1 och 1/4 uns kostar 3 grossi och 24 och 4/9 picciloli.”

Problemet kräver att man förutom reguladetri också behärskar bråkräkning och sortomvandlingar. Den mer automatiska lösningsmodellen är förmodligen en fördel i de mer komplexa situationer som uppkommer i praktiken. Om räkningarna kan göras automatiskt kan tankekraft frigöras för annat som t.ex. överväganden om priset är rimligt eller om jag kan skaffa varorna billigare på annat håll.

Den matematiska princip som ligger bakom metoden är proportionalitet. Det förutsätts utan kommentarer att den ena storheten är proportionell mot den andra t.ex. är priset för en vara proportionell mot mängden. Med moderna beteckningar innebär det att $y = kx$ eller $y/x = k$ där x och y är de båda storheterna och k är en konstant. Det betyder att att om vi känner x_1 och $y_1 = kx_1$ och söker y_2 för en känd storhet x_2 så är

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \quad \text{eller} \quad y_2 = \frac{y_1 x_2}{x_1}.$$

Om vi enligt Aurelius skriver upp de fyra talen i ordning – x_1, y_1, x_2, y_2 – så ger den andra likheten ovan hans regel.

Regula falsi Metoden har fått sitt namn av att man gissar en eller flera lösningar till problemet. Man kontrollerar om den stämmer och om den inte gör det så kan man genom att använda felets storlek konstruera den korrekta lösningen. Vi studerar ett exempel från Aurelius räknelära:

> ”En borgare har köpt en häst, en gård och ett stycke åker och han har för allt detta givit 500 daler. Nu kostar åkern fyra gånger mer än hästen och gården fem gånger mer än åkern. Hur dyr är hästen, åkern och gården.”

Aurelius löser problemet genom att anta att hästen kostar 30 daler. Då kostar åkern och gården 120 respektive 600 daler. Totala kostnaden blir då 750 daler men den skulle vara 500 daler. Han använder sedan reguladetri och skriver upp talen 750, 30, 500 och det fjärde sökta talet är produkten av det andra och tredje dividerat med det första. Resultatet är

$30 \cdot 500/750 = 20$ daler. Hästen kostar alltså 20 daler, åkern 80 daler och gården 400 daler vilket tillsammans ger 500 daler.

Ett välkänt problem från *Trevisoaritmetiken* är följande, som kan lösas med regula falsi:

> ”Den helige fadern sände en kurir från Rom till Venedig och befallde honom att komma till Venedig på 7 dagar. Den lysande signorian av Venedig sände en kurir till Rom som skulle nå Rom på nio dagar. Avståndet mellan Rom och Venedig är 250 miles. De båda kurirernas startade sina resor samtidigt. Om hur många dagar möts de och hur många miles har då var och en av dem färdats.”

Läsaren kan själv lösa problemet. Det rätta svaret är: Det möts inom 3 och $15/16$ dagar och har då färdats 140 och $5/8$ respektive 109 och $3/8$ miles.

En mer komplicerad form av regula falsi får vi i de fall då det är nödvändigt att göra två tester istället för en. Vi ger ännu ett exempel från Aurelius räknelära. För enkelhets skull formulerar vi det på modernare svenska.

> ”Alexander Magnus lät för en tid sedan tillreda en kostlig måltid till vilken han bjudit in sina närmaste vänner. Ibland allt annat prat under måltiden framställer han följande fråga: Mig tyckes att jag skall vara två år äldre än vår gode vän Ephistion men Clytus skall väl ha vår sammanlagda ålder och 4 år därtill. Till det svarar Calisthenes Philosiphus: När min fader var 96 år var han lika gammal som ni tre tillsammans. Nu frågas: Hur gamla var Alexander, Ephistion och Cyrus?”

Aurelius antar till en början att Alexander är 20 år. I så fall är Ephistion 18 år och Clytus 42 år. Tillsammans skulle de då vara 80 år vilket är 16 år för litet. Nu antar han att Alexander är 30 år. Då är Ephistion 28 år och Clytus 62 år. Tillsammans är de 120 år vilket är 24 år för mycket.

Nu skriver Aurelius upp följande schema:

$$\begin{array}{ccc} 20 & & 30 \\ & \times & \\ 16 & & 24 \end{array}$$

och utför den korsvisa multiplikationen $20 \cdot 24 + 16 \cdot 30 = 960$. Han adderar produkterna eftersom 20 ger ett underskott och 30 ett överskott. Han dividerar nu resultatet med $16 + 24$, som är summan av avvikelserna. Också här adderar han eftersom den ena avvikelsen ger ett underskott och den andra ett överskott. Han dividerar nu 960 med 40 och får 24 som är Alexanders ålder. Ephistion är då 22 år och Cyrus 50 år. Summan är nu 96 som är korrekt.

Varför fungerar metoden? Vi studerar den med våra mer moderna metoder och använder symbolisk algebra som visserligen fanns embryon till i början av 1600-talet då Aurelius skrev sin räknelära men inte då *Trevisoaritmetiken* gavs ut. Regula falsi av båda slagen fanns i de flesta läroböcker från renässansen.

Vi betecknar Alexanders ålder med x_0. Då är Ephistion $x_0 - 2$ år och Cyrus $x_0 + x_0 - 2 + 4 = 2x_0 + 2$. Vi skall alltså bestämma x_0 så att $2x_0 + 2 = 96$. Det är enkelt med vår algebra men hur fungerar det med regula falsi. Låt oss titta på den mer allmänna allmänna ekvationen $y = ax + b$ där a och b är kända. Vi känner $y = y_0$ och vill bestämma x_0. Vi beräknar y först för $x = x_1$ och sedan för $x = x_2$. Vi får att $y = y_1 = ax_1 + b$ och $y = y_2 = ax_2 + b$. Vidare antar att y_1 och y_2 skiljer sig från y_0 och att differenserna är d_1 respektive d_2. Vi sammanfattar:

$$y_1 = y_0 + d_1 = ax_0 + b + d_1 = ax_1 + b$$
$$y_2 = y_0 + d_2 = ax_0 + b + d_2 = ax_2 + b$$

Vi löser ut a i båda ekvationerna och får

$$a = \frac{d_1}{x_1 - x_0} = \frac{d_2}{x_2 - x_0}$$

Ur den andra likheten kan vi nu lösa ut x_0. Vi får

$$d_1(x_2 - x_0) = d_2(x_1 - x_0)$$

och

$$x_0(d_2 - d_1) = d_2x_1 - d_1x_2$$

som ger

$$x_0 = \frac{d_2x_1 - d_1x_2}{d_2 - d_1}.$$

Talen d_1 och d_2 kan vara både positiva och negativa. En positiv differens innebär att vår gissning ger ett större värde på y än det efterfrågade och en negativ att den är mindre. Vi har alltså räknat med negativa tal något som var okänt för den tidens författare av räkneläror.

Det är alltså även med våra algebraiska hjälpmedel inte helt lätt att se att den mer komplicerade varianten av regula falsi fungerar. Man kan fråga sig hur man resonerade sig fram till metoden.

Vi har bara gett exempel på några av de problemtyper som behandlades i de första räkneläororna. De innehöll flera som t.ex. blandningsproblem och fördelningsproblem. De behandlade också aritmetiska och geometriska serier och metoder för bestämning av kvadrat- och kubikrötter. Både *Trevisoaritmetiken* och Paciolis *Summa* innehöll avsnitt om handelsräkning och sortomvandling. Det var i *Summa* som det vi nu kallar *dubbel italiensk bokföring* presenterades.

12.4.6 Negativa tal

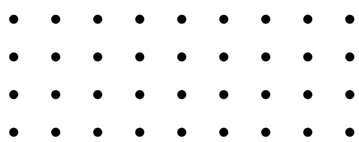
Negativa tal behandlades inte i de första räknelärorna. De började användas först på 1500-talet i samband med studiet av högregradsekvationer. Cardano räknar i sitt stora verk *Ars Magna* från 1545 med negativa tal. De uppkommer som rötter till ekvationer. Han räknar också med kvadratrötter ur negativa tal ”trots den intellektuella plåga detta innebär”. Rafael Bombelli ger i *L'Algebra* från 1572 struktur åt de arbeten om ekvationslöning som de italienska matematikerna del Ferro, Tartaglia, Cardano och Ferrari bidragit med. Han använder sig då konsekvent av negativa tal och skriver också upp teckenreglerna för multiplikation, ”plus gånger plus ger plus”, ”plus gånger minus ger minus” och ”minus gånger minus ger plus”. Det var alltså i samband med utvecklingen av algebran som de negativa talen infördes. I dagens skola införs de negativa talen tidigt – långt innan algebran introduceras.

12.4.7 Intresse för pedagogiska frågor

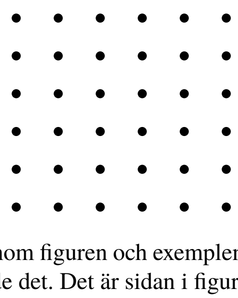
Under 1500-talet kom pedagogiska frågor att bli alltmer centrala. De klassiska frågorna Vad? Varför? och Hur? diskuterades och en av de mest inflytelserika företrädarna för en förnyelse av undervisningen vid universiteten var Peter Ramus som 1551 utnämndes till professor i filosofi och vältalighet vid Collège de France. Han föreslog en rad förändringar av undervisningen vid universitetet i Paris. Han ansåg att matematiken var central för allt lärande men han ansåg också att utbildningen skulle knytas till praktiken. Peter Ramus skrev läroböcker i aritmetik, geometri och algebra. För att få verklighetsanknytning studerade han de problem som hantverkare och köpmän ställs inför. Han gav allmänna principer för hur undervisningen skall bedrivas och betonade att ”olika ting måste organiseras så att hela ämnet lättare kan läras ut”.

En annan typ av pedagogisk nyorientering svarade den engelske matematikern och tjänstemannen Robert Recorde för. Han skrev en rad läroböcker i aritmetik och geometri och så gott som alla är utformade som en dialog mellan lärare och elev. Det är ett sätt att försöka förstå hur eleven tänker, att steg för steg låta eleven bekanta sig med matematiska begrepp och att synliggöra de missuppfattningar som är vanliga. De två viktigaste verken är *The Ground of Artes* från 1543 och *The Whetstone of Witte* från 1557. Vi låter ett avsnitt av *The Whetstone of Witte* spegla Recordes framställningskonst. Det handlar om att presentera kvadrattal.

> ”Läraren: Kvadratiska tal är de som kan divideras med ett tal så att kvoten blir detta tal: det vill säga att ett kvadrattal är ett tal som fås genom att multiplicera ett tal med sig själv som att multiplicera 10 med sig själv ger 100. Talet 100 är kvadrattal eftersom 100 dividerat med 10 också blir 10.
>
> Eleven: Multiplicera 4 med 4. Det ger 16 och det är också ett kvadrattal av samma skäl.
>
> Läraren: Det är rätt.
>
> Eleven: Och 9 multiplicerat med 4 är inte det ett kvadrattal? Ser vi det så tycks vi kunna göra alla tal till kvadrattal genom multiplikation.
>
> Läraren: Tänk noga över, att ett kvadrattal bildar en kvadrat bland talen på samma sätt som en exakt kvadrat gör det i Geometrin; alla sidor är lika stora. Om en sida är längre än den andra kallas den i Geometrin för en lång kvadrat. Om jag nu ritar den figur som svarar mot de tal du nämnde och låter en sida vara 4 och den andra 9 så kommer vi att få följande bild:



> Vi ser en lång kvadrat. Ändå kan det heltal som uppkommer genom denna multiplikation verkligen kallas ett kvadrattal som du ser här. Men sidan eller roten är 6 och varken 9 eller 4.



> Eleven: Nu förstår jag bättre genom figuren och exemplen. Och jag har också lärt mig vad en rot är på det sätt du förklarade det. Det är sidan i figuren som svarar mot talet.”

Recorde låter eleven ställa en fråga så att läraren får möjlighet till ytterligare förtydliganden samtidigt som han kan visa på analogierna mellan kvadrattal och geometriska kvadrater. På det sättet får läsaren andrum för eftertanke. Denna aspekt är kanske ofta förbisedd i läroböcker. Det är nödvändigt att vända och vrida på begreppen för att de skall sjunka in hos eleven.

12.4.8 Decimalbråken införs i Stevins *De Thiende*

År 1585 publicerade den holländske ingenjören Simon Stevin ett häfte på 29 sidor med titeln *De Thiende*. Det är skrivet på flamländska men blev 1608 översatt till engelska med titeln *Disme* av **Robert Norton**. Den fullständiga engelska titeln är *DISME; The Art of Tenths or Decimal Aritmetike. Teaching how to perform all Computations whatsoever, by whole Numbers without Fractions by the foure Principles of Arithmetike: namely, Addition, Subtraction, Multiplication and Division*.

Det till sidantalet blygsamma arbetet är något av en milstolpe i europeisk matematikhistoria. Stevin introducerar i *De Thiende* decimalbråken. Decimalbråk hade tidigare använts både i Kina och i arabländerna men i Stevins arbete lanseras de för första gången i Europa.

I en första definition skriver Stevin att hans metod

> ”. . . är en form av aritmetik, som grundar sig på tiosystemet och som består av siffror; där ett särskilt tal beskrives och alla räkningar som äger rum i affärer mellan människor görs med hela tal utan bråktal.”

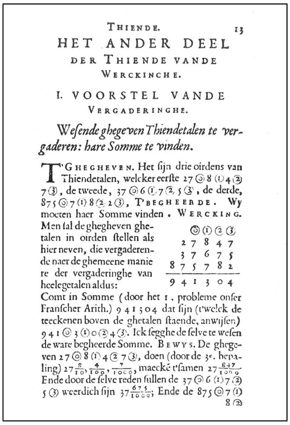
Han säger vidare att varje tal består av en inledning, som vi kallar heltalsdel, och som han betecknar med $(^0)$. Talet 364 skriver han alltså som $364(^0)$. Därefter följer tiondelar, tiondelar av tiondelar o.s.v. och det betecknas med respektive $(^1)$, $(^2)$, o.s.v. Han ger exempel: $8(^0)9(^1)3(^2)7(^3)$ betyder $8+9/10+3/100+7/1000$ eller $8937/1000$. Vi betecknar idag talet med 8,937 eller 8.937.

Stevin går med hjälp av exempel igenom hur man adderar, subtraherar, multiplicerar och dividerar i det nya systemet. Det kan anmärkas att han också har ett avsnitt om reguladetri. I figur 12.19 visas exempel på addition och multiplikation. När det gäller multiplikation förklarar Stevin utförligt varför t.ex. produkten av två tal av typ $(^2)$ blir ett tal av typ $(^4)$. Som synes skiljer sig inte uppställningarna från de vi nu använder. Skillnaden är att Stevin inte använder kommatecken utan istället markerar vilken potens av $1/10$ som siffran markerar. Decimalkomma eller decimalpunkt förekommer i verk av den tyske matematikern och teologen **Bartholomaeus Pitiscus** där de uppträder i hans trigonometriska tabeller från 1613.

I ett appendix visar Stevin hur hans metoder kan användas inom en rad skilda områden: inom lantmäteri, vid mätning av tapeter och kläder, vid beräkning av rymdmått, inom astronomi och inom köpenskap och handel.

12.5 Logaritmerna

Decimalsystemet med de hindu-arabiska siffrorna inklusive decimalbråken samt deras algoritmer innebar att många tillämpningar fått viktiga verktyg för de beräkningar som behövdes. Det gällde t.ex. inom handeln och lantmäteri. Astronomin var ett annat område där det krävdes omfattande beräkningar. Men även om algoritmerna gjorde det möjligt att rutinisera räkningarna så innebar det, särskilt om kraven på noggrannhet var stor, ett tidsödande arbete. Den mänskliga faktorn innebar också att felaktigheter oundvikligen smög sig in om beräkningsarbetet blev omfattande. Kravet på förenklingar inställde sig och det var framför allt multiplikationer och divisioner som tog mycket kraft i anspråk. Det var kanske inte så underligt att två matematiker oberoende av varandra kom på en lösning där multiplikation och division kan ersättas med de betydligt enklare räknesätten addition respektive subtraktion. Lösningen bestod av en konstruktion av ett stort tabellverk där varje tal tilldelas ett nytt tal, dess logaritm. Logaritmerna är konstruerade så att logaritmen av en produkt är lika med summan av logaritmerna av



THIENDE. 13

HET ANDER DEEL
DER THIENDE VANDE
WERCKINCHE.

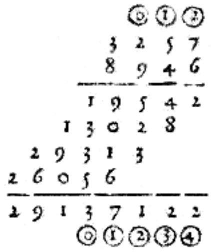
I. VOORSTEL VANDE
VERGADERINGHE.

Weſende ghegeven Thiendetalen te vergaderen: hare Somme te vinden.

T'GHEGHEVEN. Het ſijn drie oirdens van Thiendetalen, welcker eerſte 27⓪8①4②7③, de tweede, 37⓪6①7②5③, de derde, 875⓪7①8②2③, T'BEGHEERDE. Wy moeten haer Somme vinden. WERCKING. Men ſal de ghegheven ghetalen in oirden ſtellen als hier neven, die vergaderende naer de ghemeene maniere der vergaderinghe van heelegetalen aldus:

⓪	①	②	③
27	8	4	7
37	6	7	5
875	7	8	2
941	3	0	4

Comt in Somme (door het 1. probleme onſer Franſcher Arith.) 941304 dat ſijn (t'welck de teeckenen boven de ghetalen ſtaende, anwijſen) 941⓪3①0②4③. Ick ſegghe de ſelve te weſen de ware begheerde Somme. BEWYS. De ghegheven 27⓪8①4②7③, doen (door de 3e. bepaling) $27\frac{8}{10}, \frac{4}{100}, \frac{7}{1000}$, maeckẽ t'ſamen $27\frac{847}{1000}$. Ende door de ſelve reden ſullen de 37⓪6①7②5③ weerdich ſijn $37\frac{675}{1000}$; Ende de 875⓪7①8②



Figur 12.19: Den vänstra bilden visar inledningen till avsnittet om addition med exempel. Den högra visar exemplet på multiplikation. (Bild: `3cQAc2J`, `3cNzT8Y`)

produktens faktorer. Det är framför allt den skotske matematikern och teologen John Napier som har blivit känd för att ha uppfunnit logaritmerna. Hans publicerade sitt arbete *Mirifici logarithmorum canonis descriptio* ("Beskrivning av de underbara logaritmerna") år 1614. Oberoende av Napier publicerade den schweiziske matematikern och urmakaren **Joost Bürgi** liknande idéer i ett arbete från 1620.

I figur 6.10 presenterades titel- och textsida i *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*. Vi gav också en översättning av förordet där Napier just betonar behovet av att förenkla beräkningstekniken. De som först insåg nyttan av logaritmerna var bl.a. astronomer, lantmätare och navigatörer. Astronomen Johannes Kepler var en av dem som uppmuntrade Bürgi att publicera sina resultat. Det var en matematiker och navigatör **Edward Wright** (1561–1615), som påbörjade den första översättningen av Napiers arbete från latin till engelska. Den avslutades av hans son och publicerades efter hans död. Men den som framför allt förstod det revolutionerande i Napiers idéer var Henry Briggs. Han var professor i matematik och arbetade med astronomiska undersökningar när han läste om Napiers logaritmer. Han förstod också att Napiers logaritmsystem borde modifieras och anpassas till decimalsystemet som har basen 10. Under perioden 1618–33 gav Briggs ut tabellverk som skulle användas under en mycket lång tid.

Innan vi går in på Napiers konstruktion ger vi några exempel.

12.5.1 Några exempel på beräkning med logaritmer

Napiers idé var alltså att konstruera en tabell som till varje tal ordnar ett nytt tal – talets logaritm – och att göra det på ett sådant sätt att multiplikation och division av två tal innebär addition respektive subtraktion av talens logaritmer. I våra exempel använder vi den logaritmtabell som var i bruk på gymnasiet under 1950- och 60-talen. Ett för exemplen aktuellt utdrag av tabellen finns i figur 12.20.

Exempel 1. Beräkna produkten av 2.57 och 3.39. Tillvägagångssättet är följande:

1. Bestäm logaritmerna för 2.57 och 3.39. De är 0.4099 respektive 0.5302.

2. Addera logaritmerna 0.4099 + 0.5302 = 0.9401.

4. Common Logarithms

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4381	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6885	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396

(Continued)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7475
50	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8632	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	8722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996

Figur 12.20: Utdrag ur en logaritmtabell. (Bild: `2B00rXr`)

3. Leta upp det tal vars logaritm är 0.9401 genom att gå ”baklänges” i tabellen. Vi hittar 0.9401 mellan logaritmerna för 8.71 och 8.72 som är 0.9400 respektive 0.9405 och avståndet mellan dessa båda tal är 0.0005. Talet 0.9401 får vi genom att addera $1/5$ av avståndet mellan 0.9400 och 0.9405 till 0.9400. En lämplig approximation för det tal som har logaritmen 0.9401 är då 8.712 som är den sökta produkten med fyra siffrors noggrannhet.

Det korrekta resultatet är 8.7123 vilket vi kan beräkna med miniräknare. Exemplet visar metoden men också att den har begränsningar. Tabellens noggrannhet bestämmer resultatens noggrannhet. Gymnasietabellerna gav logaritmerna med fyra siffrors noggrannhet. Det ansågs räcka för de övningsuppgifter eleverna ställdes inför. I praktiska sammanhang behövs ofta större noggrannhet och i Briggs tabeller från 1624 anges logaritmerna med 14 decimaler.

Exempel 2. Bestäm kvoten 4.57/3.39.

1. Vi subtraherar logaritmerna för 4.57 och 3.39 och får $0.5302 - 0.4099 = 0.1203$.

2. Därefter letar vi i tabellen upp det tal vars logaritm är 0.1203. Det ligger mellan 1.31 och 1.32 som har logaritmerna 0.1173 respektive 0.1206. Vi bestämmer genom interpolation det sökta talet till 1.319. Kvoten är alltså med fyra siffrors noggrannhet lika med 1.319. Vi kan kontrollera resultatet med miniräknare.

Exempel 3. Bestäm $\sqrt[3]{3.39}$.

1. Eftersom $3.39 = \sqrt[3]{3.39} \cdot \sqrt[3]{3.39} \cdot \sqrt[3]{3.39}$ så är logaritmen för 3.39 lika med 3 gånger logaritmen för $\sqrt[3]{3.39}$. Logaritmen för $\sqrt[3]{3.39}$ är alltså $1/3$ av logaritmen för 3.39 d.v.s. $0.5302/3$ som med fyra siffrors noggrannhet är lika med 0.1767.

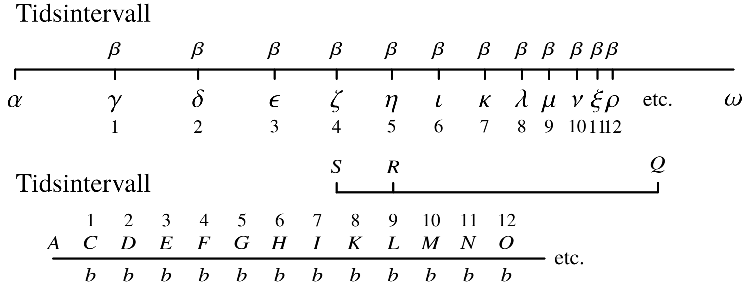
2. Vi hittar detta tal mellan 0.1761 och 0.1790 i tabeller och dessa tal är logaritmerna för 1.50 och 1.51. Genom interpolation får vi att 0.1767 är logaritmen för 1.502 och

alltså är $\sqrt[3]{3.39}$ lika med 1.502 med fyra siffrors noggrannhet. Miniräknaren ger samma resultat.

Komplicerade aritmetiska uttryck som är uppbyggda av multiplikation och division där de ingående faktorerna kan vara rötter kan alltså med hjälp av logaritmtabeller beräknas med hjälp av addition och subtraktion. Tidsvinsten var naturligtvis betydande men förenklingarna innebar också att risken för felräkningar avtog. Beräkningsmetoden har med dagens elektroniska räknare endast historiskt intresse, men då innebar den att effektiviteten och säkerheten ökade väsentligt.

12.5.2 Napiers konstruktion

Hur konstruerade då Napier sina logaritmer? Hans grundläggande idé visas i figur 12.21. Samma figur förekommer för övrigt på titelsidan av *Mirifici logarithmorum canonis descriptio*.



Figur 12.21: Denna illustration av idén bakom Napiers logaritmtabell har hämtats och översatts från titelsidan till en senare upplaga.

På den undre linjen, som är obegränsad rör sig en punkt b med likformig hastighet. Den startar i punkten A och passerar efter 1, 2, 3, tidsenheter punkterna C, D, E, ... respektive. På den övre linjen, som är begränsad, startar en punkt β i α samtidigt som punkten b på den undre linjen och med samma utgångshastighet. Den rör sig mot slutpunkten ω inte med likformig hastighet utan så att den efter 1, 2, 3 tidsenheter passerar γ, δ, ϵ, ... där

$$\alpha\omega/\gamma\omega = \gamma\omega/\delta\omega = \delta\omega/\epsilon\omega = \ldots.$$

Napier antar att sträckan $\alpha\omega$ är en längdenhet och han delar in den i 10 000 000 delar. Han definierar nu logaritmen för talen $\gamma\omega$, $\delta\omega$, $\epsilon\omega$, ... som talen AC, AD, AE, ...

Napier måste nu visa att hans logaritmer fungerar som han tänkt sig d.v.s. att logaritmen för en produkt respektive kvot av två tal är summan respektive skillnaden av talens logaritmer. Napiers språk är rent geometriskt. Arbetet är gjort innan algebran på allvar gjort sitt intåg och före fungerande beteckningar för potenser och potenslagar. En moderniserad och starkt förenklad version av Napiers resonemang kan vara följande: Vi sätter

$$\frac{1}{k} = \alpha\omega/\gamma\omega = \gamma\omega/\delta\omega = \delta\omega/\epsilon\omega = \ldots$$

Det konstanta förhållandet kallar vi alltså $1/k$. Om sträckan $\alpha\omega$ är en längdenhet så är

$$\gamma\omega = k, \quad \delta\omega = k\gamma\omega = k^2, \quad \epsilon\omega = k\delta\omega = k^3, \quad \ldots$$

Låt μ och ν vara två punkter på den övre linjen sådana att $\mu\omega = k^m$ och $\nu\omega = k^n$. De svarar mot de punkter på den undre linjen som punkten b passerar efter m respektive n tidsenheter och har alltså logaritmerna m respektive n. Produkten $k^m \cdot k^n$ är ju enligt potenslagarna lika med k^{n+m} som svarar mot den punkt b passerar efter $n + m$ tidsenheter. Produkten har alltså logaritmen $n + m$ som är summan av faktorernas logaritmer.

Som vi redan nämnt hade inte Napier det algebraiska språk som vi kan använda oss av. Han var hänvisad till geometriska resonemang och det medför att framställningen idag är svår att följa. Vi har också förenklat framställningen genom att bara betrakta de diskreta punkter som β genomlöper då punkten b på den undre linjen befinner sig i $C, D, E, \ldots$. Napiers resonemang inbegriper de punkter som ligger däremellan och han härleder samband som kan användas vid konstruktion av tabellerna.

12.5.3 Briggs modifiering

Som vi tidigare sett uppmärksammades Napiers arbete av den engelske matematikern Henry Briggs som arbetade med ett projekt inom astronomi som krävde omfattande beräkningar. Han insåg vilken betydelse logaritmerna kunde få för att förenkla beräkningsarbetet men han insåg också att de skulle bli ännu effektivare om man knöt logaritmerna hårdare till decimalsystemet. Om logaritmen för talet 10 är lika med 1 så skulle logaritmen för 100 vara lika med 2, för 1 000 lika med 3 o.s.v. Briggs insåg att det då skulle räcka att ge en tabell för logaritmerna för talen mellan 1 och 10. Varje positivt tal x kan ju skrivas $10^k \cdot m$ där $1 < m \leq 10$ och där k är ett heltal och vi har

$$\log x = \log(10^k \cdot m) = \log 10^k + \log m = k + \log m.$$

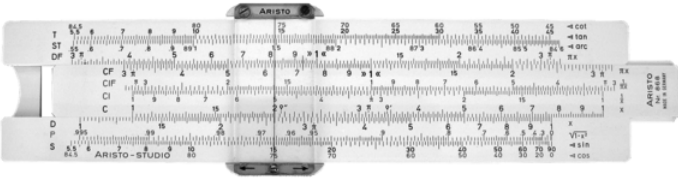
Vi har t.ex.

$$\log 23\,456 = \log(10\,000 \cdot 2.3456) = \log 10\,000 + \log 2.3456 = 4 + \log 2.3456.$$

Briggs tog kontakt med Napier, som hade haft samma tankar, men som på grund av sviktande hälsa inte orkat utföra detaljerna. Briggs gav 1618 ut *Logarithmorum chilias prima* som innehåller logaritmerna för talen 1–20 000 med 14 decimaler. Senare gav han ut *Arithmetica Logarithmica* (1624) med logaritmtabeller för talen 90 000–100 000 och *Trigonometrica Britannica* (1633) med logaritmtabeller för sinus- och tangensfunktionerna. Konstruktionen av tabellerna krävde både uppfinningsrikedom, tålamod och noggrannhet. Briggs utvecklade under arbetet en metod som innebar att han studerade differenser av olika ordning mellan en följd av tal. Både Leibniz och Newton skulle senare använda samma teknik då de utvecklade infinitesimalkalkylen.

12.5.4 Räknestickan

Logaritmerna spelade en stor roll för att underlätta beräkningsarbetet. Vi har tidigare citerat Laplace: ”Logaritmerna har fördubblat astronomens liv.”. De användes av i första hand ingenjörer och vetenskapsmän. Ett hjälpmedel, räknestickan, som bygger på logaritmräkning skapades och den fanns i olika storlekar. Den var ett oundgängligt hjälpmedel för tekniker så sent som på 1960-talet. Ingenjörer hade ofta en mindre variant i bröstfickan för att alltid ha den nära till hands. I figur 12.22 visas en räknesticka och bildtexten förklaras hur den används.



Figur 12.22: Räknestickan består av två delar – en fast del och en rörlig. Den rörliga kan skjutas fram och tillbaka i sidled. Båda är graderade och skalan är logaritmisk. Utgångspunkten motsvarar talet 1, som ha logaritmen 0, avståndet från utgångspunkten till talen 2, 3, 4 o.s.v. är proportionella mot talen $\log 2$, $\log 3$, $\log 4$, ... respektive. I figuren har man skjutit fram den rörliga delen så att dess utgångspunkt är i fas med talet 1.3 på den fasta delen. En markering på en rörlig genomskinlig del är placerad vid talet 2 på den rörliga delen. Samma markering visar 2.6 på den fasta delen. Vi har alltså beräknat $1.3 \cdot 2$ genom att addera deras logaritmer och fått produkten till 2.6. Det finns andra markeringar på den variant som visas på bilden och de är till hjälp vid mer komplicerade beräkningar. Det kan anmärkas att räknestickans skala för tankarna till den övre linjen i Napiers bild (se figur 12.21) även om överensstämmelsen inte är fullständig. (Bild: `371hSxC`)

12.5.5 Logaritm- och exponentialfunktionen

När de elektroniska miniräknarna gjorde entré på 1970-talet blev logaritmerna som beräkningsmedel obsoleta och räknestickan reducerades till ett museiföremål. Men logaritmerna har trots det en central plats i matematiken. I dagens undervisning utgår man i regel från exponentialfunktionen $x(t) = a^t$ och definierar logaritmfunktionen som exponentialfunktionens invers. Det betyder att, om a är ett positivt tal skilt från 1, så är $\log_a x$ det tal a skall upphöjas till för att vi skall få x eller

$$t = \log_a x \Longleftrightarrow a^t = x.$$

Talet a kallas logaritmens *bas* och de vanligaste baserna är $a = e$ och $a = 10$. Eftersom exponentialfunktionen är en mycket central funktion inom matematiken är också logaritmfunktionen det. Men historiskt infördes logaritmfunktionen före exponentialfunktionen.

Om vi återgår till logaritmerna som beräkningshjälpmedel så använde alltså Briggs basen 10 och hans logaritmer blev de som användes vid tunga beräkningar. Napiers logaritmer har en annan form som var mer komplicerad.

Vi avslutar detta avsnitt med att med moderna metoder visa hur Napiers definition av logaritmer hänger samman med exponentialfunktionen. Vi påminner om figur 12.21 och att punkten b rörde sig med likformig hastighet medan β rörde sig med en hastighet som var proportionell mot sträckan $\beta\omega$. Om vi kallar avståndet $\beta\omega$ för $x(t)$ där t är tiden så har β hastigheten $x'(t)$. Logaritmen för $x(t)$ är proportionell mot t. Funktionen $x(t)$ uppfyller differentialekvationen

$$x'(t) = -kx(t).$$

Minustecknet beror på att hastigheten är riktad åt höger medan $x(t)$ växer åt vänster. Om vi för enkelhets skull antar att $k = 1$ har differentialekvationen lösningen

$$x(t) = C\mathrm{e}^{-t}$$

och då $\alpha\omega$ har längden 1 så är $x(0) = C = 1$ och alltså har vi att

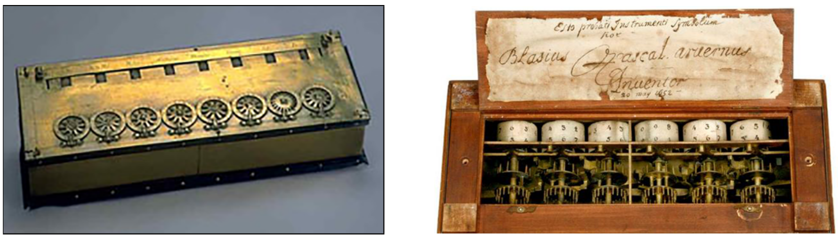
$$x(t) = \mathrm{e}^{-t} \quad \text{eller} \quad t = -\log_{\mathrm{e}} x.$$

12.6 Räknemaskiner

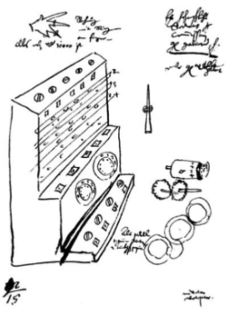
12.6.1 De första räknemaskinerna

”Det är ovärdigt skickliga män att slösa tid, som om man vore slavar, på beräkningsarbete, som tillförlitligt skulle kunna överlåtas på vem som helst om bara maskiner användes.”. Yttrandet tillskrivs den tyske matematikern Gottfried Wilhelm von Leibniz. Han konstruerade själv en sådan maskin 1671 som väckte uppmärksamhet i den vetenskapliga världen. Leibniz inbjöds till London där han presenterade den för vetenskapsakademin. Med hjälp av maskinen kunde man mekaniskt utföra de fyra räknesätten och bestämma kvadratrötter. Maskinen finns inte kvar. Den var alltför dyr att framställa och kom aldrig till användning.

Men Leibniz var inte den förste som konstruerade en räknemaskin. Den nittonårige Blaise Pascal hade 1642 konstruerat en räknemaskin som kunde addera och subtrahera. Han kallade sin maskin för *Pascaline* och han konstruerade den för att hjälpa sin far i hans arbete med att driva in skatter. Räknemaskinen fungerade och tillverkades i ett antal exemplar. Den var emellertid inte säker. Det var framför allt den anordning som skulle hantera minnessiffror som inte alltid fungerade. Finmekaniken var då inte tillräckligt utvecklad.



Figur 12.23: Pascals räknemaskin *Pascaline*. (Bild: `2XSFdnj`, `2MRENHA`)



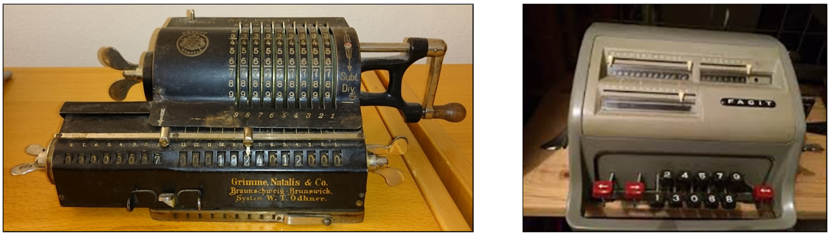
Figur 12.24: Schikards skiss av ”räkneuret”. (Bild: `3eb03Cj`)

Redan tjugo år innan Pascal konstruerade sin räknemaskin hade en tysk professor i hebreiska och astronomi **Wilhelm Schickard** (1592 –1635) i ett brev till Johannes Kepler beskrivit en maskin som kunde addera, subtrahera, multiplicera och dividera. För multiplikation använde sig Schickard av Napiers ben – ett mekaniskt hjälpmedel som John Napier utvecklat och som byggde på jalusimetoden. Schickard hade lämnat ritningarna till en urmakare som skulle konstruera maskinen. Tyvärr levererades aldrig maskinen. Den eller de delar som utvecklats förstördes i en brand. Schickard och hans familj dog i pesten år 1635. Maskinen rekonstruerades 1960 efter Schickards ritningar, som emellertid inte var fullständiga utan måste kompletteras.

12.6.2 Odhners räknemaskin

Det är naturligtvis inte konstigt att det gjordes försök att konstruera en maskin som utför rutinmässiga räkningar. Algoritmerna för de fyra räknesätten ger ju scheman för hur räkningarna skall utföras och det ligger nära till hands att på något sätt automatisera dem. *Pascaline* anses vara den första fungerande maskinen men den hade sina brister och klarade bara addition och subtraktion. Både Schickards och Leibniz maskiner klarade alla de fyra räknesätten men Schikards realiserades inte förrän över 300 år senare och Leibniz maskin har gått förlorad och den var dessutom för dyr att tillverka. Försök gjordes att konstruera nya räknemaskiner och ju mer tekniken utvecklades desto säkrare blev maskinerna. Industrialiseringen under 1700- och 1800-talen innebar att räknemaskinerna kunde produceras i längre serier och de blev därmed billigare.

Den svenske ingenjören och uppfinnaren **Willgodt Odhner** fick i början av 1870-talet patent på en räknemaskin där han utnyttjade erfarenheter som gjorts av tidigare konstruktörer. Hans maskin kom att stå sig ända till de elektroniska miniräknarna erövrade marknaden. Han grundade en egen fabrik i S:t Petersburg 1876. Vid ryska revolutionen 1917 flyttades verksamheten till Göteborg. Företaget som fick namnet AB Original-Odhner köptes 1942 upp av AB Åtvidabergs Industrier som efter några år bytte namn till Facit AB. Maskinen som kallades Odhners pinnharv drevs från början för hand med en vev men driften blev så småningom elektrisk. Facit AB hamnade vid teknikskiftet till elektroniska räknare under 1970-talet i en ekonomisk kris och köptes upp av Elektrolux.



Figur 12.25: Bilden till vänster är ett exemplar av Odhners räknemaskin med vev – en pinnharv. Den till höger är elektrisk. (Bild: `3cOuCxS`, `2Bf3P08`)

12.6.3 Elektroniska miniräknare

År 1967 visade Texas instrument upp prototypen för den första batteridrivna digitala räknemaskinen. Den vägde drygt ett kilo och klarade de fyra räknesätten. Några år senare kunde man köpa sådana räknare i butikerna. Många företag satsade stort på att utveckla det som kom att kallas miniräknare. Hewlett Packard satsade på att bygga in allt som en räknesticka kunde klara i en räknare som kunde rymmas i en byxficka och de lyckades. De nya räknarna sålde bra, fler företag satsade, priserna pressades och prestanda ökade. Några decennier senare fanns grafritande räknare med en mängd funktioner och som dessutom var programmerbara. Bakom utvecklingen låg miniatyriseringen av elektroniken med transistorer och mikrochips.

12.7 Datorer

Vi har i avsnitt 9.7.1 beskrivit hur Charles Babbage drömde om att skapa en maskin som beräknade och skrev ut tabeller. Tidsödande arbete skulle kunna ersättas med maskiner samtidigt som säkerheten skulle förbättras. Det skulle vara ett stort framsteg jämfört med de räknemaskiner som då fanns i bruk. De levererade ett resultat åt gången. Babbage idé var att maskinen skulle leverera hela tabeller och dessutom skriva ut dem. Han presenterade en modell 1821 som realiserade hans idéer om än i blygsam omfattning. Han planerade en ny

Figur 12.26: Bilden till vänster visar den första miniräknaren från 1967. Till höger visas en grafritande räknare från 1990-talet. (Bild: `2N2kHdP`, `3dcVQP0`)

mer avancerad maskin men den fungerade inte som han tänkt sig. Tekniken var inte mogen. Till sin hjälp hade han Ada Lovelace som programmerade hans maskiner och som insåg att de kunde ha en mycket generell tillämpning utanför matematiken.

Det skulle dröja över hundra år innan den första datorn konstruerades. Teoretiska grundarbeten av logiker som George Boole och Alan Turing, utvecklingen av elektrotekniken och stora krav på omfattande beräkningar under andra världskriget gjorde att den första datorn ENIAC stod klar 1946. I Sverige skulle den första datorn, eller som den då kallades matematikmaskinen, BESK tas i bruk 1953. Datorn revolutionerade beräkningsarbetet. Maskinen kunde läsa in data, behandla dem enligt ett fastställt program, som innebar att datorns arbete kunde modifieras beroende på beräknade data, samt skriva ut resultaten. Hastigheten var jämfört med tidigare maskinell behandling svindlande. BESK utförde en addition på 56 mikrosekunder. Den kunde alltså göra nästan 18 000 additioner i sekunden. Den kunde också lagra tal i ett arbetsminne som omfattade 20 480 binära siffror eller bitar. Sedan dess har utvecklingen varit enorm men redan de första datorerna innebar en revolution för beräkningstekniken. Beräkningar som tidigare varit alltför omfattande kunde nu genomföras. Problem med betydelse för tillämpningarna kunde tacklas på ett helt annat sätt än tidigare. Kända metoder för numeriska beräkningar fick förnyad aktualitet. Nya metoder för att bestämma funktioner och integraler, för att lösa ekvationer av olika typer och för att statistiskt behandla stora datamängder kunde utvecklas. Simuleringsmetoder utvecklades.

Ett nytt akademiskt ämne Numerisk analys etablerades i början av 1960-talet vid svenska universitet och tekniska högskolor. Den förste professorn vid Kungliga tekniska högskolan var **Germund Dahlquist** som var en av världens ledande forskare inom området. Han författade tillsammans med sin elev **Åke Björck** läroboken *Numerical methods* som användes som introduktion i ämnet i ett stort antal länder under en lång följd av år. Titeln på Dahlquists doktorsavhandling, *Stability and Error Bounds in the Numerical Solution of Ordinary Differential Equations* kan ge en aning om vad forskningen inom numerisk analys kunde handla om.

En genomgång av forskningen inom beräkningsteknikens utveckling under slutet av 1900- och början av 2000-talet ligger utanför ramen för denna framställning. Vi kan nämna två områden bland många där datorerna är av stor betydelse. För att förutspå vädret använder sig meteorologerna av avancerade matematiska modeller och en stor mängd insamlade data. För att göra de beräkningar som krävs på rimlig tid krävs kraftfulla datorer. Den svenska läkaren Hans Rosling utvecklade tillsammans med sin son och sonhustru en programvara, *Gapminder*, med vars hjälp man kan förklara en global socioekonomisk utveckling. Han utnyttjar en stor mängd data samt datorns möjligheter att visualisera och animera.

Kapitel 13

Geometri

13.1 Geometrin i tvåflodslandet

Matematiken i tvåflodslandet eller låt oss för enkelhets skulle kalla den för den babyloniska matematiken förknippas framför allt med aritmetik, men man vet att babylonierna också hade utvecklat geometrin. De kände uppenbarligen till Pythagoras sats. Figur 1.3 som förekommer i nästan alla beskrivningar av den babyloniska matematiken visar det. En lertavla från 1900–1600 f.Kr., som finns bevarad på British museum, innehåller följande text:

> ”4 är längden och 5 är diagonalen.
> Vad är bredden? Dess storlek är inte känd.
> 4 gånger 4 är 16
> 5 gånger 5 är 25
> Du tar 16 från 25 och skillnaden är 9.
> Vilket gånger vilket skall jag ta för att få 9?
> 3 gånger 3 är 9.
> Bredden är 3.”

Figur 13.1: En bild av *Plimpton 322*. (Bild: `2XSOlYX`)

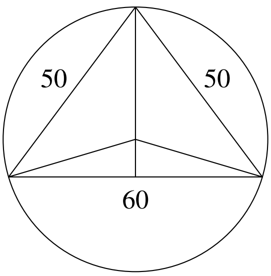
En av de mest berömda lertavlorna kallas *Plimpton 322* och finns i **G. A. Plimptons** samlingar på Columbia University. Tavlan, som visas i figur 13.1, är från omkring 1800 f.Kr. och är från den forna staden Larsa i södra Irak. Den innehåller en tabell med femton rader och fyra kolumner. Den fjärde kolumnen är helt enkelt en numrering av raderna. I varje rad kan innehållet i den andra och tredje kolonnen tolkas som heltal b och c för vilka $a^2 + b^2 = c^2$ där a också är ett heltal. De är alltså två av talen i en pythagoreisk trippel. Den första kolumnen är mer svårtolkad eftersom den delvis är skadad men mycket tyder på att den anger $(b/a)^2$.

En tolkning i vårt decimala system är[1]:

$(b/a)^2$	b	c	
0.9834028	119	169	1
0.9491586	3 367	4 825	2
0.9188021	4 601	6 649	3
0.8862479	12 709	18 541	4
0.8150077	65	97	5
0.7851929	319	481	6
0.7199837	2 291	3 541	7
0.6927094	799	1 249	8
0.6426694	481	769	9
0.6426694	4 961	8 161	10
0.5625	45	75	11
0.4894168	1 679	2 929	12
0.4500174	161	289	13
0.4302388	1 771	3 229	14
0.3971605	56	106	15

Hur använde babylonierna denna lertavla? Varför skrevs den? Det finns olika tolkningar. En är att vi här ser den första bevarade trigonometriska tabellen. Talen har inte kopplats samman med vinklar i vår mening utan kan tolkas som riktningar som t.ex. astronomer kunde använda sig av. Nestorn när det gäller babylonisk matematik **Otto E. Neugebauer** (1899–1990) delar inte den tolkningen. Han argumenterar för en talteoretisk tolkning medan andra anser att tabellen är ett hjälpmedel för att lösa en viss typ av andragradsekvationer. En presentation av de olika tolkningarna finns i en artikel *Words and Pictures: New Light on Plimpton 322* av **Eleanor Robson**,

I västra Iran där den forntida staden Susa varit belägen upptäcktes 1850 ett antal lertavlor och en del av dem visade prov på babyloniernas matematiska kunskaper. Där finns bl.a. en där π uppskattas till $3\frac{1}{8}$.



Figur 13.2: Figur till problemet som beskrivs i texten.

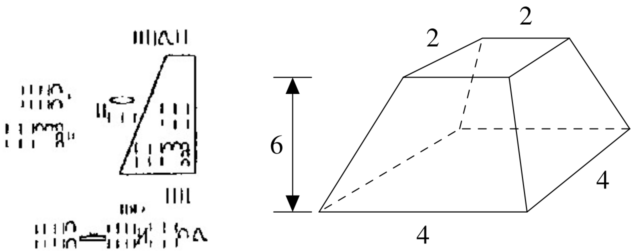
Vi avslutar detta avsnitt med ett problem som formuleras och löses på en av lertavlorna från Susa. Problemet, som hämtats från *MacTutor History of Mathematics Archive*, lyder: Bestäm radien i den cirkel som går genom hörnen i en triangel vars sidor är 50, 50 och 60 längdenheter. Lertavlan visar den bild som vi stiliserat i figur 13.2. Genom att använda Pythagoras sats två gånger visar man att radien är $31\frac{1}{4}$ längdenheter eller med babyloniernas sextiosystem 31:15 längdenheter. För att genomföra räkningarna krävs resonemang som förebådar algebran. Läsaren kan själv som övning lösa problemet.

[1]Det är osäkert om den första kolumnen visar $(b/a)^2$ eller $(c/a)^2 = 1 + (b/a)^2$.

13.2 Geometrin i det forna Egypten

Vår kännedom om matematiken i det forna Egypten härrör från papyrusrullar och de viktigaste är *Moskvapapyrusen* från omkring 1850 f.Kr. och *Rhindpapyrusen* från omkring 1650 f.Kr. Det är framför allt den senare som innehåller geometriska problem. Där finns, som vi redan tagit upp i avsnitt 1.2, bland annat problem där man beräknar volymen av en stympad pyramid. Den metod man uppenbarligen använder är inte enkel att härleda ens med dagens metoder. Hur har de egyptiska räknarna kommit fram till den? Det finns flera försök att hitta en rimlig härledning. Ett förslag finns i **Charles Boyers** *History of Mathematics*. Eftersom resultatet är ett av de mest avancerade inom egyptisk geometri upprepar vi formel och figurer från avsnitt 1.2. Vänstra delen är hämtad från *Moskvapapyrusen* och i högra delen har vi ritat den med dagens hjälpmedel. Volymen har beräknats med hjälp av formeln

$$\frac{1}{3}h(a^2 + ab + b^2).$$



Figur 13.3: Bilden till vänster är från *Moskvapapyrusen* och visar beräkningen av en stympad pyramid. Den högra visar de olika storheterna a, b och h i formeln. (Bild: `2MOwsUT`)

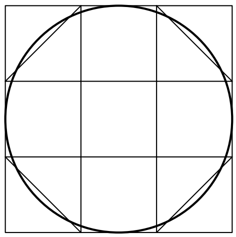
Beräkningen av volymen av ett frustrum är problem nr. 14 i *Moskvapapyrusen*. Tidigare i problem nr. 10 beräknas arean av en halvsfär. Texten är ungefär följande:

> ”Exempel på beräkning av en korg. Du har en korg med gapet [diametern] 4 1/2. Vilken är dess area? Tag 1/9 av 9 eftersom korgen är som ett halvt äggskal. Du får 1. Beräkna återstoden. Du får 8. Beräkna 1/9 av 8. Du får $2/3 + 1/6 + 1/18$. Bestäm resten av 8 sedan du subtraherat $2/3 + 1/6 + 1/18$. Du får $7 + 1/9$. Multiplicera $7 + 1/9$ med $4 + 1/2$. Du får 32. Se detta som arean. Du har bestämt den korrekt.”

Det är inte helt lätt att följa tankegången. Varför dubbleras diametern? Kanske tänker sig skrivaren korgen uppskuren i två delar som läggs efter varandra. Varför tar han 1/9 och varför gör han de efterföljande beräkningarna? Kan det ha att göra med den konstruktion som visas i figur 13.4? Beräkningarna ger under alla förhållande ett bra resultat. Vi vet att halvsfärens area är $2\pi r^2$ där r är radien. I exemplet är $2r = 4\frac{1}{2}$ och arean är alltså $(81\pi)/8$ och det innebär att π har approximerats med $256/81 \approx 3.1605$ – en approximation som måste betecknas som god.

De två problem vi nämnt är kanske de mest avancerade. Men det finns på de bevarade papyrusen också problem där skrivarna beräknar areor av rektanglar och trianglar samt volymer av spannmålsmagasin i form av rätblock och cylindrar. Det verkar emellertid inte som de använde Pythagoras sats i dess allmänna form även om man vet att egyptierna använde en triangel med sidorna 3, 4 och 5 för att markera en rät vinkel. Det skall emellertid sägas att de egyptiska papyrusaren liksom för övrigt också de babyloniska lertavlorna är föremål för nya granskningar och tolkningar. Det gäller t.ex. problem nr. 10 i *Moskvapapyrusen* om halvsfärens area som studeras i en artikel av Leon Cooper med titeln *A new interpretation of Problem 10 of the Moscow Mathematical Papyrus* som publicerades i *Historia Mathematica* 37 (2010). Artikeln finns tillgänglig på www.sciencedirect.com.

Vi avslutar med att visa hur egyptierna uppskattade arean av en cirkel genom att som i figur 13.4 approximera den med arean av en oktagon, som är inskriven i cirkeln.



Figur 13.4: Cirkelns area approximeras med en oktagon.

Oktagonen består av fem lika stora kvadrater samt fyra trianglar. Arean av varje triangel är hälften av arean av en kvadraterna. Om cirkeln diameter är d så har varje kvadrat sidan $d/3$ och arean $d^2/9$. Oktagonens area är därför $7 \cdot (d^2/9)$. Om cirkelns area approximeras med oktagonens får man inte med fyra segment som ligger utanför oktaederna men det kompenseras delvis med att man tar med ett antal mindre områden som ligger utanför cirkeln. Eftersom cirkelns area är $\pi d^2/4$ så ger metoden en approximation av π som är $28/9 \approx 3.1111$.

13.3 Geometri i det forna Indien

Det forna Indiens viktigaste bidrag till matematiken är utan tvekan det talsystem som nu används över hela världen. Det finns emellertid också texter med avancerad geometri. I bilagor, s.k. *Sulvasutras*, till *Vedaskrifterna*, som dateras till 1500–500 f.Kr., finns instruktioner hur man skall konstruera altare för att behaga gudarna. De viktigaste *Sulvasutras* är från 800 och 600 f.Kr. ”Sulva” betyder rep och rep är de hjälpmedel som tillåts i konstruktionerna. Ett rep kan spännas mellan två punkter och ge en sträcka. Men kan använda repet för att fördubbla, tredubbla o.s.v. en sträcka. Genom att vika repet kan man dela sträckan i ett antal lika stora delar. Om ena ändan av repet fästs i en stolpe kan man konstruera cirklar. De flesta konstruktioner går ut på att överföra ett område till en kvadrat med samma area. Området kan vara rektangulärt, det kan bestå av flera delar och det kan vara cirkulärt.

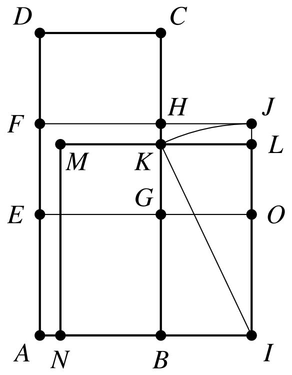
Vi skall närmare studera några problem i några *Sulvasutras*. De är hämtade från *MacTutor History of Mathematics Archive*.

Låt oss till en början slå fast att författarna av olika *Sulvasutras* kände till det vi idag kallar Pythagoras sats. I en av dem står det nämligen:

> ”Strängen som sträcks längs diagonalen i en rektangel genererar en area som är lika med de areor som strängarna som bildar den längre och den kortare sidan genererar var för sig.”

Denna vetskap gjorde det möjligt för skrivaren att konstruera en kvadrat vars area är summan av två givna kvadrater.

Ett betydligt svårare problem är att med hjälp av repdragning konstruera en kvadrat som har samma area som en given rektangel. I en *Sulvasutras* finns en sofistikerad lösning och vi återger den med moderna beteckningar.



Figur 13.5: Konstruktion av en kvadrat med samma area som en given rektangel.

Den givna rektangeln är $ABCD$ visas i figur 13.5. Gör nu följande konstruktioner:

1. Avsätt sträckorna AE och BG längs de längre sidorna AD respektive BC så att $AE = BG = AB$. Fyrhörningen $ABGE$ är då en kvadrat.
2. Bestäm mittpunkterna F och H på sträckorna ED respektive GC.
3. Förläng sträckorna AB, EG och FH till I, O respektive J så att BI, GO och HJ alla är lika med DF. Observera att rektangeln $BIOG$ har samma sidor som rektangeln $FDCH$. Vi har alltså ”flyttat” $FDCH$ till $GOIB$.
4. Bestäm punkten K på BC så att $IK = IJ$.
5. Bestäm punkten L på sträckan OJ så att $OL = GK$.
6. Konstruera punkterna M och N på förlängningarna av LK respektive IB så att $LM = IN = IL$.
7. $NILM$ är den sökta kvadraten.

Läsaren kan själv övertyga sig om att alla konstruktioner går att genomföra med rep och pålar. Några frågor inställer sig. För det första: Är resultatet korrekt? För det andra: Hur har skrivaren kommit fram till sin lösning?

Svaret på den första frågan är positivt. Det kan bevisas på följande sätt:

> Observera första att rektanglarna $FDCH$ och $GOIB$ har samma area. En av sidorna i kvadraten $NILM$ är IL som också är sida i den rätvinkliga triangeln ILK. Enligt Pythagoras sats är $NILM$ då lika med skillnaden mellan en kvadrat med sidan IK och en kvadrat med sidan LK. Vi kan nu hitta kvadrater med samma areor som dessa i figuren. Eftersom $IK = IJ$ så har kvadraten med sidan IK samma area som kvadraten med sidan IJ som är $AFJI$. Vidare är $KL = HJ = GH$ så $GHJO$ är en kvadrat med samma area som kvadraten med sidan KL.
>
> Om man från den större kvadraten $AFJI$ tar bort den mindre kvadraten $GHIO$ får man ett område som består av rektangeln $AFHB$ och rektangeln $GOIB$. Kvadraten $NILM$ har alltså samma area som detta område. Men rektangeln $GOIB$ har samma area som $FDCH$ så kvadraten $NILM$ har samma area som det område som består av rektanglarna $AFHB$ och $FDCH$ d.v.s. som rektangeln $ABCD$ och vårt påstående är bevisat.

Hur har skrivaren kommit fram till lösningen? Det får vi aldrig veta men en gissning är att han genom stark koncentration och kombinationsförmåga sett de samband vi utnyttjat i beviset.

I en *Sulvasutras* finns också angivet metoder för hur en cirkel med hjälp av repdragningar kan omvandlas till en kvadrat. Här gör skrivaren det enklare för sig. Han konstruerar en kvadrat vars sida helt enkelt är $13/15$ av cirkelns diameter. Vi vet att detta endast är en approximation och om vi antar att cirkelns diameter är d så är kvadraten area $(169d^2)/225$ och då cirkelns area är $(\pi d^2)/4$ får vi en uppskattning π till $4 \cdot 169/225 \approx 3.00444$ vilket kanske inte är så imponerande. I en annan *Sulvasutras* finns också en metod för att konstruera en cirkel som har samma area som en given kvadrat, vilket är något av ett undantag. I regel vill man omvandla de områden man betraktar till kvadrater utan att arean ändras. Konstruktionen som omvandlar en kvadrat till en cirkel är inte exakt. Vi vet nu att det är omöjligt med de verktyg som tillåts i *Sulvasutras*. Noggrannheten hos approximationen kan mätas med det värde på π som metoden skulle gett om den var exakt. ”Cirkuleringen” av kvadraten leder till ett närmevärde av π på 3.088. Konstruktionen finns beskriven i *MacTutor History of Mathematics Archive*.

Vi avslutar detta avsnitt med ett problem som behandlas i flera *Sulvasutras*:

> Bestäm sidan i en kvadrat vars area är dubbelt så stor som arean i en given kvadrat.

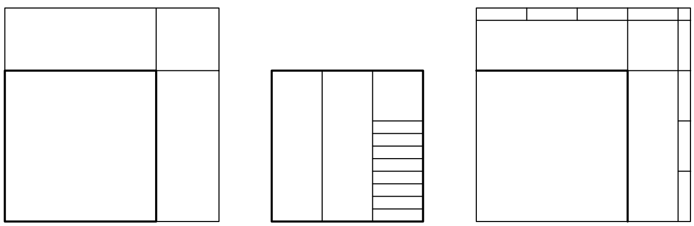
Med vår terminologi innebär det att beräkna $\sqrt{2}$. Två av de mest kända författarna av *Sulvasutras* – **Apastamba** (600–540 f.Kr.) och **Katyayana** (c:a 200–140 f.Kr.) – anger hur man skall öka sidan i den givna kvadraten för att att arean skall fördubblas:

> Öka enhetslängden med en tredjedel och denna tredjedel med dess fjärdedel och minska sedan med denna fjärdedels trettiofjärdedel.

Det betyder alltså att de sätter

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{34} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{577}{408}$$

som är lika med 1.414215686 med nio decimalers noggrannhet. Det korrekta värdet är 1.414213562. Felet är alltså mindre än 10^{-5} som är ett anmärkningsvärt bra resultat. Ingen av de nämnda matematikerna anger hur de har kommit fram till resultatet. Det är naturligtvis en utmaning av matematikhistoriker att försöka hitta en rimlig förklaring. I arbetet *The Science of Sulba* från 1932 gör författaren **B. Datta** ett intressant försök till rekonstruktion som vi redovisar i figur 13.6 och i följande text.



Figur 13.6: Illustration av ett försök att rekonstruera en approximation av $\sqrt{2}$.

I bilden längst till vänster är den inre skuggade kvadraten den som skall fördubblas. Resultatet är den yttre kvadraten. Arean av området mellan de båda kvadraterna är alltså lika med den inre kvadratens area. Den mellersta bilden visar en kopia av den inre kvadraten. Vi skall nu försöka att dela upp kvadraten i mitten i delar, lägga delarna kring den skuggade kvadraten så att de bildar en figur som i bilden till höger. Därför delar vi först in kvadraten i mitten i tre lika stora rektanglar. I rektangeln till höger avskär vi en kvadrat. De båda rektanglarna till vänster och den avskurna kvadraten placeras kring den skuggade kvadraten som i bilden till höger. Det bildas då en ny kvadrat men dess area är inte dubbelt så stor som den skuggades. Vi har ju inte placerat ut hela den mittersta kvadraten. Det område som är kvar delar vi in i åtta lika stora delar och placerar ut dom längs den nya kvadratens övre och högra sidor. Tillsammans med en mycket liten kvadrat längst upp till höger får vi nu en kvadrat vars area är litet mer än dubbelt så stor som den streckades. Skillnaden är just den lilla kvadraten. Om vi antar att den ursprungliga kvadratens sida är 1 så är den stora kvadratens sida lika med $1+1/3+1/3 \cdot 1/8 \cdot 2/3 = 1+1/3+1/3 \cdot 1/4 = 17/12$. Nu justerar vi och minskar sidan på den stora kvadraten så att de båda rektanglar som tas bort tillsammans har samma area som den lilla kvadraten längst upp till höger d.v.s. $1/144$. De båda rektanglarna har båda sidan $17/12$. Det innebär att vi minskar sidan med $(1/144) \cdot (12/34) = (1/12) \cdot (1/34)$. Korrektionen ger ett bättre värde men fortfarande är överensstämmelsen mellan det område vi konstruerat och den kvadrat inte fullständig men avvikelsen är nu mycket liten.

13.4 Geometri under antiken

Matematiken hade en stark ställning under den period mellan 700 f.Kr. och 500 e.Kr. som kallas antiken och som uppstod och utvecklades i länderna kring Medelhavet. Själva ordet ”matematik” kan enligt *Norstedts etymologiska ordbok* härledas från grekiskans ”mathematikhe” eller ”mathema” som betyder ”kunskap, vetenskap”. Enligt den fria ordboken *Wiktionary* kommer ordet från grekiskans ”matematikos” som kan översättas med ”med lust att lära”. Båda tolkningarna visar att matematik förknippas med kunskap och lärande i allmänhet.

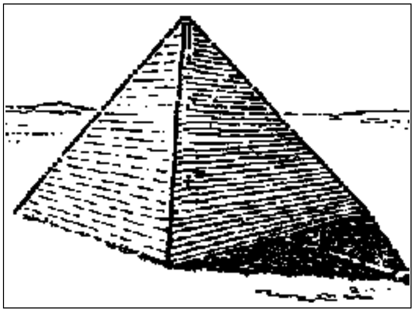
Vetenskapen matematik kom under antiken att kopplas samman med geometri. Över ingången till Platons Akademia stod ”Här kommer ingen in som inte behärskar geometri” vilket visar både på matematikens starka ställning och att den i hög grad identifierades med geometri. Orden ”matematiker” och ”geometriker” används nästan synonymt långt in på 1600-talet.

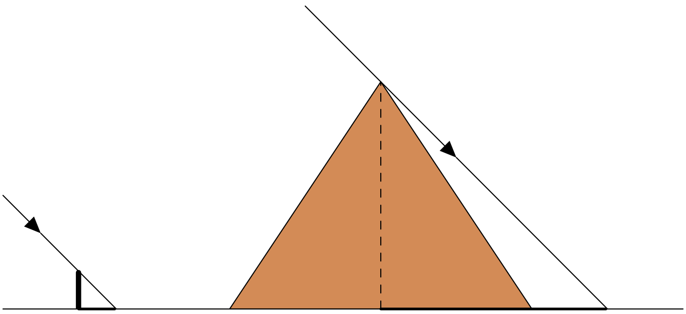
Geometri betyder jordmätning och naturligtvis användes geometriska kunskaper för att lösa praktiska problem som att bestämma längder, areor och volymer. Geometrin fick också stor betydelse inom astronomi. Vi kommer inte att ge en kronologisk beskrivning av geometrins utveckling under antiken utan vi kommer att studera geometrin ur olika synvinklar och inleder med hur geometrin tillämpades för att göra mätningar av olika slag. De perspektiv vi kommer att behandla är följande:

- Geometri och tillämpningar
- Konstruktionsproblem
- Proportionalitet, irrationella tal, medelvärden
- Geometrin ges struktur genom deduktiv framställning
- Kägelsnitt
- Beräkningar som förebådar integralkalkylen
- Kommentarer av viktiga arbeten gjorda av senantikens matematiker

13.4.1 Geometri och tillämpningar

Thales beräkning av höjden hos en pyramid Thales, som levde mellan 625 och 545 f.Kr. räknas som en av de första filosoferna. Han gjorde sig också känd som astronom och matematiker. Hans insatser beskrivs av den grekiske historieskrivaren **Herodotos** (484–425 f.Kr.). Thales förenade teoretiska kunskaper i geometri med praktiska tillämpningar. Han blev enligt historiker känd för att med hjälp av sin egen skugga mäta höjden av en pyramid i Giza. Thales skall ha inväntat den tidpunkt då hans skugga var lika lång som han själv och samtidigt mätt pyramidens skugga. Om Thales skugga är lika lång som Thales själv innebär att solstrålarna bildar 45 graders vinkel med marken. Av den undre schematiska bilden i figur 13.7 framgår att pyramidens höjd är summan av skuggans längd och pyramidens halva kant. Eftersom pyramidens kant kan mätas är problemet löst nästan utan några räkningar alls.

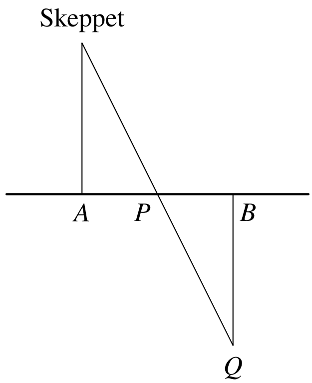




Figur 13.7: Pyramiden på bilden längst upp till vänster visar hur stor en pyramid är jämfört med de människor man kan se nedanför. Bilden längst upp till höger visar skuggan av pyramiden då solstrålarna faller in vinkelrät mot en av pyramidens baskanter. Den undre stiliserade bilden förtydligar de geometriska sambanden. Den lodräta sträckan längst till vänster skall föreställa Thales. (Bild: `37lIzSR`, `2MNZSlU`)

Den lösning som beskrivs är enkel och elegant. Men kanske är den för enkel. I en artikel med titeln *Thales' Shadow* i *Mathematical Magazine* från år 2000 påpekar författarna **Lothar Redlin**, **Ngo Viet** och **Saleem Watson** att lösningen kräver att solstrålarna bildar 45 graders vinkel mot marken samtidigt som de faller in vinkelrät mot en av pyramidens baskanter. Detta sker mycket sällan och det är därför inte troligt att Thales använda den metod som vi beskrivit. Han har med största sannolikhet använt metoder som kräver mer räkningar och som utnyttjar likformiga trianglar. Artikeln finns tillgänglig på Internet.

Thales beräkning av avståndet till ett skepp Historikerna tillskriver också Thales en metod för att från land mäta ett skepps avstånd till kusten. Metoden är enkel och raffinerad. I figur 13.8 har vi antagit att kurssträckan är en rät linje och man vill mäta avståndet från skeppet till den punkt A på kusten som ligger närmast skeppet. Det innebär att den räta linjen från skeppet till A är vinkelrät mot kuststräckan. Från punkten A går vi längs kusten till en punkt P som vi markerar genom att t.ex. sticka ner en käpp. Vi fortsätter längs kusten till en punkt B som är sådan att $AP = BP$. Från B går vi vinkelrät mot kuststräckan in mot land till dess vi kommer till en punkt Q som är sådan att punkten P ligger på syftlinjen från Q till skeppet. Nu är uppenbarligen de båda trianglarna i figuren kongruenta och det betyder att QB är det sökta avståndet från A till skeppet.

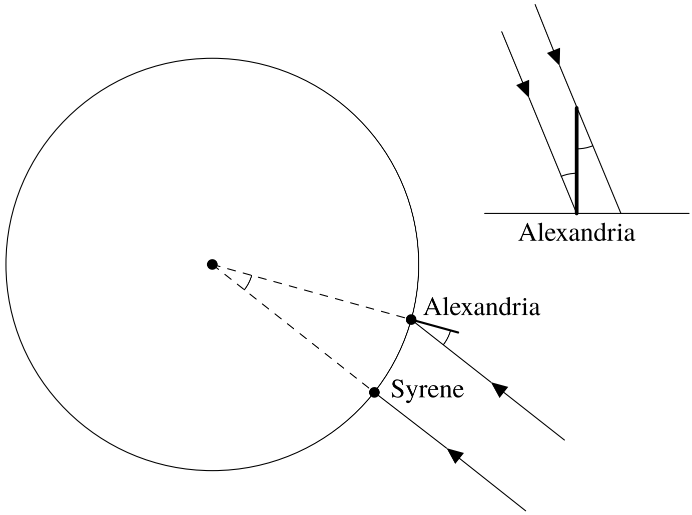


Figur 13.8: Thales metod att bestämma avståndet från ett skepp till kusten.

Thales anses inte bara vara en matematiker som kunde använde geometriska resonemang för att lösa praktiska problem. Han var också teoretiker och en av pionjärerna när det gällde matematisk bevisföring. Hur han övertygade sig om att sträckan QB i konstruktionen ovan verkligen var den sökta lösningen vet vi inte. Kanske han övertygades av figuren. Euklides som levde flera hundra år senare hade använt ett av sina kongruensfall men det var knappast formulerat då Thales levde. Thales torde emellertid observerat att båda trianglarna är rätvinkliga, att vinklarna vid P är lika stora och att sidan AP är lika stor som sidan BP. Av det har han kanske dragit slutsatsen att sidan BQ är lika lång som sträckan mellan skeppet och punkten A.

Eratosthenes bestämning av jordens omkrets Eratosthenes var under delar av 200-talet f.Kr. föreståndare för biblioteket i Alexandria. Han var en av den tidens mest kända vetenskapsmän. Av sin samtid blev han kallad för ”beta” – den andra bokstaven i det grekiska alfabetet. Han var kunnig inom många områden men inte bäst inom något. Han var den eviga tvåan. Matematik och geografi var två ämnen som han ägnade stor uppmärksamhet och det är kanske den kunskapskombinationen som ledde till att han gjorde en uppskattning av jordens omkrets som är förvånande exakt. Hjälpmedlen är enkla och det är också de matematiska beräkningarna.

Eratosthenes var född i Syrene som ligger rakt söder om Alexandria. Han visste att det i Syrene fanns en brunn där man kunde se när solen stod i zenit. Han visste också när den gjorde det. Med hjälp av en pinne i marken enligt några eller av en obelisk i Alexandria enligt andra kunde han mäta solstrålarnas infallsvinkel samtidigt som solen stod i zenit i Syrene.



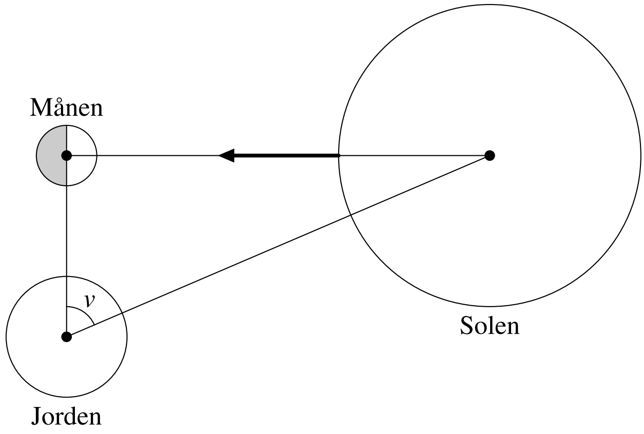
Figur 13.9: Figuren visar att infallsvinkeln för solstrålarna i Alexandria är lika med medelpunktsvinkeln till bågen mellan Alexandria och Syrene.

Han kunde sluta sig till att infallsvinkeln i Alexandria är lika med medelpunktsvinkeln till storcirkelbågen från Alexandria till Syrene. Se figur 13.9. Han behövde nu en uppskattning av avståndet mellan de båda städerna. Det finns olika versioner av hur han beräknade det. Någon säger att han skickade ut en löpare för att mäta det, andra att han rådfrågade rutinerade kamelförare. Han kom kom till slutsatsen att avståndet kunde uppskattas till 5 000 stadier. Infallsvinkeln av solstrålarna i Alexandria uppmättes till 7.2° d.v.s. en femtiondel av ett helt varv. Han kunde nu beräkna jordens omkrets till $50 \cdot 5\,000 = 250\,000$ stadier. Eftersom ett stadium är ungefär 180 meter skulle det innebära att Eratosthenes uppskattning av jordens omkrets är 45 000 km. Det korrekta värdet är 40 075 km. Det är slående hur Eratosthenes med så enkla medel kunnat fått ett sådant bra resultat. Det är naturligtvis många osäkra mätningar som avståndet mellan de båda städerna. Längden av ett stadium kunde också variera.

Aristarchos beräkning av förhållandet mellan jordens avstånd till solen och till månen
Aristarchos var en astronom och matematiker som var verksam i Alexandria under 200-talet f.Kr. Han var en av de få förespråkarna för en heliocentrisk världsbild med solen i centrum. Den geocentriska världsbilden med jorden som centrum var dominerande under antiken med förespråkare som Aritstoteles och Ptolemaios. Aristarchos modell av världen hade få anhängare i det vetenskapliga etablissemanget. Det skulle dröja till renässansen innan hans heliocentriska världsbild blev allmänt accepterad. Det skall emellertid sägas att Arkimedes använde sig av Aristarchos resultat i sitt berömda verk *Sandräknaren* där han uppskattar antalet sandkorn i universum.

Aristarchos försökte beräkna förhållandet mellan jordens avstånd till solen och månen genom att mäta vinkeln v mellan solens och månens lägen när det var halvmåne. Då faller solstrålarna vinkelrätt mot månen och vi får en rätvinklig triangel som i figur 13.10.

Förhållandet mellan solens och månens avstånd är då $1/\cos v$. Aristarchos uppmätte v till 87° och det ger med våra trigonometriska tabeller att förhållandet är ungefär 19. Nu hade inte Aristarchos tillgång till några trigonometriska tabeller. Han gjorde uppskattningar av



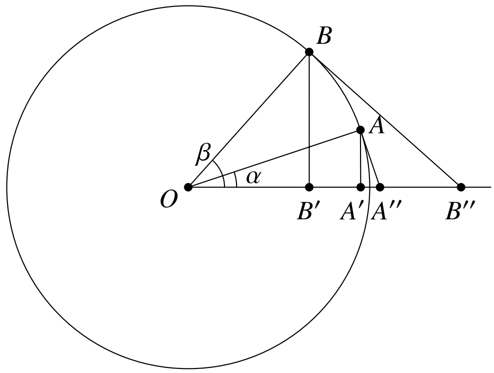
Figur 13.10: Aristarchos metod att beräkna förhållandet mellan solens och månens avstånd till jorden.

förhållandet mellan den kortare kateten och hypotenusan i en rätvinklig triangel, om han vet att de övriga vinklarna är 87° respektive 3°, och lyckades visa att förhållandet låg mellan 18 och 20. Han kom fram till detta resultat genom en olikhet som vi beskriver i modern form.

Om α och β är godtyckliga spetsiga vinklar sådana att $\alpha < \beta$ så gäller

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} < \frac{\beta}{\alpha} < \frac{\tan\beta}{\tan\alpha}.$$

Olikheten kallas idag för *Aristarchos olikhet* och den användes senare av Ptolemaios när han konstruerade sina trigonometriska tabeller. En formulering som inte innehåller trigonometriska funktioner och som därför ligger närmare Aristarchos egen finns i figur 13.11 med bildtext. Hur han härledde olikheten vet vi inte. Ett bevis finns i Ptolemaios *Almagest* och den finns på Internet på länken `https://hypertextbook.com/eworld/chords/`.



Figur 13.11: Medelpunkten O i en cirkel är ena ändpunkten till sträckan OC. Radierna OA och OB bildar vinklarna α respektive β med OC. Från A och B fälls normalerna AA' respektive BB' mot OC. Tangenterna till cirkeln i A och B skär OC i A'' respektive B''. Betrakta de rätvinkliga trianglarna OAA' och OBB' samt OAA'' och OBB''. Aristarchos olikhet kan formuleras på följande sätt $\frac{AA'}{BB'} < \frac{\alpha}{\beta} < \frac{AA''}{BB''}$.

Vi vet inte heller exakt hur Aristarchos kom fram till sina uppskattningar, men han har med stor sannolikhet jämfört vinkeln v med andra vinklar. Det är lätt att se om vi låter $\alpha = 3°$

och $\beta = 30°$ så ger olikheten att förhållandet $1/\cos 87° = 1/\sin 3°$ är mindre är 20. Om vi använder $\alpha = 3°$ och $\beta = 15°$ så kan man visa att förhållandet är större än 18.

Aristarchos matematiska beräkningarna är korrekta men hans mätning av v skiljer sig avsevärt från det vi nu anser vara det rätta värdet nämligen 89.5°. Det innebär att förhållandet mellan solen och månens avstånd till jorden i själva verket är ungefär 400. Hans teorier och metoder är emellertid viktigare än resultaten. Den heliocentriska världsbilden är nu allmänt vedertagen och hans olikhet blev ett viktigt hjälpmedel vid utformande av de första trigonometriska tabellerna i modern mening.

Ptolemaios trigonometriska tabeller Klaudius Ptolemaios *Almagest* från omkring 150 e.Kr. är ett av de viktigaste verken i astronomins historia. Han försökte anpassa den enkla geocentriska världsbilden där planeterna och solen kretsar kring jorden i cirkulära banor till de mätningar som gjorts. Bilden måste justeras och han införde begrepp som epicentrum och epicykler men fortfarande var jorden i centrum. *Almagest* kom att bli det ledande verket i över tusen år innan Kepler i början av 1600-talet formulerade sina lagar, som innebar att planeterna inklusive jorden rörde sig i elliptiska banor med solen i en av brännpunkterna.

För att genomföra de beräkningar som krävdes behövde Ptolemaios bestämma sambandet mellan en cirkelbåge och motsvarande korda. Himlakropparnas lägen relativt varandra mättes med hjälp av vinklar och det var ofta nödvändigt att översätta det till förhållande mellan sträckor. Ptolemaois konstruerade därför en tabell där han kunde avläsa kordan för en given medelpunktsvinkel. Avståndet mellan två på varandra följande vinklar i hans tabell är en halv grad. I konstruktionsarbetet använde sig Ptolemaios av kända matematiska satser men han behövde också formulera och bevisa nya. En sammanfattning av hans arbete finns på den tidigare nämnda länken och har titeln *Ptolemy's Table Of Chords: Trigonometry in The Second Century* och har **G. Elert** som upphovsman. Webbsidan rekommenderas för den som vill sätta sig in detaljer kring Ptolemaios tabeller. Förutom en sammanfattning och analys finns där också utdrag av tabellerna, som också jämförs med dagens digitala.

Vi väljer ut några delar som belyser hur Ptolemaios konstruerade tabellerna.

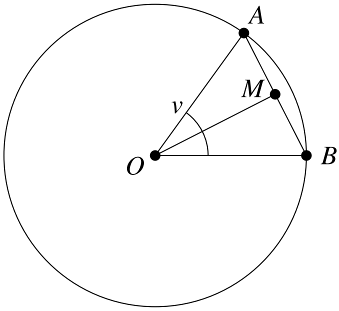
- Hur mätte Ptolemaios vinklar och kordor?

  Ptolemaios mäter vinklarna i grader och ett varv motsvarar 360°. Kordornas längder mäts med hjälp av diametern som delas in 120 lika stora delar. Längderna anges alltså i antalet 120-delar av diametern. Man kan fråga sig varför Ptolemaios väljer 120 delar. En gissning är att förhållandet mellan en cirkelbåge med medelpunktsvinkeln 120° och diametern är $\pi/3$ som litet mer är 1. Diametern är alltså nästan lika stor som en cirkelbåge med medelpunktsvinkeln 120°.

- Hur förhåller sig Ptolemaios kordor till dagens trigonometriska funktioner?

  I figur 13.12 har medelpunktsvinkeln v kordan AB som vi betecknar $\text{chord}(v)$. Om vi kallar cirkelns radie för r så är med våra beteckningar $AB = 2AM = 2r \sin \frac{v}{2}$. Men enligt Ptolemaios är diametern 120 enheter och alltså är $r = 60$. Vi har alltså

  $$\text{chord}(v) = 120 \sin \tfrac{v}{2}.$$



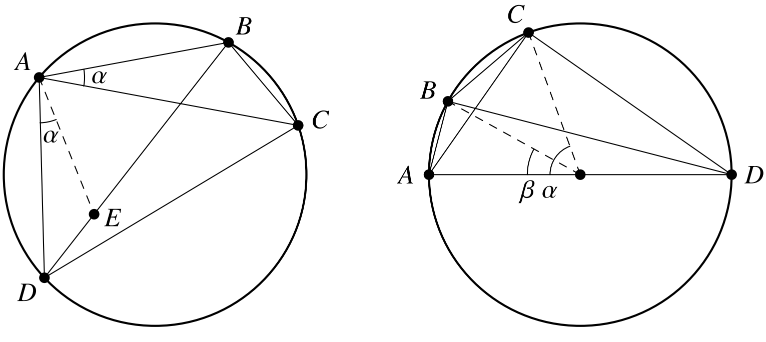
Figur 13.12: En medelpunktsvinkel v med korda AB i en cirkel.

- Hur arbetade Ptolemaios ut sin tabell?

  Han använde inledningsvis polygoner som liksidiga trianglar, kvadrater samt regelbundna femhörningar, sexhörningar och tiohörningar där förhållandet mellan sidor och radier är kända. Han kunde beräkna kordorna för 120°, 90°, 72°, 60° och 36°. Genom att använda motsvarigheterna till formlerna för $\sin(u-v)$, $\sin(u+v)$ och $\sin(u/2)$ kunde han bestämma kordorna till medelpunktsvinklar som t.ex. 48°, 42°, 30°, 24°, 18°, 15°, 12°, 6° och 3°. Ptolemaios formulerar och bevisar Aristarchos sats och med hjälp av den kan ha få tillräckligt bra uppskattningar av kordorna för små vinklar.

- Hur härledde Ptolemaios formlerna för kordorna till skillnaden och summan mellan två vinklar samt kordan för halva vinkeln?

  För att härleda nämnda formler formulerar och bevisar Ptolemaios först en sats om en fyrhörning som är inskriven i en cirkel. När det väl är gjort är det tämligen enkelt att med hjälp av Pythagoras sats härleda formlerna. Satsen har sedan kommit att kallas *Ptolemaios sats*.



Figur 13.13: Illustrationer till Ptolemaios sats.

Vi formulerar och bevisar den.

Ptolemaios sats Om $ABCD$ är en fyrhörning med hörnen på en cirkel så gäller att

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Bevis. I vänstra delen av figur 13.13 är E en punkt på diagonalen BD sådan att vinklarna BAC och DAE är lika stora.

Nu är trianglarna BAC och EAD likformiga eftersom

- vinklarna BAC och DAE är lika stora enligt konstruktionen av punkten E
- vinklarna BCA och EDA är lika stora då de är periferivinklar på samma båge.

Likformigheten ger

$$\frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC}.$$

Vidare är trianglarna ACD och AEB likformiga eftersom

- vinkeln CAD är lika med vinkeln BAE
- vinkeln ACD lika med vinkeln ABE då de är periferivinklar på samma båge.

Likformigheten ger

$$\frac{CD}{BE} = \frac{AC}{AB}.$$

Vi skriver om de båda likheterna genom korsvis multiplikation och får

$$AD \cdot BC = AC \cdot DE \quad \text{och} \quad AB \cdot CD = AC \cdot BE.$$

Addition ger

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot DE + AC \cdot BE = AC \cdot (DE + BE) = AC \cdot BD.$$

Satsen är visad.

Betrakta nu den högra delen av figur 13.13. Vi har

$$\text{chord}(\alpha) = AC, \quad \text{chord}(\beta) = AB, \quad \text{chord}(\alpha - \beta) = BC.$$

Vi vill beräkna $\text{chord}(\alpha - \beta)$ om vi känner $\text{chord}(\alpha)$ och $\text{chord}(\beta)$. Observera att vinklarna ABD och ACD båda är räta eftersom AD är en diameter. Vidare är diametern $AD = 120$. Pythagoras sats ger

$$BD = \sqrt{120^2 - (\text{chord}(\beta))^2} \quad \text{och} \quad CD = \sqrt{120^2 - (\text{chord}(\alpha))^2}.$$

Vi utnyttjar nu Ptolemaios sats $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$, löser ut den sökta kordan BC och får

$$\text{chord}(\alpha - \beta) = BC = \frac{AC \cdot BD}{AD} - \frac{AB \cdot CD}{AD}$$

eller

$$\text{chord}(\alpha - \beta) = \frac{\text{chord}(\alpha) \cdot \sqrt{120^2 - (\text{chord}(\alpha))^2}}{120} - \frac{\text{chord}(\beta) \cdot \sqrt{120^2 - (\text{chord}(\beta))^2}}{120}.$$

Läsaren kan själv jämföra med formeln

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha.$$

På liknande sätt beräknas kordan för summan av två vinklar och kordan för halva vinkeln. Vi hänvisar till *Ptolemy's Table Of Chords: Trigonometry in The Second Century*.

Ett utdrag med moderna beteckningar ur Ptolemaios tabeller finns i samma arbete. I figur 13.14 ges en grekisk variant som möjligen kan ge en uppfattning hur Ptolemaios ursprungliga tabeller kan ha sett ut.

περιφε-ρειῶν	**εὐθειῶν**			**ἑξηκοστῶν**			
∠	ō	λα	κε	ō	α	β	ν
α	α	β	ν	ō	α	β	ν
α∠	α	λδ	ιε	ō	α	β	μθ
β	β	ε	λθ	ō	α	β	μθ
β∠	β	λζ	δ	ō	α	β	μθ
γ	γ	η	κη	ō	α	β	μη
γ∠	γ	λθ	νγ	ō	α	β	μη
δ	δ	ια	ιζ	ō	α	β	μζ
δ∠	δ	μβ	μ	ō	α	β	μζ
ε	ε	ιδ	δ	ō	α	β	μς
ε∠	ε	με	κζ	ō	α	β	με
ς	ς	ις	μθ	ō	α	β	μδ

Figur 13.14: Grekisk variant av Ptolemaios kordatabell. (Bild: `2N97BeM`)

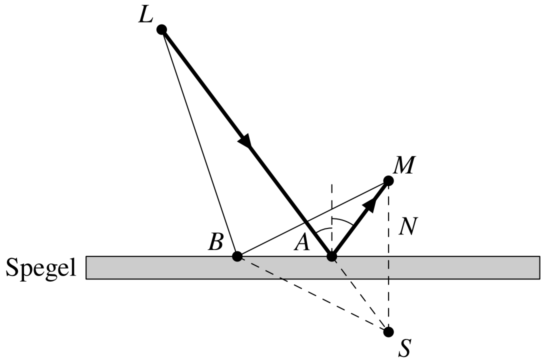
Herons princip om ljusets utbredning Heron (c:a 10–c:a 70 e.Kr.) var en fysiker och matematiker som verkade i Alexandria. Som matematiker är han känd för *Herons formel* som används för att beräkna arean av en triangel om sidorna är kända. Han var också en av antikens främsta uppfinnare. Han konstruerade bl.a. en springbrunn, en ångkula som förebådade ångmaskinen och en varuautomat.

Heron formulerade också den princip som säger att ljuset alltid väljer den kortaste vägen mellan två punkter. En konsekvens av den är reflektionslagen vid spegling, som säger att infallande och utfallande ljusstrålar bildar samma vinkel med spegelns normal. Vi visar lagen i figur 13.15 med bildtext.

13.4.2 Konstruktionsproblem

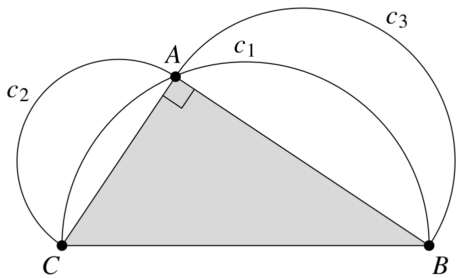
Cirkelns kvadratur I indiska *Sulvasutras* beskrivs hur man med hjälp av repsträckning kan omvandla olika typer av altarområden till kvadrater. Vi behandlade detta i avsnitt 13.3. Beskrivningarna har religiösa förtecken. Gudarna skulle bli välvilligt inställda om konstruktionerna kunde göras exakta. En rektangel kan omvandlas till en kvadrat och skrivarens konstruktion är relativt komplicerad. När det gällde en cirkel har inte skrivarna angett en exakt metod utan nöjer sig med att konstruera en kvadrat var sida är $13/15$ av cirkelns diameter. Det är en hygglig approximation men inte mer. Problemet med cirkelns kvadratur förblev olöst. Det förmedlades till andra kulturer och var aktuellt också under antiken.

Den grekiske matematikern **Hippokrates** (c:a 470–410 f.Kr.) var verksam i Aten och skrev bl.a. en bok om elementär geometri. Han lyckades konstruera ett område som begränsades av



Figur 13.15: En ljusstråle utgår från ljuskällan L, reflekteras i spegeln och tas emot av mottagaren M. Punkt S är spegelbilden av M. Låt B vara en godtycklig punkt på spegeln och förbind B med M och S. Då är $MB = SB$ eftersom B ligger på mittpunktsnormalen till MS. Alltså är $LB + BM = LB + BS$. Om ljuset väljer den kortaste vägen från L till M via spegeln så skall vi välja B så att $LB + BS$ är så liten som möjligt och det inträffar då L, $B = A$ och S ligger på samma räta linje. Då är vinklarna LAB, NAS och MAN lika stora och det innebär i sin tur att ljusstrålens infallsvinkel är lika med dess utfallsvinkel.

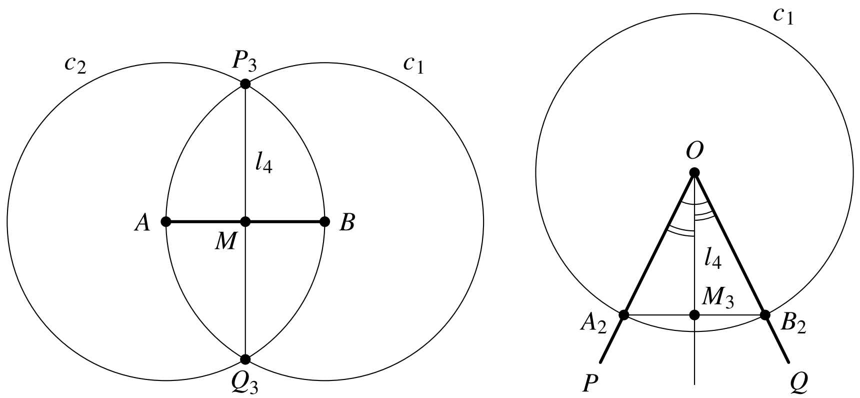
cirkelbågar – *Hippokrates halvmånar* – som har samma area som en triangel. Se figur 13.16 med bildtext. Att detta var möjligt innebar att problemet med cirkelns kvadratur eventuellt skulle kunna lösas. Nu vet vi att så inte är fallet.



Figur 13.16: Triangeln ABC är rätvinklig. Konstruera halvcirklarna c_1, c_2 och c_3 med diametrarna BC, CA respektive AB. De båda halvmånformiga områdena som begränsas av c_1 och c_2 samt c_1 och c_3 har samma area som triangeln ABC. Summan av areorna av de båda halvmånarna är ju lika med skillnaden mellan areorna av de båda mindre halvcirklarna och de båda segment som kateterna skär av från den största cirkeln. Observera att Pythagoras sats medför att arean av halvcirkeln med hypotenusan som diameter är lika med summan av areorna av de båda halvcirklar med kateterna som diametrar. Det innebär att summan av halvmånarnas areor är lika med den area vi får om vi från den största halvcirkelns area subtraherar de båda segmentens areor och den skillnaden är arean av triangeln ABC.

Kubens fördubbling I antiken var det emellertid ett annat problem som var i förgrunden och som sysselsatte många av den tidens matematiker. Det kallas *det deliska problemet* eller *problemet med kubens fördubbling*. Precis som problemet med cirkelns kvadratur var bakgrunden religiös. Under en pest i staden Delos rådfrågade invånarna oraklet i Delfi vad man skulle göra för att få farsoten att upphöra. De uppmanades att konstruera ett altare vars volym var dubbelt så stort det kubiska altare som tillägnats Apollon. Konstruktionen skulle ge ett exakt resultat. Problemet visade sig vara svårt och en rad matematiker arbetade för att finna en lösning. Platon gav det till några av sina elever i Alexandria. En av dem var Menaichmos (c:a 380–320 f.Kr.). Arbetet med problemet ledde honom in på studier kägelsnitt d.v.s. skärningskurvor mellan en cirkulär dubbelkon och ett plan. Det visade sig finnas i princip tre olika typer – ellipser, hyperbler och parabler. Menaichmos kunde lösa problemet med kubens fördubbling genom att använda en hyperbel och en parabel. Platon var emellertid inte nöjd. Han ansåg att problemet skulle lösas enbart med hjälp av cirklar och räta linjer eller, om vi uttrycker det med mekaniska verktyg, enbart med passare och ograderad linjal. Det har visat sig att kägelsnitten inte kan konstrueras med de krav som Platon ställde. Vi skall i avsnitt 13.4.5 se hur hyperbler och parabler kan användas för att lösa *det deliska problemet*.

Några grundläggande konstruktionsproblem Platons krav var stränga. Det var bara passare och ograderad linjal som var tillåtna. Låt oss studera några problem för att bekanta oss med arbetssättet. Vi väljer först två enkla och grundläggande konstruktionsproblem. I den vänstra delen av figur 13.17 visar vi hur man kan konstruera mittpunkten på en sträcka och i den högra hur man kan konstruera bisektrisen till en vinkel. Indices anger i vilken ordning konstruktionerna utförs.



Figur 13.17: Bilden till vänster visar hur man konstruerar mittpunktsnormalen till en sträcka. Den till höger visa hur man konstruerar bisektrisen till en vinkel.

Betrakta först den vänstra figuren. Sträckan AB är given och vi söker dess mittpunkt.

1. Konstruera en cirkel c_1 med medelpunkt i B och som går genom A.
2. Konstruera en cirkel c_2 med medelpunkt i A och som går genom B.
3. De båda cirklarna skär varandra i P_3 och Q_3.
4. Konstruera sträckan P_3Q_3.
5. Sträckan P_3Q_3 skär sträckan AB i M som är den sökta mittpunkten.

Att den konstruerade punkten M verkligen är den sökta mittpunkten kan bevisas men vi skjuter upp den formen av bevis till avsnitt 13.4.4.

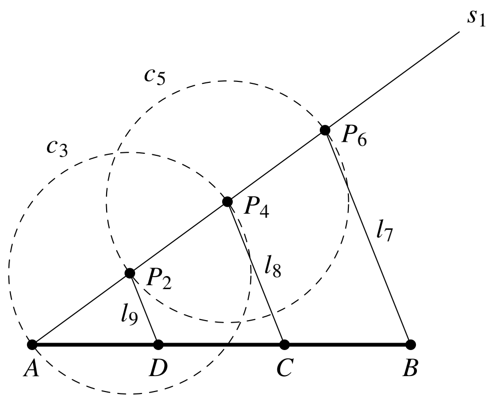
Vi övergår nu till den högra figuren. Vinkeln *POQ* är given och vi söker en halvstråle genom *O* som delar denna vinkel i två lika stora delar.

1. Konstruera en godtycklig cirkel c_1 med medelpunkt i O.
2. Cirkeln c_1 skär OP i A_2 och OQ i B_2.
3. Konstruera mittpunkten M_3 på sträckan A_2B_2.
4. Konstruera halvstrålen genom O och M_3 som är den sökta halvstrålen.

Beviset för att vår konstruktion är korrekt gör vi senare. Observera att konstruktionen i 3. utnyttjar att vi redan visat hur man konstruerar mittpunkten till en sträcka och innehåller fem olika moment. Genom att på ett klokt sätt bygga upp mer komplicerade konstruktioner från enklare kan man effektivisera arbetet. I många av dagens geometriska programvaror som t.ex. *GeoGebra* har man från de ursprungliga byggstenarna som punkter, räta linjer, sträckor, cirklar och vinklar programmerat mer komplexa konstruktioner som t.ex. mittpunkten på en sträcka och bisektrisen till en vinkel.

Läsaren hänvisas till boken *Geometric Constructions* av G. Martin där författaren tar upp en rad olika typer av konstruktioner.

Vinkelns tredelning Det visar sig också möjligt att med enbart passare och ograderad linjal dela in en given sträcka i fler än två lika stora delar. I figur 13.18 har vi delat in en sträcka i tre lika stora delar. Konstruktionen bygger på att man tidigare visat hur man konstruerar en rät linje som är parallell med en given rät linje och som går genom en given punkt som inte ligger på den givna räta linjen. Vi avstår av utrymmesskäl att göra den konstruktionen utan hänvisar till Euklides *Elementa* Bok 1 proposition 31 som finns på länken `https://mathcs.clarku.edu`.



Figur 13.18: Sträckan AB är given och vi vill konstruera två punkter C och D på AB sådana att $AD = CD = CB$. Konstruera först en halvstråle s_1 genom A som inte går genom B. Välj en punkt P_2 på s_1 skild från A. Slå en cirkel c_3 genom A med medelpunkt i P_2. Den skär s_1 i P_4. Slå en cirkel genom P_2 med samma radie som c_3 och med medelpunkten i P_4. Den skär s_1 i P_6. Förbind P_6 och B med de räta linjen l_7. Konstruerar sedan de räta linjerna l_8 och l_9 genom P_4 respektive P_2 parallella med l_7. De skär AB i C respektive D som är de sökta punkterna.

En sträcka går alltså att dela i tre lika stora delar med hjälp av passare och linjal men det visar sig betydligt svårare att göra samma sak med en vinkel. Problemet kan lösas för speciella vinklar som t.ex. räta vinklar och vinklar som är 45° men det går inte för godtycklig vinkel. Vinkeln 60° kan t.ex. inte delas i tre lika stora delar med de stränga krav som Platon en gång ställt. Det bevisades på 1800-talet då algebran utvecklats.

Konstruktion av regelbundna månghörningar Ett annat problem, som till viss del hänger samman med vinkelns tredelning, är konstruktioner av regelbundna polygoner. Det är elementärt att konstruera en regelbunden triangel, en kvadrat och en regelbunden sexhörning. Kan man konstruera en regelbunden femhörning, en pentagon, med bara passare och linjal? Pentagonen förekommer i många sammanhang och den var bl.a. en helig symbol för pythagoréerna.

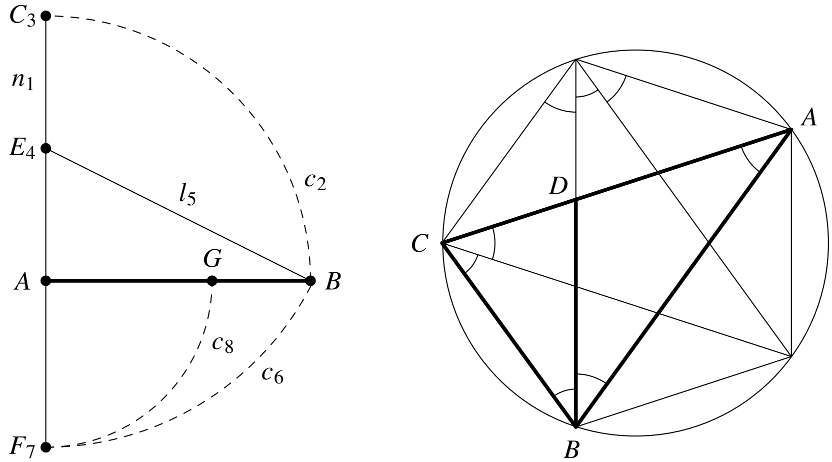
Problemet med att konstruera en regelbunden femhörning visade sig höra samman med ett annat problem nämligen att konstruera det vi nu kallat det gyllene snittet. Det kan formuleras på följande sätt:

> Dela en given sträcka i två delar så att den större delen förhåller sig till den mindre som hela sträckan till större delen.

eller som det formuleras i *Elementa*:

> Låt AB var en given sträcka. Konstruera en punkt G på AB sådan att rektangeln med sidorna AB och BG har samma area som kvadraten med sidan AG.

Konstruktionen av det gyllene snittet görs i många steg. En version visas i vänstra delen av figur 13.19 med bildtext. I detta fallet känns det angeläget att bevisa att den punkt G vi konstruerat verkligen uppfyller de villkor vi ställt nämligen att $GB/GA = GA/AB$ eller att $GB \cdot AB = GA^2$. Om man följer framställningen i *Elementa* görs konstruktionerna och bevisen i flera steg. Rektanglar och kvadrater konstrueras och jämförs och verksamheten påminner om pusselläggning. I en kritisk punkt används Pythagoras sats. Det ligger utanför syftet med denna framställning att genomföra detaljerna i beviset utan läsaren hänvisas till `https://mathcs.clarku.edu`. Ett bevis med moderna metoder ges i slutet av detta avsnitt.



Figur 13.19: Till vänster konstrueras den punkt G som delar AB i gyllene snittet. Dra normalen n_1 till AB genom A. Konstruera en punkt C_3 på normalen sådan att $AC_3 = AB$. Bestäm mittpunkten E_4 på AC_3 och konstruera sträckan E_4B. Bestäm F_7 på n_1 så att $E_4F_7 = E_4B$ och slutligen G så att $AG = AF_7$.

I högra delen av figur 13.19 visar vi en regelbunden femhörning inskriven i en cirkel. Pentagrammet får vi genom att dra diagonalerna. Vad har nu femhörningen med gyllene snittet att göra? För att förstå det observerar vi först att det i varje hörn finns tre vinklar och alla är lika stora eftersom de står på lika stora cirkelbågar. Betrakta nu triangeln ABC. Den är likbent och vinklarna vid basen är dubbelt så stora som vinkeln vid spetsen. Bisektrisen till vinkeln ABC skär sidan AC i punkten D. Trianglarna ADB och CBD är båda likbenta och $AD = BD = BC$. Uppenbarligen är trianglarna ABC och BCD likformiga och alltså har vi att

$$\frac{CD}{BC} = \frac{BC}{AC} \quad \text{vilket medför att} \quad \frac{CD}{AD} = \frac{AD}{AC}.$$

Alltså är delar punkten D sträckan AC i ett gyllene snitt.

I *Elementa* konstrueras med hjälp av gyllene snittet en likbent triangel där basvinklarna är dubbelt så stora som toppvinkeln och det utnyttjas i sin tur för att konstruera en regelbunden femhörning.

I de klassiska skrifterna anges inte något numerisk värde på det gyllene snittet. Vi härleder det och utnyttjar moderna beteckningar. Antag att sträckan AB delas av punkten G i gyllene snittet. Vi antar att AB är 1 längdenhet och att den större delen AG är x så gäller

$$\frac{x}{1} = \frac{1-x}{x}$$

vilket ger

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Den positiva roten till denna ekvation är $x = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0.6180$ och det visar att vår konstruktion i vänstra delen av figur 13.19 är korrekt. Av Pythagoras sats följer nämligen att $E_4B = \sqrt{5}/2$. Då är också $E_4F_7 = \sqrt{5}/2$ och $AF_7 = AG = (\sqrt{5} - 1)/2$.

Det är alltså möjligt att konstruera regelbundna n-hörningar där $n = 3, 4, 5$ och 6 men också då $n = 8$ och 10. Men kan man också konstruera regelbundna sjuhörningar? niohörningar? Det var en länge en öppen fråga och löstes först på 1800-talet.

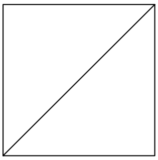
De tre klassiska problemen Konstruktionsproblem var en viktig del av matematiken under antiken. I någon mening existerade ett geometriskt begrepp om det kunde konstrueras. Men som vi sett misslyckades man att med lösa tre problem: Cirkelns kvadratur, kubens fördubbling och vinkelns tredelning. Dessa klassiska konstruktionsproblem skulle engagera många matematiker. Genom att inte kräva att konstruktionerna skulle ske bara med passare och ograderad linjal kunde man lösa problemen. I de flesta fall har inte dessa lösningar haft någon större betydelse för matematikens utveckling. Det finns emellertid undantag. Arkimedes konstruerade en kurva, som kallas *Arkimedes spiral*, och kunde med hjälp av den lösa problemet med kubens fördubbling. Kurvan har också haft stor betydelse i andra sammanhang. Det viktigaste exemplet på hjälpmedel, som ursprungligen utvecklades för att lösa kubens fördubbling, och som kom få en stor betydelse både inom matematiken och fysiken är emellertid kägelsnitten.

De tre klassiska problemen var under århundraden utmaningar för många matematiker. De visade sig vara olösbara och det bevisades på 1800-talet med hjälp av algebra och analys.

13.4.3 De rationella talens otillräcklighet – från aritmetik till geometri

Diagonalen och sidan i en kvadrat är inkommensurabla Den störste matematikern under den försokratiska tiden var Pythagoras. Han är för alltid förknippad med den sats som bär hans namn. Vi har emellertid sett att satsen var känd långt för Pythagoras tid. Det sägs att han hittat ett bevis för satsen. Det troliga är att satsen har fått namnet Pythagoras sats långt senare helt enkelt för att hedra honom. Även om Pythagoras sats är geometrisk till sin natur var Pythagoras i första hand aritmetiker och talteoretiker. Han och den sekt – pythagoréerna – som han var ledare för ansåg att talen var de grundläggande elementen i universum och att allt kunde framställas med hjälp av dem. Med tal menade man de naturliga talen eller kvoter mellan dem – de vi kallar positiva rationella tal.

Pythagoréernas världsbild fick sig en knäck då en av medlemmarna visade att sidan i en kvadrat inte kan mätas med samma enhet som diagonalen. Det finns ingen längdenhet sådan att kvadratens sida och dess diagonal båda är ett helt antal längdenheter. Man säger att sidan och diagonalen är *inkommensurabla*. Den som upptäckte denna för sekten obehagliga sanning dömdes till döden och avrättades. De övriga medlemmarna fick avge tystnadslöfte. Den olycklige pythagoréen kan ha resonerat på följande sätt.



Figur 13.20: Sidan och diagonalen i en kvadrat.

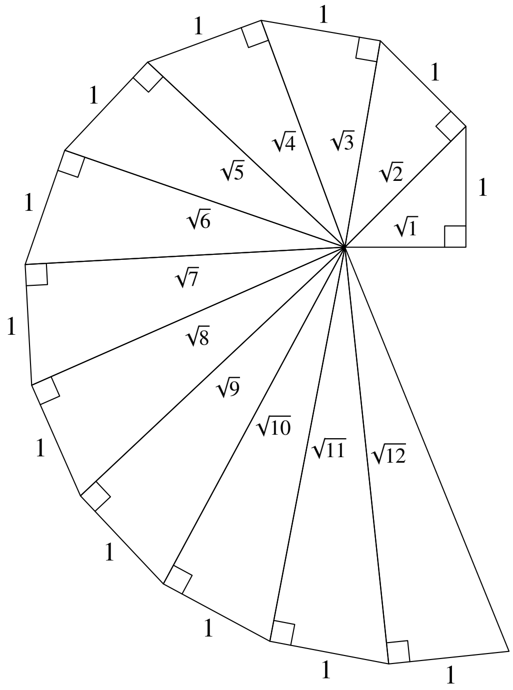
Antag att det finns en längdenhet som går ett helt antal gånger i både sidan och diagonalen d.v.s. att mätetalen för både sidan och diagonalen är hela tal. Vi kan anta att båda mätetalen inte är jämna eftersom vi annars kan använda en dubbelt så stor längdenhet. Eftersom kvadraten på diagonalen är summan av kvadraterna på sidorna d.v.s. lika med dubbla kvadraten på sidan så måste diagonalens mätetal vara ett jämnt tal. Kvadraten på ett udda tal är ju alltid udda. Kvadraten på ett jämnt tal är emellertid delbart med fyra och det innebär att dubbla kvadraten på sidans mätetal är delbart med fyra. Då måste kvadraten på sidans mätetal vara jämnt och därmed också sidans mätetal. Alltså har både diagonalen och sidan jämna mätetal och det strider mot vår förutsättning.

Theodorus spiral Med vår terminologi har man visat att $\sqrt{2}$ inte är ett rationellt tal. Det är irrationellt. Visserligen fick pythagoréerna avge tysthetslöfte. Upptäckten att två sträckor kunde vara inkommensurabla fick inte spridas men det var naturligtvis omöjligt i längden. I en av Platons dialoger *Theaetetus*, där kunskapens natur diskuteras, skall **Theaetetus** (c:a 417–368 f.Kr.) ha berättat att hans lärare **Theodorus** (c:a 465–398 f.Kr.) visat att varje naturligt tal upp till 17 som inte är en jämn kvadrat har en kvadratrot som är irrationell. Man vet inte hur Theodorus, som för övrigt också var lärare till Platon, genomfört beviset och man vet inte om talet 17 inkluderas eller inte.

I figur 13.21 visar hur man successivt kan konstruera sträckor vars längd är $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$, ... Den figur som uppkommer brukar kallas *Theodorus spiral*.

Eudoxos definition av proportionalitet Det är naturligtvis ett problem att två sträckor eller två areor är inkommensurabla. Begreppet proportionalitet är centralt inom geometrin och då måste man kunna definiera förhållandet mellan godtyckliga sträckor eller areor. Hur gör man det om de inte kan mätas med samma enhet? De naturliga talen räcker inte till. Det hjälper inte att t.ex. använda mycket små längdenheter. En som tog sig an det grundläggande problemet och som också föreslog en lösning var Eudoxos som var elev till Platon och som gav viktiga bidrag till astronomin och matematiken. Han intresserade sig speciellt för grundläggande frågor och han formulerade den uttömningsprincip som bl.a. Arkimedes använde med stor framgång och som också några årtusenden senare låg till grund för Weierstrass definition av gränsvärde.

Eudoxos gav alltså viktiga bidrag till teorin om proportioner och följande definition är central:



Figur 13.21: Theodorus spiral.

Storheter sägs ha samma förhållande, den förste till den andra som den tredje till den fjärde om varje gång man bildar samma multiplar av den första och tredje och samma multiplar av den andra och fjärde så gäller:

- Om multipeln av den första är större än multipeln av den andra så är också multipeln av den tredje större än multipeln av den fjärde
- Om multipeln av den första är lika med multipeln av den andra så är också multipeln av den tredje lika med multipeln av den fjärde
- Om multipeln av den första är mindre än multipeln av den andra så är också multipeln av den tredje mindre än multipeln av den fjärde.

I algebraiska termer kan definitionen formuleras på följande sätt:

Om a, b, c och d är fyra storheter så är förhållandet mellan a och b detsamma som förhållandet mellan c och d om för varje heltal m och n gäller att:

- om $ma > nb$ så är också $mc > nd$
- om $ma = nb$ så är också $mc = nd$
- om $ma < nb$ så är också $mc < nd$

En ekvivalent definition är:

Vi säger att

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

om för varje rationellt tal $r = n/m$ gäller att

$$r < \frac{a}{b} \Rightarrow r < \frac{c}{d} \quad \text{och} \quad r = \frac{a}{b} \Rightarrow r = \frac{c}{d} \quad \text{och} \quad r > \frac{a}{b} \Rightarrow r > \frac{c}{d}.$$

För den som är bekant med den diskussion om de reella talens natur, som fördes under 1800-talet, för Eudoxos definition onekligen tankarna till Dedekinds snitt.

Proportionalitet är ett centralt begrepp inom teorin för likformighet. Definitionen är onekligen komplicerad och att alltid gå tillbaka till den för att bevisa satserna om likformighet skulle bli alltför omständligt. Situationen räddas genom att man kan använda definitionen för att visa att areorna av två trianglar och två parallellogrammer med samma höjd förhåller sig som baserna. De båda satserna är sedan utgångspunkt för rent geometriska resonemang.

Eudoxos teorier har haft stor betydelse för att ge struktur åt geometrin och vi skall i nästa avsnitt se att de ägnas en hel bok i *Elementa*.

13.4.4 Behovet av överblick och struktur – Euklides *Elementa*

Innehållet i *Elementa* När utvecklingen av ett ämne nått ett visst stadium uppstår ett behov att sammanfatta och strukturera de resultat som samlats. Hur skall en sådan sammanfattning göras för att få en överblick över ämnesområdet? Kan man se ett mönster? Vad finns det för samband mellan de olika resultaten? Inom geometrin hade förmodligen Hippokrates redan på 400-talet f.Kr. skrivit en sådan sammanfattning. Det utan tvekan mest berömda verket av detta slag inom geometrin är emellertid Euklides *Elementa* som förmodligen delvis bygger på Hippokrates arbete.

Euklides verkade i Alexandria omkring 300 f.Kr. Han hade dessförinnan troligen studerat vid Platons Akademia. Under sin tid i Alexandria undervisade han och bedrev forskning.

Den ursprungliga grekiska titeln på *Elementa* är *Stoicheia* som betyder grundbegrepp. Verket eller tillrättalagda versioner användes som lärobok under århundraden – i Sverige så sent som 1960-talet. Av den ursprungliga skriften återstår endast små fragment. *Elementa* översattes från början till arabiska och från arabiskan till latin och därefter till de flesta språk.

Elementa är uppdelad i tretton böcker eller kapitel och innehållet är följande:

Bok 1 innehåller grundläggande definitioner, axiom och postulat samt satser om trianglar, parallella linjer och areor. Boken avslutas med Pythagoras sats och dess omvändning.

Bok 2 innehåller vad som brukar kallas geometrisk algebra. I geometrisk form visas bl.a. distributiva lagen, konjugatregeln och kvadreringsregeln. Vidare löses vissa typer av andragradsekvationer geometriskt.

Bok 3 behandlar cirklar.

Bok 4 ägnas åt konstruktioner av figurer som är inskrivna och omskrivna cirklar. Här konstrueras regelbundna trianglar, fyrhörningar, femhörningar, sexhörningar och femtonhörningar.

Bok 5 behandlar Eudoxos proportionslära. Förutom de grundläggande definitionerna visas geometriskt grundläggande satser som motsvarar distributiva och associativa lagar. En rad satser om hur man kan räkna med förhållanden visas.

Bok 6 ägnas åt likformighet.

Bok 7 behandlar talteori. Framställningen är geometrisk. Här visas bl.a. det vi nu kallar Euklides algoritm.

Bok 8–9 fortsätter med talteori. Här behandlas bl.a. geometriska talföljder.

Bok 10 ägnas åt inkommensurabla storheter. Boken innehåller en sats som säger att $\sqrt{2}$ är irrationellt.

Bok 11 innehåller grundläggande rymdgeometri med bl.a. satser om räta linjer, plan och vinklar i rummet.

Bok 12 innehåller satser om volymerna av prismor, cylindrar, pyramider och koner.

Bok 13 behandlar de platonska kropparna – den regelbundna tetraedern, kuben, den regelbundna okatedern, dodekaedern ock ikosaedern.

Elementa omfattar den geometri som ingår i de flesta elementära kurser i dagens matematikutbildning. Den innehåller också viktiga delar av talteorin och ett avsnitt förebådar algebran. Språket är emellertid rent geometriskt. Några viktiga geometriska resultat saknas som volymen och arean av en sfär. De skulle bestämmas några decennier senare av Arkimedes.

Strukturen i *Elementa* Det som gör *Elementa* speciell är strukturen. Verket inleds med en antal definitioner av begrepp som punkt, rät linje, vinkel, cirkel, parallellitet o.s.v. Därefter formulerar Euklides fem postulat där grundläggande egenskaper hos geometriska objekt som punkt, rät linje, cirkel och vinkel slås fast samt fem axiom som inte är speciellt knutna till geometrin. Postulaten och axiomen är följande:

Postulat 1 Genom två punkter går precis en rät linje.

Postulat 2 Varje rät linje är obegränsad.

Postulat 3 Varje punkt är medelpunkt till en cirkel med given radie.

Postulat 4 Alla räta vinklar är lika stora.

Postulat 5 Om två räta linjer skärs av en tredje och de båda vinklarna som bildas på samma sida av den tredje linjen tillsammans är mindre än två räta vinklar så skär de båda förstnämnda linjerna varandra på samma sida om den tredje linjen som de båda nämnda vinklarna.

Axiom 1 Storheter som är lika stora som samma storhet är sinsemellan lika.

Axiom 2 Om lika stora adderas till lika stora så är summorna lika stora.

Axiom 3 Om lika stora subtraheras från lika stora så är skillnaderna lika stora.

Axiom 4 Storheter som sammanfaller är lika stora.

Axiom 5 Det hela är större än sina delar.

Det femte postulatet skiljer sig genom sin komplexitet från de övriga. Vi skall senare i detta avsnitt behandla det speciellt. Det illustreras i figur 13.23.

Efter de grundläggande definitionerna, postulaten och axiomen börjar nu Euklides formulera och bevisa satser eller propositioner. I bevisen får han bara använda postulaten, axiomen och tidigare bevisade satser. Det innebär att satsernas ordning är fundamental. I beviset av sats 30 får han förutom postulaten och axiomen endast använda sig av satserna 1–29. De stränga kraven innebär att påståenden som verkar intuitivt självklara måste bevisas och det kan för många kännas omständligt. Genom att inte ta något för självklart har framställningen emellertid väckt frågor som långt senare lett till att nya områden inom matematiken etablerats som gett nya perspektiv på ämnet.

Några satser, de s.k. kongruensfallen, spelar en viktig roll i framställningen. De ger tillräckliga villkor för att två trianglar är kongruenta d.v.s. motsvarande sidor och vinklar är lika stora. De två första visas tidigt och lyder:

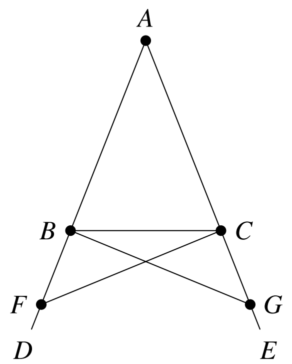
Första kongruensfallet Om två sidor och mellanliggande vinkel i en triangel är lika med motsvarande element i en annan triangel så är de båda trianglarna kongruenta. (Proposition 4, Bok 1)

Andra kongruensfallet Om tre sidor i en triangel är lika med motsvarande element i en annan triangel så är de båda trianglarna kongruenta. (Proposition 8, Bok 1)

De båda satserna visas tidigt för att kunna vara verktyg i i det fortsatta arbetet. Vi ger exempel på framställningen i *Elementa* genom att visa Proposition 5 som följer omedelbart efter första kongruensfallet. Satsen kallas ibland *åsnebryggan*. Om man förstår beviset av den så kunde man också förstå resten av verket. Den säger helt enkelt att vinklarna vid basen i en likbent triangel är lika stora, vilket intuitivt verkar självklart men som nu måste bevisas bara med utgångspunkt från postulaten, axiomen och de fyra första propositionerna. De tre första propositionerna är alla konstruktionsuppgifter. Den första visar hur man kan konstruera en liksidig triangel där en sida är given, de två följande handlar att flytta sträckor med en given längd och den fjärde är alltså första konguensfallet.

Proposition 5 I en likbent triangel är vinklarna vid basen lika stora. Dessutom är yttervinklarna vid basen lika stora.

Givet. En triangel ABC där sidorna AB och AC är lika stora.



Figur 13.22: Illustration till åsnebryggan.

Påstående. Vinkeln ABC är lika med vinkeln ACB. Om D och E är punkter på förlängningarna av AB respektive AC så är vinklarna DBC och ECB lika stora.

Bevis. Låt F vara en punkts på AB:s förlängning.

Konstruera G på AC:s förlängning så att $AG = AF$. (Proposition 3)

Konstruera sträckorna BG och CF. (Postulat 1)

Trianglarna *ABG* och *ACF* är kongruenta eftersom vinkeln vid *A* är gemensam, $AB = AC$ enligt förutsättningen och $AF = AG$ enligt konstruktion. (Proposition 4)

Då är också sidorna *BG* och *CF* samt vinklarna *AFC* och *AGB* lika stora. (Definition av kongruens)

Trianglarna *BCG* och *CBF* är kongruenta enligt Proposition 4. Sidan *BC* är ju gemensam och vi har också visat att $BG = CF$ och att vinkeln *BGC* är lika med vinkeln *CFB*.

Då följer att vinkeln *CBF* är lika med vinkel *BCG* d.v.s. yttervinklarna vid basen är lika stora. (Definition av kongruens)

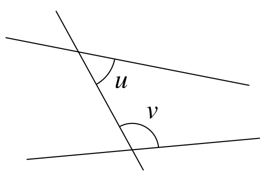
Eftersom summan av en vinkel och motsvarande yttervinkel i en triangel alltid är två räta så är också vinklarna vid basen lika stora. (Axiom 3)

Alltså gäller att vinkeln *ABC* är lika med vinkeln *ACB* samt att vinkeln *DBC* är lika med vinkeln *ECB*. V(ilket) S(kulle) B(evisas).

Framställningen är klinisk. Det man får utgå från och målet är preciserat. Varje slutsats motiveras med hänvisning till postulat, axiom eller tidigare visad sats. Det finns inga kommentarer om hur Euklides kommit fram till sina bevis. Men framställningen är stringent och påståendena blir obestridliga. Framställningen i *Elementa* har blivit en modell för presentationer av matematiska teorier.

Den första boken kulminerar med Pythagoras sats. Det finns många bevis för den och det Euklides ger är intressant då satsens innehåll blir konkret. Euklides *Elementa* finns i sin helhet på länken `https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/elements.html`. Läsaren rekommenderas att studera den och beviset av Pythagoras sats (proposition 47, bok 1) kan vara en lämplig introduktion.

Det femte postulatet Av de fem postulat som ligger till grund för *Elementa* skiljer sig det femte från de övriga fyra. Det kan formuleras på följande sätt:



Figur 13.23: Illustration av det femte postulatet.

Om två räta linjer l och l' skärs av en tredje m som i figur 13.23 och summan av vinklarna u och v är mindre än två räta så säger postulatet att l och l' skär varandra på den sidan om m där vinklarna u och v är belägna.

Postulatet är mer komplicerat än de övriga fyra och man kan fråga sig om man inte borde kunna bevisa det utgående från de fyra första. De propositioner som visas i den första boken är ofta enklare i sin struktur än det femte postulatet.

Förmodligen hade Euklides tankar i den riktningen och han undviker att använda postulat 5 i det längsta. Det utnyttjas första gången i proposition 29 där Euklides bevisar att vinkelsumman i en triangel är två räta.

Under senare delen av antiken studerades *Elementa* av många matematiker, som t.ex. Hypatia och hennes far Theon samt Pappos. Några av dem gav ut kommentarer till och ibland egna versioner av verket. En som ägnade det femte postulatet stort intresse var Proklos (411 –85) som var nyplatonisismens ledare. Han levde större delen av sitt liv i Athén där han var praktiserande jurist. Han hade studerat matematik för Heron.

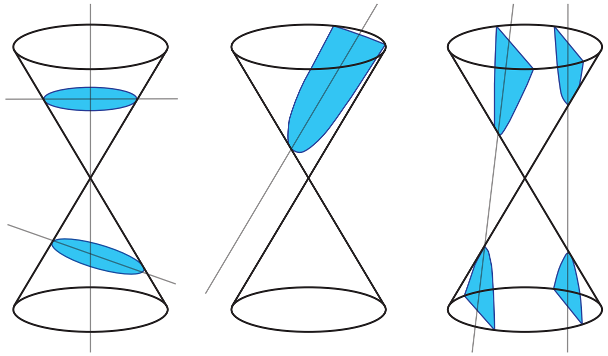
Proklos gav ut kommentarer till den första boken i *Elementa* och han var övertygad om att det femte postulatet kan bevisas med hjälp av de fyra första. Han gav också ett bevis men om man skärskådar det så upptäcker man att Proklos utnyttjar ett påstående som inte finns med bland postulaten och som de facto är ekvivalent med Euklides femte postulat. Detsamma gäller alla de bevis som getts under åren. Konstruktörerna utnyttjar omedvetet en egenskap som är ekvivalent med det femte postulatet. Men har bara bytt ut ett postulat mot ett annat. Det femte postulatet kom så småningom att kallas *parallellpostulatet* eftersom det är ekvivalent med följande påstående: ”Genom en given punkt utanför en given rät linje går precis en rät linje parallell med den givna.”

Problemet med parallellpostulatet skulle få sin lösning under 1800-talet då man lyckades visa att det är oberoende av de fyra andra. Om man i postulatet byter ut ”precis en” mot ”mer än en” så får man en ny geometri och i den är vinkelsumman i en triangel mindre än två räta. Vi påminner om att Euklides använde det femte postulatet först när han skulle bevisa att vinkelsumman i en triangel är två räta. Vi återkommer till de icke-euklidiska geometrierna längre fram.

13.4.5 Kägelsnitt

Menaichmos och Euklides Ett kägelsnitt är en kurva som uppkommer då ett plan skär en cirkulär dubbelkon. I figur 13.24 visas de tre snittkurvorna ellips, parabel och hyperbel. Vi har tidigare nämnt att Menaichmos började studera dem i mitten av 300-talet f.Kr. när han arbetade med *det deliska problemet*. Vad har kägelsnitten med kubens fördubbling att göra? Vi har inte kvar några skrifter från Menaichmos men med moderna algebra kan vi ge en antydan om varför kägelsnitten kan vara till hjälp. I algebraiska termer handlar kubens fördubbling om att konstruera en sträcka med längden x sådana att $x^3 = 2$. De punkter i ett koordinatsystem som uppfyller ekvationen $xy = 2$ beskriver en hyperbel. Ekvationen $y = x^2$ beskriver på samma sätt en parabel. Skärningspunkterna mellan de båda kurvorna uppfyller båda ekvationerna och för x-koordinaten för skärningspunkten gäller $x \cdot x^2 = x^3 = 2$. x-koordinaten för de båda kägelsnittens skärningspunkt är alltså lösningen på vårt problem. Naturligtvis är inte denna förklaring historisk. Menaichmos hade varken tillgång den symboliska algebran eller koordinatsystem.

Hur Menaichmos resonerade kan vi inte veta. Hans arbeten finns inte bevarade. Också Euklides, som verkade runt 300 f.Kr., skrev ett arbete om kägelsnitt som inte finns kvar. Vi vet emellertid att de båda matematikernas verk låg till grund för det arbete som framför andra förknippas med kägelsnitt nämligen Apollonius sju böcker om koniska sektioner.



Figur 13.24: I bilden till vänster skär det undre planet dubbelkonen längs en ellips och det övre längs en cirkel. Bilden i mitten visar en parabel. Planet är då parallellt med en av konens generatriser. Den högra bilden visar två hyperbler.

Apollonius böcker om kägelsnitt Apollonius sju böcker om kägelsnitt, *Konica*, skrevs omkring 200 f.Kr. Verket är skrivet i samma stil som *Elementa* med definitioner och propositioner. Apollonius hänvisar också ofta till *Elementa* som verkar ha varit ett standardverk. De tre sista böckerna känner vi till endast genom arabiska översättningar som i sin tur översatts till latin. Det finns också en åttonde bok men den existerar endast som ett utkast och man vet inte om den fullbordats. Den brittiske vetenskapsmannen Edmond Halley rekonstruerade den och gav ut en version på latin omkring 1700. En översättning av *Konica* till engelska, *Apollonius från Perga. Treatise on Conic Sections*, försedd med kommentarer och förklaringar med hjälp av ett modern matematiskt språk, publicerades 1896 av den engelske matematikhistorikern T. L. Heath. Verket finns tillgängligt i sin helhet på nätet liksom många andra av Heaths arbeten om antikens matematik. De är fundamentala för denna framställning. Heath omorganiserar vissa delar av Apollonius framställning och den är alltså inte helt autentisk. En översättning, som är mer trogen originalet, gjordes på 1940-talet av den amerikanske matematikhistorikern **R. Catesby Taliaferro**. Hans version gavs ut i *Encyclopædia Britannicas Great Books of the Western World series*.

Även om stilen i *Konica* är densamma som i *Elementa* så är framställningen mer komplicerad och det beror naturligtvis på att innehållet är mer avancerat. När Descartes utvecklade sin analytiska geometri på 1600-talet fick man ett hjälpmedel som gjorde det mycket lättare att formulera och bevisa de viktigaste egenskaperna hos kägelsnitten. Man kan emellertid i *Konica* se ett embryo till koordinatframställning och en mer algebraiskt inriktad teknik – även om språket helt igenom är geometriskt. Apollonius utnyttjar ofta resultaten i den andra boken i *Elementa* vars innehåll vi beskrivit som geometrisk algebra.

Konica innehåller de viktigaste resultaten om kägelsnitt och vi ger en lista på några av dem:

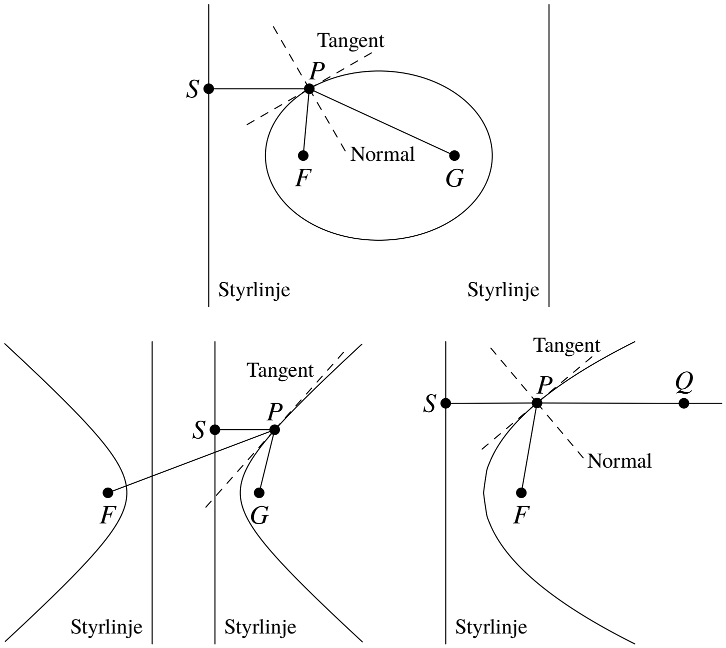
- **Tre typer av kägelsnitt** Det finns väsentligen tre typer av kägelsnitt ellipser, parabler och hyperbler. Om planet skär konen vinkelrät mot axeln är skärningskurvan en cirkel, som ibland betraktas som ett specialfall av ellips.

- **Brännpunkter och styrlinjer** Varje ellips och varje hyperbel har två brännpunkter och består av alla punkter där summan respektive skillnaden av avstånden till brännpunkterna är konstant.

  En parabel består av alla punkter där avståndet till en given punkt, brännpunkten, är lika med avståndet till en given rät linje, styrlinjen. Ordet ”parabel” härstammar från grekiskan och betyder ”liknelse” – de båda avstånden är lika stora.

  Till varje brännpunkt i en ellips eller hyperbel hör en styrlinje sådan att kägelsnittet består av alla punkter för vilka förhållandet mellan avstånden till brännpunkten och till styrlinjen är en given konstant som inte är lika med 1. Om förhållandet är mindre än 1 är kägelsnittet en ellips om det är större än 1 är kägelsnittet en hyperbel. Detta kan förklara namnen ellips och hyperbel. Orden ”ellips” och ”hyperbel”, härstammar från grekiskan och betyder ”underskott” respektive ”överskott” – förhållandet är för litet respektive för mycket för att de båda avstånden skall vara lika. De tre kägelsnitten med brännpunkter och styrlinjer visas i figur 13.25.

- **Diametrar och konjugatdiametrar** Mittpunkterna på parallella kordor i ett kägelsnitt ligger på en rät linje som kallas *diameter*. Tangenterna i ändpunkterna till en diameter är parallell med motsvarande kordor.



Figur 13.25: Den översta bilden visar en ellips med brännpunkter F och G med styrlinjer. För varje punkt P på ellipsen är summan $PF + PG$ konstant och detsamma gäller förhållandet $PF/PS < 1$. Den streckade normalen är bisektris till vinkeln FPG. Den undre bilden till vänstern visar en hyperbel med brännpunkter F och G ch med styrlinjer. Här är skillnaden $|PF - PG|$ konstant när P genomlöper hyperbeln. Också förhållandet $PF/PS > 1$ är konstant. Den streckade tangenten är bisektris till vinkeln FPG. Den undre bilden till höger visar en parabel med brännpunkt F och styrlinje. Här är $PF = PS$ då P genomlöper parabeln. Den streckade normalen är bisektris till vinkeln FPQ.

I en ellips eller i en hyperbel går alla diametrar genom samma punkt – kägelsnittets medelpunkt. Två diametrar i en ellips eller en hyperbel kallas *konjugerade* om den ena är parallell med de kordor som definierar den andra. Två konjugerade diametrar som är vinkelräta kallas *axlar*.

I en parabel är alla diametrar parallella. En diameter som är vinkelrät mot sina kordor kallas parabelns *axel*.

- **Bisektrisegenskapen** Om P är en punkt på en ellips med brännpunkterna F och G så är normalen i P bisektris till vinkeln FPG.

  Om P är en punkt på en hyperbel med brännpunkterna F och G så är tangenten till P bisektris till vinkeln FPG.

  Om P är en punkt på en parabel med brännpunkten F och Q är en punkt på den räta linjen genom P parallell med parabelns axel så är normalen till parabeln i P bisektris till vinkeln FPQ.

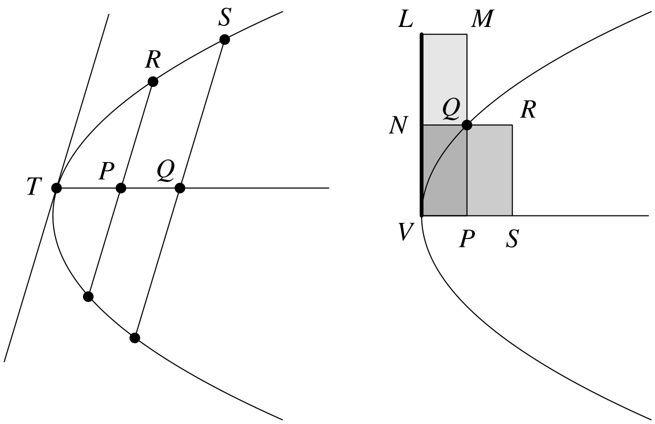
Vi nämnde att hos Apollonius finns embryon till koordinatsystem och vi illustrerar det med hjälp av att studera en parabel. I den vänstra delen av figur 13.26 har vi dragit två parallella kordor – en genom punkten R och en genom S. Mittpunkterna på kordorna är P och Q. Diametern genom P och Q skär parabeln i punkten T och tangenten till parabeln i T är parallell med de båda kordorna.

Enligt Heath kallar Apollonius sträckan TP för abscissan och PR för ordinatan till R. Genom ett relativt komplicerat resonemang kan Apollonius visa att

$$\frac{TP}{TQ} = \frac{PR^2}{QS^2}$$

d.v.s. abscissorna till två punkter på parabeln förhåller sig till varandra som kvadraten på ordinatorna. Tankarna leds till ekvationen $y^2 = px$, där p är en konstant, som vi känner som ekvationen för en parabel.

I den högra delen av figur 13.26 med bildtext visas hur man kan konstruera en parabel punkt för punkt.



Figur 13.26: I den högra delen är V parabelns vertex d.v.s. skärningspunkten mellan parabeln och dess axel. Apollonius har lyckats visa att om VP och PQ är abskissa respektive ordinata till punkten Q på parabeln så finns en sträcka VL som är sådan att rektangeln med sidorna VL och VP har samma area som kvadraten med sidan PQ. Sträckan VL beror alltså inte på Q, Vi konstruerar alltså en kvadrat med samma area som rektangeln med sidorna VL och PV. En sådan konstruktion finns genomförd i *Elementa* och vi påminner oss om att konstruktionen genomfördes redan i indiska *Sulvasutras*. Kvadraten sida är $VN = VS$ som alltså är längden av ordinatan för punkten på parabeln med abscissan VP. Drag en rät linje genom P parallell med VN. Den skär kvadratens sida NR i Q och alltså är PQ den sökta ordinatan och Q är en punkt på parabeln. Låter vi P genomlöpa parabelns axel åt höger från V så genomlöper Q parabelns övre del. Motsvarande konstruktioner kan göras för att konstruera punkterna på den nedre delen.

Apollonius *Konica* är det klassiska verket om kägelsnitten. Där härleds deras viktigaste egenskaper även om det för dagens läsare kan vara svårt att identifiera dem i de mer eller mindre trogna översättningar som finns. Moderna framställningar utnyttjar analytisk geometri och det gör framställningen mer överskådlig och lättläst.

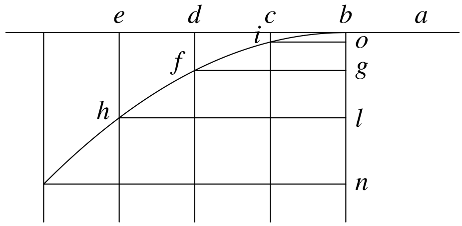
Kägelsnitten och 1600-talets nya världsbild Renässansen innebar ett ökat intresse för antikens vetenskap och kultur. Framstående vetenskapsmän inom matematik och fysik var väl förtrogna med innehållet i klassiska arbeten som Euklides *Elementa* och Apollonius *Konica*. Kepler, Newton och Galilei utnyttjade sina kunskaper om kägelsnitt för att formulera lagar som ligger till grund för vår världsbild. Genom sina kunskaper om ellipser insåg Kepler att om han frångick modellen med epicykler och istället antog att planeterna rörde sig längs elliptiska banor med solen i ena brännpunkten så stämde modellen med observationerna. Newton använde sig av egenskaper hos ellipsen när han formulerade gravitationslagen.

En projektil som skjuts snett uppåt beskriver en parabel. Galilei visade detta i sitt berömda arbete *Samtal och bevis rörande två nya vetenskaper* som kom ut 1638. I form av samtal mellan de tre personerna Salviato, Sagredo och Simplicio visas några fundamentala rörelselagar. Salviati är Galileis alter ego och det är han som framlägger teorierna. Sagredo, som vetenskapligt sett är Salviatis jämlike, framför kritiska synpunkter som Salviati måste vederlägga. Simplicio kan ses som representant för katolska kyrkan och är mera jordbunden. Vi skall se hur Salviati härleder det vi kallar kastparabeln. Framställningen är hämtad från en svensk översättning i bokverket *Sigma*, band III. Vi kommer in i handlingen den fjärde dagen och man har diskuterat rörelse vid fritt fall. Salviatis har tidigare presenterat en teori som säger att den tillryggalagda vägen vid fritt fall är proportionell mot kvadraten på tiden. Kritiska synpunkter från både Sagredo och Simplicio bemöttes av Salviati och man kunde godta hans teori. Salviati har också förberett sin härledning av kastparabeln genom att visa Apollonius påstående att abscissorna till två punkter på en parabel förhåller sig som kvadraterna på ordinatorna. Här följer Salviatis härledning av kastparabeln och i resonemangen hänvisas till figur 13.27.

> Salviati: ”Vi föreställer oss ett horisontellt plan *ab* utefter vilket en kropp rör sig från *a* till *b*. Antag att planet plötsligt upphör i *b*. I denna punkt kommer då kroppen att på grund av sin tyngd erhålla en fri fallrörelse längs lodlinjen *bn*. Drag linjen *be* längs planet *ba* för att markera tidsförloppet. Dela denna linje i ett antal delar *bc*, *cd* och *de* som representerar lika stora tidsintervall. Drag från punkterna *b*, *c*, *d* och *e* linjer som är parallella med lodlinjen *bn*. Avsätt på den första ett godtyckligt avstånd *ci*, på den andra ett fyra gånger så långt avstånd *df*, på det tredje ett nio gånger så långt avstånd *eh* o.s.v. i proportion till kvadraterna på *bc*, *cd* och *de*. eller så att säga i det kvadratiska förhållandet mellan dessa sträckor. Vi ser sålunda att medan kroppen rör sig från *b* till *c* med konstant hastighet faller den lodrätt avståndet *ci* och befinner sig i slutet av tidsintervallet i punkten *i*. På liknande sätt är den lodräta fallhöjden i slutet av tidsintervallet *bd*, som är dubbla *bc*, fyra gånger det första avståndet *ci*. Ty det har tidigare visats att de sträckor som tillryggalagts av en fritt fallande kropp är proportionella mot kvadraten på tiden. Av samma skäl är den under tiden *be* tillryggalagda sträckan nio gånger *ci*. Avstånden *eh*, *df* och *ci* förhåller sig alltså som kvadraterna på *be*, *bd* och *bc*. Drag från *i*, *f* och *h* de räta linjerna *io*, *fg* och *hl* parallella med *be*. Dessa sträckor *hl*, *fg* och *io* är lika med *eb*, *db* respektive *cb*. Även sträckorna *bo*, *bg* och *bl* är lika med *ci*, *df* respektive *eh*. Kvadraten på *hl* förhåller sig till kvadraten på *fg* som *lb* till *bg*, och kvadraten på *fg* förhåller sig till kvadraten på *io* som *gb* till *bo*. Därför ligger punkterna *i*, *f* och *h* på en parabel. På liknande sätt kan man visa att om vi väljer vilka lika stora intervall som helst och om partikeln rör sig med en liknande sammansatt rörelse, kommer partikelns läge i slutet av varje tidsintervall att ligga på samma parabel.”

Både Sagredo och Simplicio är imponerade av resonemanget men har invändningar. Teorin skulle få konsekvenser som inte stämmer överens med erfarenheten. Salviati tar kritiken på allvar och medger att han själv ställt sig samma frågor men han lyckas visa att hans teori mycket väl stämmer överens med observationerna.

Galileis använde sig inte av algebran. Hans språk är geometriskt och kan därför idag kännas omständligt. Men resonemanget är klart och koncist. Hans framställning, där invändningar mot teorierna tas upp och bemöts, visar tillsammans med tydligheten i hans framställning, att Galilei inte bara var en stor vetenskapsman – en av de största – utan också en lysande pedagog.



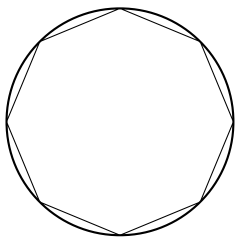
Figur 13.27: Kastparabeln.

13.4.6 Areor och volymer – preludier till integralkalkylen

Cirkelns area och pyramidens volym I *Elementa* beräknas areor och volymer i den meningen att de jämförs med andra. Det är förhållanden mellan areor och mellan volymer som beskrivs. Den som söker de formler som vi är vana vid letar förgäves. Triangelns area jämförs med motsvarande parallellogram som i sin tur jämförs med en rektangel. Någon egentlig motsvarighet till formeln $T = b \cdot h/2$ finns inte. Cirkelns area behandlas i den andra propositionen i bok 12 som lyder:

> Areorna av två cirklar förhåller sig till varandra som kvadraterna på motsvarande diametrar.

Propositionen svarar mot det uttryck $A = \pi r^2$ för arean som vi lärt oss men den gör det inte fullt ut. Den talar inte om hur man bestämmer arean om man känner diametern utan anger sambandet mellan förhållandet mellan två cirklars diametrar och förhållandet mellan deras areor. Det tal som vi kallar π diskuteras inte i *Elementa* och inte heller längden av cirkelns omkrets. Kanske hade Euklides problem med att på ett stringent sätt jämföra cirkelns omkrets med en sträcka.

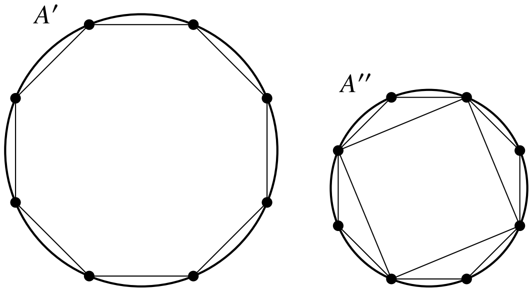


Figur 13.28: En oktagon inskriven i en cirkel.

Beviset av propositionen om cirklars areor innehåller nya metoder. Uppenbarligen är idén bakom beviset att arean av cirkeln ligger nära arean av en inskriven n-hörning om n är ett stort tal. Figur 13.28 visar att redan för $n = 8$ så är skillnaden mellan cirkelns area och den inskrivna regelbundna oktagonens liten. Även om idén är enkel så är vägen till ett strikt bevis för propositionen mödosam. I tidigare böcker visas att i två likformiga trianglar förhåller sig areorna som kvadraten på förhållandet mellan motsvarande sidor. Det påståendet utvidgas sedan till månghörningar. Därefter visas att förhållandet mellan areorna av två likformiga polygoner som är inskrivna i cirklar är lika med förhållandet mellan kvadraterna på cirklarnas diametrar. Vi skisserar med dessa förutsättningar beviset. För att förenkla framställningen har vi hoppat över några detaljer och dessutom infört moderna beteckningar.

Vi vill visa att förhållandet mellan två givna cirklars areor är lika med förhållandet mellan kvadraterna på diametrarna. Idén i beviset är anta motsatsen och visa att det leder till en motsägelse. Vi antar alltså att förhållandet mellan cirklarnas areor är mindre eller större än förhållandet mellan kvadraterna på deras diametrar

Antag först att förhållandet mellan cirklarnas areor A' och A'' i figur 13.29 är mindre än förhållandet mellan kvadraterna på diametrarna, som då är lika med förhållandet mellan A' och arean S av ett område sådant att $S < A''$.



Figur 13.29: Illustration till beviset att två cirklars areor förhåller sig som kvadraterna på motsvarande diametrar.

Skriv nu in en kvadrat i den andra cirkeln. Skillnaden mellan cirkeln och kvadraten består av fyra cirkelsegment vars area är D_1. Dela segmentens fyra bågar mitt itu och konstruera med hjälp av dessa punkter och kvadratens en regelbunden åttahörning. Skillnaden mellan cirkeln och åttahörningen består då av åtta cirkelsegment vars sammanlagda area vi kallar D_2. Med viss möda kan man nu visa att D_2 är mindre än halva D_1. Vi fortsätter proceduren till dess skillnaden D_n mellan cirkelns area och den regelbundna 2^n-hörningens area P'' är mindre är skillnaden mellan cirkelns area A'' och S. Att detta är möjligt garanteras av Eudoxos uttömingsprincip som säger följande:

> Antag att två olika storheter är givna. Om vi från den större subtraherar mer än hälften och från det som återstår mer än hälften av resten och upprepar denna procedur så kommer efter ett antal steg resten att bli mindre än den mindre av de givna storheterna.

Eftersom skillnaden mellan A'' och P'' är mindre än skillnaden mellan A'' och S så är $P'' > S$. Skriv nu in en regelbunden 2^n-hörning i den första cirkeln. Den har arean P'. Förhållandet mellan kvadraterna på de båda cirklarnas diametrar är enligt vad som tidigare visats lika med förhållandet mellan P' och P'' som är mindre är förhållandet mellan A' och S som i sin tur antogs vara lika med förhållandet mellan kvadraterna på de båda cirklarna diametrar. Vi har fått en motsägelse. Alltså kan inte förhållandet mellan cirklarnas areor vara mindre än förhållandet mellan kvadraterna på deras diametrar. Genom att i resonemanget låta de båda cirklarna byta plats kan man visa att den omvända olikheten inte heller gäller. Alltså måste de båda cirklarna areor förhålla sig som kvadraterna på deras diametrar.

Den grundläggande idén i beviset är relativt enkel: Cirklarna kan approximeras med polygoner som har en egenskap som vi sedan kan överföra till cirklarna. Men att göra det med de stränga krav som ställs i *Elementa* är komplicerat och Eudoxos uttömningspincip spelar en central roll när det gäller att gå från polygoner till cirklar. Svårigheterna beror också på att Euklides resonerar med förhållanden mellan cirklar och inte med mått på areor och längder i lämpligt valda enheter.

Liknande tekniker används för att bestämma volymer av kroppar som pyramider, koner och cylindrar. Ett av de centrala resultaten är proposition 5 i bok 12 som säger att volymerna av två tetraedrar med samma höjd förhåller sig som areorna av deras basytor. För att visa det använder Euklides sig av uttömningsprincipen. En tetraeder begränsas enbart av plan och kanterna är räta linjestycken. Begränsningsytorna är inte buktiga och kantlinjerna inte krökta. Det har därför ifrågasatts om man inte skulle kunna finna ett bevis för propositionen som inte använde sig av uttömningsprincipen. Gauss ställde den frågan i början av 1800-talet och Hilbert formulerade den som det tredje av de berömda problemen från 1900. Det har senare visats att ett bevis av den femte propositionen kräver Eudoxos uttömningsprincip eller något påstående ekvivalent med den.

Några resultat av Arkimedes som föregriper integralkalkylen och teorin för oändliga serier Den kanske störste av antikens matematiker är Arkimedes. Han bidrog med viktiga resultat inom såväl matematik som fysik och han var dessutom en lysande teknisk innovatör. Den engelske matematikhistorikern T. L. Heath har översatt och kommenterat några av Arkimedes viktigaste arbeten i *The Works of Archimedes* som gavs ut 1897 och som finns tillgänglig i sin helhet på Internet. Vi skall i detta avsnitt beskriva några av hans resultat när det gäller bestämning av areor och volymer.

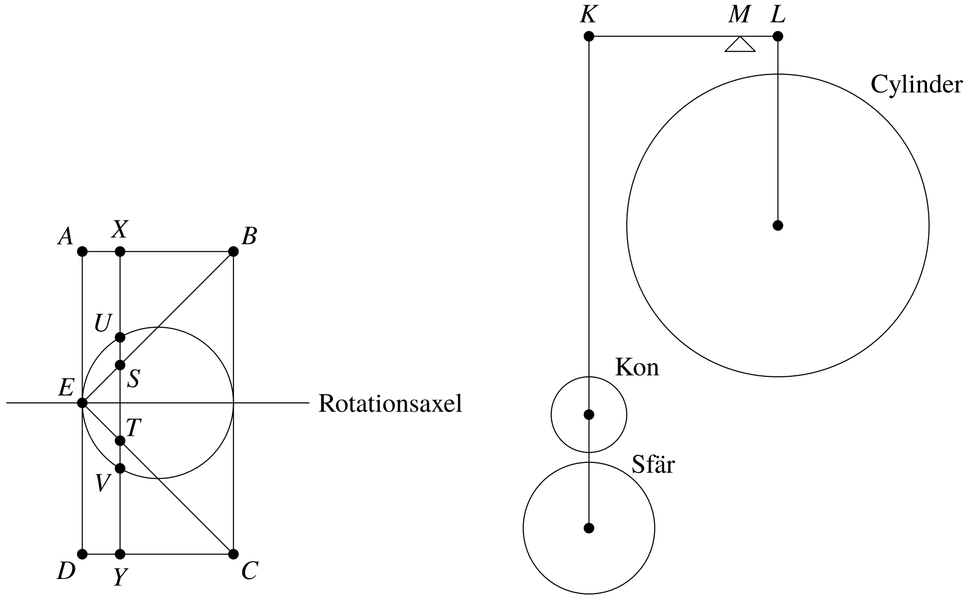
Cirkeln I arbetet *Mätning av en cirkel* visar Arkimedes att cirkelns area är lika med arean av en rätvinklig triangel där den ena kateten är en radie och den andra är cirkelns omkrets. Hans utnyttjar i sitt resonemang Eudoxos uttömningsprincip. Arkimedes jämför alltså cirkelns omkrets med en sträcka. Som vi tidigare nämnt görs inte detta i *Elementa*. Arkimedes visar också genom att uppskatta sidorna i en in- och omskriven 96-hörning, att förhållandet mellan cirkelns omkrets och dess diameter är mindre än $3\frac{1}{7}$ och större än $3\frac{10}{71}$. Beräkningarna är komplicerade och kräver både kreativitet och förmåga att hålla samman omfattande räkningar. Arkimedes gör bl.a. relativt noggranna uppskattningar av kvadratrötter som inte redovisas.

Sfären och cylindern Ett av Arkimedes viktigaste arbete är *Om sfären och cylindern*. Det är ett omfattande verk och det är här han bestämmer volymen och arean av en sfär. Arkimedes visar att om en sfär är inskriven i en cylinder så är förhållandet mellan sfärens volym och cylinderns lika med 2:3. Han visar också att sfärens area är lika med arean av cylinderns mantelyta. Bevisen är komplicerade och använder sig Eudoxos uttömningsprincip. Det är av bevisen svårt att inse hur Arkimedes kommit fram till resultaten. Han formulerar ett påstående som han sedan bevisar enligt alla kostens regler.

För drygt hundra år sedan hittade man ett s.k. *palimpsest* med några av Arkimedes viktigaste verk. Ett palimpsest är en handskrift som skrivits över en annan skrift som tvättats bort. Det var den danske filologen **Johan Ludvig Heiberg** som vid ett besök i Istanbul år 1906 upptäckte Arkimedes arbeten bakom texterna i en bönbok. Med hjälp av ny teknik kunde han rekonstruera dem. Bland skrifterna fanns ett arbete med titeln *Metoden*. I det visar Arkimedes hur man genom att dela in kroppar i oändligt många oändligt tunna skivor på ett relativt enkelt sätt kan inse de resultat som han sedan bevisar. *Metoden* är en föregångare till integralkalkylen. I figur 13.30 med text skisserar vi hur Arkimedes resonerade när han fann förhållandet mellan sfärens och den omskrivna cylinderns volymer. För mer detaljerade framställningar hänvisas till olika länkar på Internet t.ex. Heaths bok *The method of Archimedes recently discovered by Heiberg* som gavs ut 1912.

Parabelsegmentets area I *Om sfären och cylindern* föregrep Arkimedes integralkalkylen som skulle få sitt genombrott genom Newtons och Leibniz arbeten på slutet av 1600-talet. I arbetet *Parabelns kvadratur* bestämmer Arkimedes aren av ett parabelsegment och avvänder sig då av oändliga serier – ett annat område som är centralt i dagens analys och som började utvecklas på allvar under 1600- och 1700-talet.

Parabelns kvadratur finns i sin helhet i Heaths bok *The works of Archimedes*. Vi formulerar resultatet och skisserar beviset och använder oss av moderna beteckningar för att förenkla framställningen. Arkimedes påstår följande:



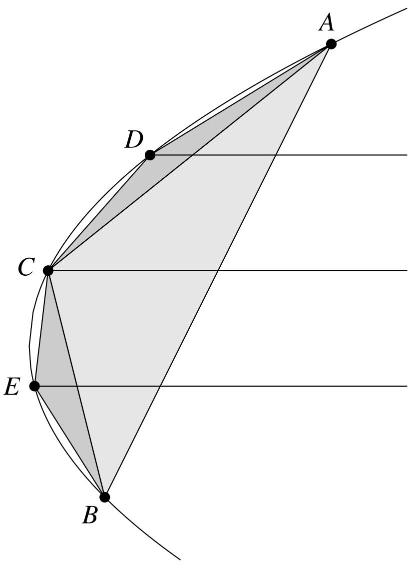
Figur 13.30: I bilden till vänster är rektangelns längre sida dubbelt så stor som den kortare. Om figuren roteras kring rotationsaxeln uppkommer en cylinder, en sfär och en kon. Arkimedes skär ut oändligt tunna cirkulära skivor XY av cylindern, UV av sfären och ST av konen. Han använder sig nu av ett jämviktsresonemang. I den högra bilden visar en tvåarmad hävstång med vridningspunkten M. Med hjälp av geometriska resonemang visar Arkimedes att om skivornas vikter är proportionella mot deras areor så har vi jämvikt om cylinderskivan hängs upp i punkten L där $ML = AX$ och skivorna från sfären och konen båda hängs upp i K där $MK = AB$. Skivorna från sfären och konen har alla samma hävstångsarm. Vi samlar ihop dem i punkten K. Cylinderskivorna är alla lika stora men har olika hävstångsarmar. Om vi samlar ihop dem till vår cylinder så får vi jämvikt om de hängs upp i tyngdpunkten vars avstånd till M är lika med sfärens radie. Konens och sfärens gemensamma hävstångsarm är alltså vid jämvikt dubbelt så stor som cylinderns. Om vi inför beteckningarna Sf, Ko och Cy för sfärens, konens respektive cylinderns volymer så gäller $2(Sf + Ko) = Cy$ men enligt en sats i *Elementa* är $Ko = Cy/3$ och det ger att $Sf = Cy/6$. Eftersom cylindern i figuren är fyra gånger så stor som cylindern som är omskriven sfären så är sfärens volym $2/3$ av den omskrivna cylindern.

> Arean av ett parabelsegment är $4/3$ av arean av den triangel som har två hörn i ändpunkterna av den korda som skär ut segmentet och där det tredje hörnet är skärningspunkten mellan parabeln och kordans konjugatdiameter.

I figur 13.31 ger kordan AB i den givna parabeln upphov till en triangel ACB där C är skärningspunkten mellan parabeln och kordans konjugatdiameter. Arkimedes visade alltså att

$$\text{arean av parabelsegmentet } ACB = \frac{4}{3} \text{ arean av triangeln } ACB.$$

Arkimedes kommer fram till resultatet genom en iterativ process. De båda kordorna AC och BC genererar två nya segment ADC och BEC där D och E är skärningspunkterna mellan parabeln och konjugatdiametrarna till AC respektive BC. Arkimedes visar genom geometriska resonemang, som skisseras i figur 13.32 med bildtext, att de båda trianglarnas areor tillsammans utgör $1/4$ av triangeln ABC:s area. Han upprepar processen och gör motsvarande konstruktioner på de fyra nya segment som bildas o.s.v. I varje steg blir summan av de nya trianglarnas areor lika med $1/4$ av de föregående triangelareorna. Arkimedes formulerar och



Figur 13.31: Illustration av Arkimedes metod att beräkna parabelsegmentets area.

bevisar nu motsvarigheten till formeln för summan av en geometrisk talföljd nämligen att

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \ldots \frac{1}{4^n} + \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{4^{n+1}} = \frac{4}{3}.$$

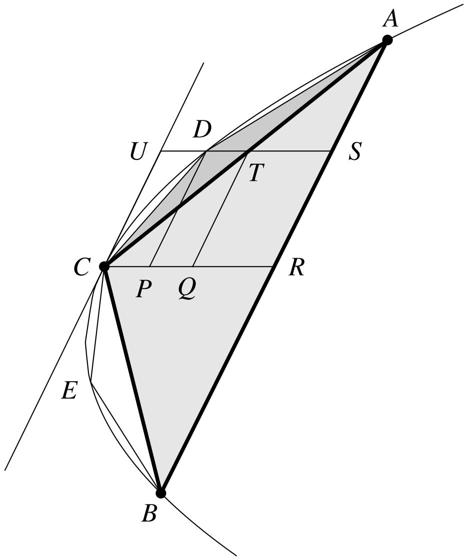
Med hjälp av detta resultat kan han nu med hjälp av Eudoxos uttömningsprincip visa att arean av parabelsegmentet ACB är lika med $4/3$ av arean av triangeln ACB.

13.4.7 Pappos *Synagoge* – ett samlingsverk

Under senare delen av antiken, som ibland kallas ”Kejsartiden”, var Pappos från Alexandria en av de stora matematikerna. Han var verksam under första halvan av 300-talet efter Kristus. Hans stora verk är *Synagoge*, som kan översättas med ”Samlingar”. Där återger, kommenterar och reflekterar han över arbeten av Hippokrates, Eratosthenes, Euklides, Apollonius, Arkimedes, Ptolemaios, Heron m.fl. Verket består av åtta böcker varav några har förlorats. De båda första böckerna handlar om aritmetik och framställning av stora tal. De övriga böckerna behandlar till stor del geometriska problem.

Konstruktionsproblem Pappos intresserar sig för konstruktionsproblem bl.a. de tre klassiska problemen: Kubens fördubbling, vinkelns tredelning och cirkelns kvadratur. Han studerar olika metoder att lösa dem och delar in metoderna i tre olika typer. Plana metoder, som bara använder passare och ograderad linjal, rumsliga problem där man använder sig av kägelsnitt samt linjära metoder som använder kurvor av olika slag. Exempel på sådana är *Arkimedes spiral* och *quadratrix* av **Hippias** (c:a 460–400 f.Kr.). De visas i figur 13.33.

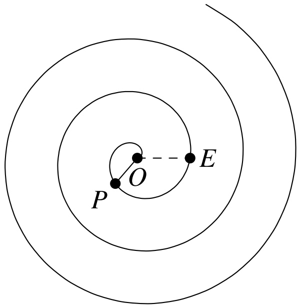
Optimeringsproblem Pappos behandlar också s.k. *isoperimetriska problem*. Vilket område av en viss typ med en given omkrets har den största arean? Vilket område av en viss typ med

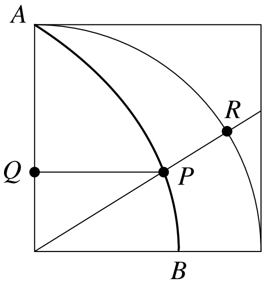


Figur 13.32: I figuren är R mittpunkt på AB och T mittpunkt på AC. Konjugatdiametern till AC går genom T. Den skär AB i S, parabeln i D och tangenten i C i U. Räta linjer genom D och T parallella med AB skär CR i P respektive Q. Observera att tangenten i C är parallell med AB. Enligt Apollonius *Konica* är $PC/RC = PD^2/RA^2 = RS^2/RA^2 = 1/4$. Men $UD = CP = (1/4)CR = (1/4)US$. Vidare är T mittpunkt på SU eftersom trianglarna AST och CUT är kongruenta. Alltså är $TD = SU - ST - UD = (1/4)SU$ d.v.s. $TD = UD = (1/2)TU$. Då är arean av triangeln $CDT = (1/2)$ arean av triangeln $CTU = (1/2)$ arean av triangeln $ATS = (1/8)$ av arean av triangeln ACR. Men eftersom T är mittpunkt på AC så delar DT triangeln ACD mitt itu vilket medför att arean av triangeln $ACD = (1/4)$ av arean av triangeln ACR. På samma sätt visas att arean av triangeln $BCE = (1/4)$ arean av triangeln BCR. Alltså är summan av areorna av trianglarna ACD och BCE lika med $(1/4)$ av arean av triangeln ABC.

given area har den minsta omkretsen? Vilken kropp av en viss typ med given begränsningsyta har den största volymen? Han inleder avsnittet med följande poetiska betraktelse över binas instinkt att inte slösa med den nektar de samlat:

> ”Bina, som utan tvekan själv tror att de anförtrotts uppgiften att från gudarna till den mer bildade delen av mänskligheten dela med sig ambrosia i denna form . . ., tycker inte att det är anständigt att sorglöst hälla den i jorden eller i trä eller i någon annan opassande och oregelbundet materia, utan, efter att ha samlat de mest underbara delarna av de vackraste blommorna på jorden, förbereder de kärl för att förvara honungen och de kallas vaxkakor och de består av celler som alla är lika stora och likformiga och som gränsar till varandra.
>
> Vi kan alltså antyda att de lyckats med detta med ett särskilt geometriskt förutseende. De måste nödvändigtvis inse att figurerna måste gränsa till varandra och ha sidorna gemensamma så att inte något annat kan falla genom mellanrummen och förorena deras arbete. Nu finns det bara tre rätlinjiga figurer som uppfyller villkoret och jag menar då regelbundna figurer där alla sidor och alla vinklar är lika stora eftersom oregelbundna figurer skulle misshaga bina. Dessa är triangeln, kvadraten och sexhörningen och bina väljer i sin vishet sexhörningen eftersom den har mest vinklar och antar att det innebär att de kan lagra mer honung är de båda andra.





Figur 13.33: Den vänstra bilden visar Arkimedes spiral. Spiralen startar i punkten O och rör sig utåt så att sträckan OP är proportionell mot vinkeln mellan OP och OE. Arkimedes visade flera egenskaper hos kurvan bl.a. att arean som begränsas av spiralen och sträckan OE är lika med $1/3$ av arean av cirkeln med OE som radie. Den högra bilden visar en quadratrix som konstruerats av Hippias. En kvartscirkel är inskriven i en kvadrat. En punkt Q rör sig från A med konstant hastighet mot cirkelns medelpunkt längs en av kvadratens sidor. En annan punkt R startar samtidigt som Q från A och rör sig längs kvartscirkeln också med konstant hastighet. Punkten R når andra änden av kvartscirkeln samtidigt som Q når cirkelns medelpunkt. Vid en viss tidpunkt befinner sig Q och R som i figuren och vi kan konstruera punkten P som kommer att beskriva en kurva som vi kallar en quadratrix. Både spiralen och quadratrixen kan användas för lösa de klassiska konstruktionsproblemen.

> Bin vet alltså att just detta faktum är bäst för dem, att hexagonen är större än triangeln och kvadraten och kan lagra mer honung med samma förbrukning av material som krävs för konstruktionen.”

Pappos tar sedan upp och bevisar en rad isoperimetriska satser som:

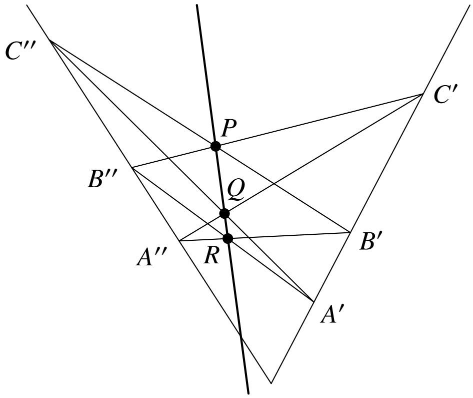
- Av alla cirkelsegment med samma omkrets har det segment som bildar en halvcirkel störst area.
- Sfärens har större volym än alla regelbundna polyedrar med samma begränsningsarea.
- Av regelbundna polyedrar med samma begränsningsarea har den med flest sidoytor störst volym.

De flesta av satserna har visats av **Zenodorus** (c:a 200−140 f.Kr.) och Pappos återger i regel hans bevis.

Några satser av Pappos De flesta resultaten i *Synagoge* är kända och Pappos kommenterar och ställer samman dem. Han ger emellertid också egna bidrag till matematiken. Ett exempel är det som nu kallas *Pappos sats* och som kom att bli en viktig sats i den projektiva geometri som började utvecklas av bildkonstnärer under renässansen och som fick en sammanhängande teori under 1800-talet. Satsen illustreras och formuleras i figur 13.34. För beviset utnyttjar Pappos dubbelförhållandet mellan fyra punkter på en rät linje ett begrepp som är centralt inom projektiv geometri (se fotnot i avsnitt 9.5.3).

En annan sats, som tillskrivs Pappos, är Pappos-Guldins, som återupptäcktes av den schweiziske matematikern **Paul Guldin** (1577−1643). Den säger följande:

> - Om en plan kurva med ändlig längd roterar runt en axel som inte skär kurvan så uppstår en rotationsyta vars area är lika med kurvans längd multiplicerad med längden av den väg kurvans tyngdpunkt tillryggalägger
> - Om ett begränsat plant område roterar kring en axel som inte skär området så uppkommer en rotationskropp vars volym är lika med områdets area multiplicerat med den väg områdets tyngdpunkt tillryggalägger.



Figur 13.34: Två räta linjer är givna. Punkterna A', B' och C' ligger på den ena linjen och punkterna A'', B'' och C'' på den andra. Ingen av de sex punkterna är de båda linjernas skärningspunkt. De räta linjerna $B'C''$ och $B''C'$ skär varandra i P, $A'C''$ och $A''C'$ i Q samt $B'A''$ och $B''A'$ i R. Då säger Pappos sats att punkterna P, Q och R ligger på samma räta linje.

Guldin gav ett ofullständigt bevis av satsen. Nu ingår den i de flesta utbildningar på tekniska högskolor.

Analys och syntes Den sjunde boken i *Synagoge* behandlar analys och syntes. I den sätter Pappos ord på tankeprocesser som används vid problemlösning. För att lösa ett problem t.ex. att utföra en konstruktion utgår vi från att problemet är löst och undersöker vilka konsekvenser det har. Vi gör en analys och bryter ner problemet i mindre delproblem till dess vi kommer till det som förutsättes känt. Därefter utför vi syntesen och vänder på processen. Vi utgår från förutsättningarna och stegar oss successivt fram till lösningen genom logiska slutledningar.

Euklides *Elementa* är rent syntetisk. Någon analys av hur man kommit fram till beviset av t.ex. Pythagoras sats finns inte. Eftersom det verket blev modell för framställning av matematik kom syntesen att dominera de skrivna matematiska arbetena. Det är därför intressant inte minst ur pedagogisk synvinkel att Pappos visar på analysens betydelse i arbetet med matematik.

13.5 Geometrin under den islamiska guldåldern

Under perioden 700–1300 utvecklades vetenskap och kultur i de islamiska länderna runt Medelhavet. Centrum var *Visdomens hus* i Bagdad. De viktigaste skrifterna från antiken översattes till arabiska och från indiska texter utvecklades det hindu-arabiska talsystemet. Den arabiska kulturen förnyade aritmetik, talteori och algebra. Men den geometriska traditionen från antiken bevarades och utvecklades även om de viktigaste resultaten redan var kända. Man kan notera följande:

- Den teoretiskt inriktade geometrin med rötter i Euklides *Elementa* jämförde sträckor, vinklar, areor och volymer. De mättes inte med tal som angav storleken i någon lämpligt vald enhet. Naturligtvis använde sig t.ex. Eratosthenes, Aristarchos, Ptolemaios och Arkimedes av tal för att göra uppskattningar inom mer tillämpade delar av matematiken. De arabiska matematikerna använde i större utsträckning tal för att mäta längder, areor och volymer. Det var framför allt 800-talsmatematiker som Thabit ibn Quarra och bröderna Banu Musa som utvecklade sambandet mellan aritmetik och geometri.

- De tre klassiska konstruktionsproblemen var även under denna tid i centrum för intresset. Jafar Muhammad Banu Musa utvecklade dynamiska metoder för att lösa problemet med kubens fördubbling och Alhazen, som var verksam runt år 1000, försökte lösa samma problem med hjälp av de halvmånformiga figurer som uppstår då två cirklar skär varandra. Denna typ av områden studeras i ett större arbete och Alhazen annonserade att arbetet skulle följas av en andra del. Den andra delen där Alhazen hade tänkt sig lösa problemet med kubens fördubbling blev aldrig publicerat.

- Omar Khayyam gav viktiga bidrag till diskussionen om det femte postulatet det s.k. parallellpostulatet. Man kan av hans texter ana att han insåg att det var oberoende av de fyra övriga. Det skulle alltså inte vara möjligt att härleda parallellpostulatet från dessa.

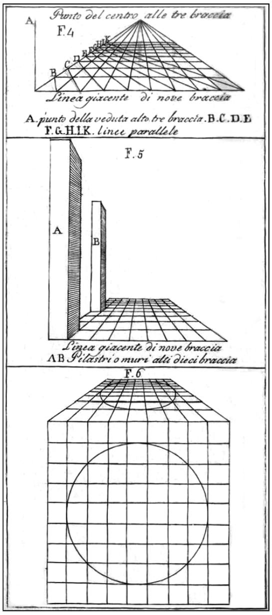
- Algebran som var ett av de matematiska verktyg som uppfanns och utvecklades under denna tid kopplas ofta samman med geometri. De algebraiska metoder som utvecklades av framför allt Al Khwarizmi på 700-talet illustreras med hjälp av Euklidisk geometri. Omar Khayyam använde sig av kägelsnitt för att konstruera lösningar till tredjegradsekvationen.

- Sist men inte minst gjorde de arabiska matematikerna en stor insats genom att översätta viktiga arbeten från antiken. Det är tack var dem vi nu har tillgång till många av Euklides, Apollonius, Arkimedes och Ptolemaios texter.

13.6 Deskriptiv och projektiv geometri

13.6.1 Preludier: Konst och matematik

Albertis *Della pittura* Renässansen innebar ett ökat intresse för antik kultur och vetenskap. Det gäller inte minst områden som arkitektur, skulptur och måleri. Den italienske guldsmeden, arkitekten och konstnären Filippo Brunelleschi studerade under början av 1400-talet antika byggnader för att förstå principerna bakom deras uppbyggnad. Han använde kunskaperna i de byggnader han sedan som arkitekt kom att utforma. Av skisserna framgår att han insett perspektivets betydelse. Brunelleschi var i själva verket den förste som formulerade de perspektivlagar som säger att parallella linjer som inte ligger i målardukens plan ses konvergera mot en punkt på det vi kallar horisonten och att sträckor med samma längd förminskas ju längre bort från betraktaren de befinner sig.



Figur 13.35: Perspektivavbildningar i *Della pittura*.

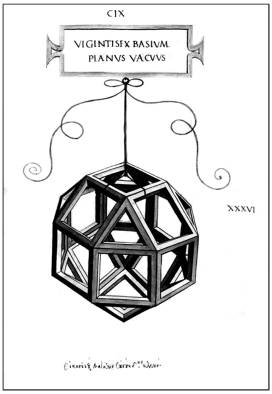
Brunolleschis teorier förmedlades av Leone Battista Alberti. De träffades i Florens och blev goda vänner. Alberti studerade från början juridik men genom Brunelleschi blev han intresserad av matematik och konst. År 1435 gav han ut arbetet *Della pittura* som sedan översattes till latin med titeln *De Pictura*. En svensk översättning är ”Om måleri”. Verket, som är tillägnat Brunelleschi, är banbrytande genom att den inför matematiken i konsten. Det består av tre delar och det är väsentligen den första delen som ägnas åt matematik. *Della pittura* innehåller inga satser med bevis som i de klassiska skrifterna från antiken och inga beräkningar som i de läroböcker i matematik som ungefär samtidigt såg dagens ljus i länderna kring Medelhavet. Den använder en matematisk terminologi med punkter, kurvor, räta linjer och plan och gör också försök att definiera dessa begrepp. Det är emellertid uppenbart att det är konsten som är i centrum och matematiken eller geometrin är ett hjälpmedel. Alberti skriver själv i förordet:

> ”För att göra mina korta kommentarer om målning tydlig skall jag först från matematikerna hämta de begrepp som är av intresse för mitt ämne. När de har förklarats kommer jag att utvidga målarkonsten från dess första principer i naturen så långt som jag är i stånd att göra.
>
> I alla dessa diskussioner, ber jag er att betrakta mig inte som matematiker utan som en målare som skriver om dessa ting. Matematiker mäter endast med sitt intellekt sakers form separerade från materia. Eftersom vi önskar att våra objekt skall kunna ses, kommer vi att använda ett förhållningssätt som mer betonar förnimmelser. Vi skall anse vårt syfte uppfyllt om läsaren på något sätt kan förstå detta erkänt svåra ämne – och, så vitt jag vet, ett ämne som aldrig tidigare behandlats. Därför ber jag att mina ord skall tolkas enbart som en målares.”

Den teoretiska genomgången illustreras med ett antal figurer och några av dem visas i figur 13.35. Den övre bilden är densamma som i den historiska översikten och visar hur parallella linjer i betraktarens öga konvergerar mot en punkt på horisonten och hur betraktaren uppfattar hur längden av en sträcka förändras när den förflyttas längre bort. Den mellersta bilden visar samma typ av fenomen men nu i tre dimensioner. I den undre bilden visas hur den perspektiviska bilden av en cirkel blir en ellips.

Både den italienska och den latinska versionen av *Della pittura* finns i sin helhet på Internet. Det finns också en engelsk översättning av **John R. Spencer**, Yale University. Den sistnämnda saknar tyvärr figurer.

Paciolis *Divina proportioni* En av de mest tongivande matematikerna kring år 1500 var franciskanermunken Luca Pacioli. Hans *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* från 1494 är ett uppslagsverk där bl.a. aritmetik och bokföring behandlas utförligt. Den innehåller också en del geometri men det är i ett senare verk *Divina proportioni* (”Om gudomliga proportioner”) från 1509 som Pacioli fördjupar sig i geometri.



Figur 13.36: En rhombicuboktaedron.

Det består av tre delar. Den första ägnas åt det gyllene snitt, polygoner och polyedrar men där finns också avsnitt om perspektivlära. Den andra delen handlar om matematikens betydelse för arkitektur. Den tredje delen är en översättning till italienska av den italienske målaren Piero della Francescas (1420–92) verk om de regelbundna polyedrarna, *Libellus de quinque corporibus regularibus* (”Bok om fem regelbundna kroppar”) som var skriven på latin.

En stor del av boken utgörs av träsnitt av olika typer av polyedrar. De är gjorda efter teckningar av Leonardo da Vinci. Pacioli var god vän med da Vinci och undervisade honom i matematik.

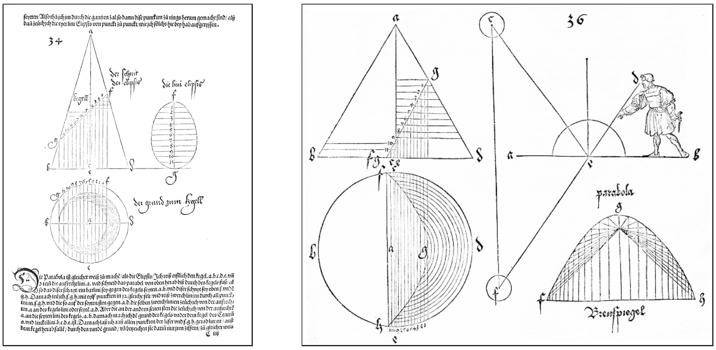
I förordet till *Divina proportioni* beskriver Pacioli da Vincis berömda målning ”Nattvarden” och det är antagligen första gången den nämns i tryck.

Divina proportioni finns i sin helhet inklusive Leonardo da Vincis illustrationer på Internet. Bilden till vänster visar en rhombicuboktaedron som begränsas av 8 trianglar och 18 kvadrater. Den beskrivs redan av Arkimedes men en konkret bild av den utformades först av da Vinci i en teckning till träsnittet i *Divina proportioni*.

Dürers *Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit* Albrecht Dürer var en av renässansens största konstnärer. Han verkade i Nürnberg men gjorde omfattande resor i Europa bl.a. till Nederländerna och Italien. Han var en representant för den tyska och nederländska traditionen men påverkades av de italienska renässansmålarna bl.a. Leonardo da Vinci. Han rönte stor uppskattning och utnämndes till hovmålare av den tysk-romerske kejsaren.

Dürer var emellertid inte bara praktiserande konstnär. Han var också konstteoretiker och som sådan kom han att intressera sig för matematik. Under en resa till Italien kom han i kontakt med Pacioli. Han började 1508 samla material till ett stort verk om matematik och dess tillämpningar på konst. Det färdigställdes 1523 och hade titeln ”Avhandling om proportioner”. Dürer insåg emellertid, att de läsare som verket vände sig till, inte kunde förväntas ha de matematiska kunskaper som krävdes för att ta del av framställningen. Han gjorde en förenklad omarbetning som publicerades 1525. Titeln var *Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit* och det är den första bok på tyska om matematik, om man undantar Johannes Wimans räknelära. Genom detta arbete måste Dürer inte bara räknas som en av den tidens stora konstnärer utan också som en av renässansens mest betydelsefulla matematiker.

Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit består av fyra böcker. I den första konstruerar Dürer olika typer av kurvor som Arkimedes spiral och snäckkurvor. Han studerar kägelsnitten och ger grunderna i proportionslära med bl.a. gyllene snittet. I den andra boken konstruerar han olika typer av regelbundna polygoner och inte bara de som konstrueras i Euklides *Elementa* utan också regelbundna sju-, nio-, elva- och fjortonhörningar. Han diskuterar också problemen med vinkelns tredelning och cirkelns kvadratur. Den tredje boken ägnar Dürer åt pyramider, prismor och cylindrar. En stor del utgörs av konstruktioner av typsnitt för alfabetets bokstäver. I den fjärde boken studerar han de fem platonska kropparna och vissa av Arkimedes s.k. semiregelbundna kroppar. Ett avsnitt ägnas åt skuggning och verket avslutas med grunderna i perspektivlära.



Figur 13.37: I bilden till vänster illustrerar Dürer en ellips och i den till höger en parabel. I den högra bilden visas också hur strålar parallella med parabelns axel reflekteras till parabelns brännpunkt.

Dürers verk riktar sig i första hand till konstnärer och konsthantverkare. Det präglar arbetet. Konstruktioner beskrivs men utan bevis för att de verkligen leder till det önskade resultatet. Ibland leder inte konstruktionerna exakt till de önskade figurerna men noggrannheten är tillräcklig för utövande konstnärer. Det gäller till exempel konstruktionerna av regelbundna månghörningar med 7, 9, 11, 14 och 28 hörn. *Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit* är ett grundläggande verk inom det område som kallas *deskriptiv geometri* och som skulle få en sammanhängande teori under 1800-talet.

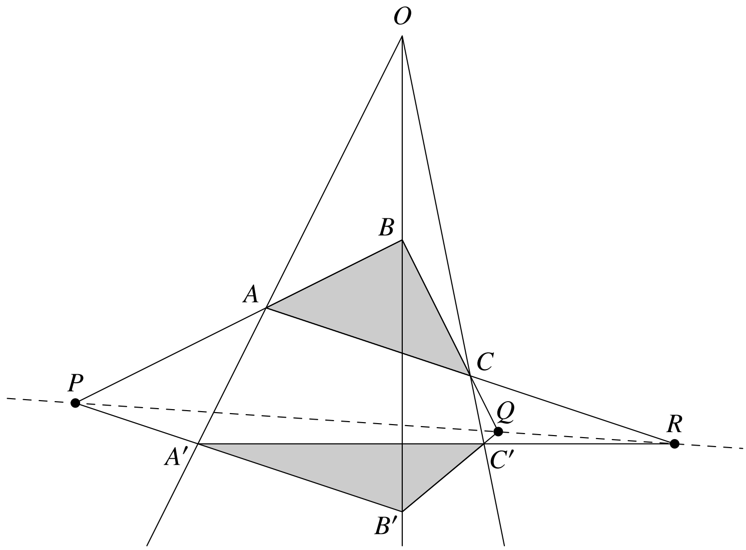
13.6.2 Mot en mer teoretisk framställning

Girard Desargues arbeten Den utveckling av deskriptiv geometri som utvecklades av konstnärer som Alberti och Dürer och av matematiker som Pacioli avtog under 1500- och 1600-talen. Inom matematiken kom andra frågor i förgrunden. Utvecklingen av algebran, den nya infinitesimalkalkylen och i viss mån sannolikhetsläran var mer i centrum för intresset. Réne Descartes verk *La Géometrie* kopplade samman algebra och geometri och det innebar att studiet av geometri fick en annan inriktning.

Centrum för utvecklingen hade flyttats till Paris. Den franske munken Marin Mersenne var den drivande kraften bakom ett nätverk av framstående matematiker som Etienne Pascal, hans son Blaise, Descartes och Pierre de Fermat. Till den kretsen hörde också Girard Desargues som var arkitekt och ingenjör. Hans intresse var geometri och han försökte skapa en ny geometri som riktade sig mer till ingenjörer och arkitekter. Han ville bryta med antika matematiker som Apollonius och Pappos och införa ett mer jordnära sätt att närma sig ämnet. Hans arbeten är emellertid svårtillgängliga och trots att syftet var att ge praktikerna geometriska redskap är framställningen teoretisk. Den är förtätad med knapphändiga förklaringar och kommentarer. Det gällde även arbeten som handlade om praktiska ting som perspektivritning, utformning av stenar till byggnader och konstruktioner av solur.

Hans viktigaste verk är *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan* som kan översättas med "En skiss till en essä om resultaten av plana snitt i en kon". Ett antal kopior tryckets upp 1639. Endast en finns kvar och den återupptäcktes så sent som 1951. Desargues arbete var känt genom en kopia av manuskriptet som gjorts av den franske matematikern **Phillipe de la Hire** (1640–1718), som också intresserade sig för kägelsnitt. Desargues visar i sin bok hur kägelsnitten kan ges en sammanhängande teori genom att studera invarianter under projektioner. Han inför oändligt avlägsna punkter som skärningspunkter mellan parallella linjer och betraktar en rät linje som en cirkel med oändlig radie. Han inför begrepp som pol och polar[2] förmodligen inspirerad av Apollonius. Framställningen fyller kraven på stringens men den är, som vi redan nämnt, koncentrerad och svårtillgänglig.

Några av Desargues arbeten skrevs om så att de blev mer läsbara av **Abraham Bosse** (1604 –76), som var juvelerare till yrket men som också undervisade i perspektivlära. I ett arbete om perspektivitet publicerade Bosse det resultat av Desargue som idag kallas *Desargues sats* och som visas i figur 13.38.

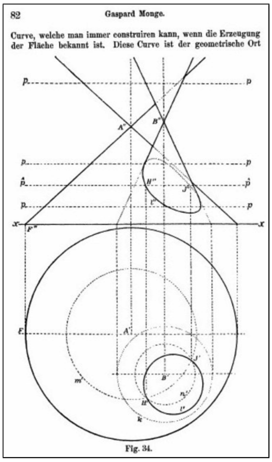


Figur 13.38: Två trianglar ABC och $A'B'C'$ ses från ett perspektivcentrum O som i figuren. Sidorna AB och $A'B'$ skär varandra i P, BC och $B'C'$ i Q samt AC och $A'C'$ i R. Då säger Desargues sats att de tre punkterna P, Q och R ligger på samma räta linje. Om de båda trianglarna ligger i olika plan så följer satsen av att punkterna P, Q och R alla måste ligga på skärningslinjen mellan de båda planen. Om trianglarna ligger i samma plan så kan man uppfatta det fallet som ett gränsläge då ett av planen vrider sig så att det till slut sammanfaller med det andra. Det är också möjligt att göra ett separat bevis.

[2]Begreppen beskrivs i avsnittet om Poncelets arbeten

Gaspard Monge (1746–1818) hade en bakgrund som administratör, konstruktör och lärare. Han utmärkte sig tidigt genom konstruktioner av försvarsanläggningar. Han var med att bygga upp École Polytechnique. Han blev god vän med Napoleon och deltog i hans expedition i Egypten.

Som matematiker kom Monge att intressera sig för geometri och han var en av de första som tillämpade analysen för att utveckla området. Monge ses som grundaren av differentialgeometrin. och hans viktigaste arbete är *Application de l'analyse à la géométrie* från 1795.



Figur 13.39: En figur ur *Géométrie descriptive*.

År 1799 publicerades *Géométrie descriptive* som är en sammanställning av han föreläsningar vid École Normales. Enligt Monge har den deskriptiva geometrin två syften: För de första skall den avbilda tredimensionell kroppar med längd, bredd och djup på ritblad som bara har två dimensioner, längd och bredd. För det andra skall den ge metoder att från de tvådimensionella representationerna härleda kropparnas form och lägen.

Det är konstruktörens arbetssätt som han vill analysera och utveckla. I det sammanhanget spelar projektioner en betydelsefull roll. Naturligtvis måste Monge projicera den tredimensionella kroppen på flera plan för att ur de tvådimensionella bilderna kunna härleda kroppens form och läge. *Géométrie descriptive* finns i sin helhet på nätet och den är försedd med ett femtiotal figurer. För att läsaren skall få en uppfattning om deras komplexitet visar vi en av den enklare i figur 13.39.

Jean Victor Poncelet var en av de studenter som följde Monges föreläsningar vid Ècole Polytechnique. Efter studierna bestämde han sig för att göra en militär karriär och anslöt sig till ingenjörstrupperna. Han blev beordrad att delta i Napoleons erövringståg mot Ryssland 1812 där han bidrog med sitt tekniska kunnande bl.a. genom att konstruera broar. Napoleons krigslycka vände och under återtåget utkämpades ett slag vid Krasnoi, där Poncelet häst dödades under honom och han blev liggande kvar på slagfältet. Han blev tagen som krigsfånge och fick göra en fem månader lång marsch längs Volgas stränder till ett fångläger i staden Saratov. Poncelet berättar att han till en början under den långa marschen inte kunde tänka klart, men när våren kom återvände krafterna och han försökte komma ihåg den matematik som han lärt av Monge och några av andra av hans lärare som Lazare Carnot och **Charles Julien Brianchon**. Han bekänner att han inte kunde rekonstruera deras teorier och han fick komplettera med egna idéer. Han skrev ner sina tankar i en anteckningsbok som han gav namnet ”Anteckningar från Saratov”.

Den 30 maj 1814 slöts fred mellan Frankrike och Ryssland och ett par dar senare frigavs Poncelet. Han började undervisa vid militärhögskolan i Metz, där han tidigare studerat. Han började också bearbeta ”Anteckningar från Saratov” och 1822 gav han ut *Traité des propriétés projectives des figures*. Verket har blivit en klassiker och gavs ut i en ny upplaga 1865–6 som trycktes om så sent som 1995. Arbetet finns tillgänglig i sin helhet på Internet.

Poncelet ger i *Traité des propriétés projectives des figures* grunderna i det som idag kallas *projektiv geometri* och den bärande idén är att studera egenskaper som inte ändras vid projektioner. Dit hör inte sträckors längd, vinklars storhet och areor men däremot dubbelförhållandet mellan fyra punkter på en rät linje. Arbetet innehåller bl.a. följande:

- Poncelet inför oändlighetspunkter och oändlighetslinje. Sinsemellan parallella räta linjer skär varandra i en oändlighetspunkt. Oändlighetspunkterna bildar en oändlighetslinje

- Om A, B, C och D är fyra punkter på en rät linje så är alltså dubbelförhållandet

$$\frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD}$$

  invariant vid projektioner. Sträckorna räknas med tecken. En riktning på linjen är positiv och den andra är negativ. Vi har t.ex. att $AB = -BA$. Om en punkterna t.ex. C är en oändlighetspunkt så är $AC/BC = 1$. Om dubbelförhållandet är lika med -1 så säges A, B och C, D bilda harmoniska punktpar.

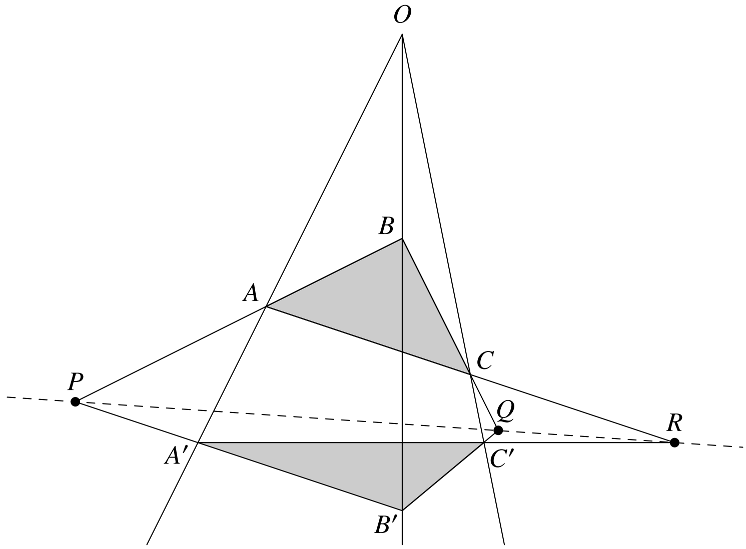
- Teorin för kägelsnitt förnyas. Alla kägelsnitt är projektiva avbildningar av en cirkel. Svåra problem om ett kägelsnitt kan lösas genom att göra en projektion på en cirkel, därefter lösa problemet för cirkeln och sedan göra den omvända projektionen för att komma tillbaka till kägelsnittet. Ett sådant problem är Pascals sats. Den säger att om motstående sidor i en sexhörning, som är inskriven i ett kägelsnitt, förbinds så kommer de tre skärningspunkter som uppstår att ligga på samma räta linje.

  För att metoden skall fungera måste naturligtvis de egenskaper som studeras vara invarianta under projektiva avbildningar.

- Poncelet utvecklade också teorin för *pol* och *polar*, begrepp som finns redan hos Apollonius. Om P är en punkt utanför ett kägelsnitt så kan man från den dra två tangenter till kägelsnittet. Den räta linje som går genom de båda tangeringspunkterna kallas polar till polen P. Om P ligger inuti kägelsnittet så skär en korda genom P kägelsnittet i två punkter. Tangenterna till kägelsnittet i dessa båda punkter skär varandra i en punkt Q. När kordan vrider sig kring punkten P kommer Q att genomlöpa en rät linje som vi kallar polaren till polen P. Det följer att om en punkt Q ligger på polaren till en punkt P så ligger P på polaren till Q. Denna symmetri kan utnyttjas för att formulera nya satser och för att förenkla bevis.

- Symmetrin mellan pol och polar kan utvidgas till den s.k. dualitetsprincipen. Om de rätta villkoren är uppfyllda kan man i en sats om räta linjer och punkter byta ut ”punkt” mot ”rät linje” och vice versa och få en ny sats. Villkoren är att man endast studerar egenskaper som är invarianta under projektioner. I regel gäller det påståenden av typen ”tre punkter ligger på samma räta linje” och ”tre räta linjer går genom samma punkt”. I figur 13.40 med bildtext visas den duala motsvarigheten till Desargues sats

Mycket av det som finns i *Traité des propriétés projectives des figures* finns också i Desargues arbete *Brouillon project d’une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan*. Pascals sats som är ett viktigt resultat i den projektiva geometrin visades av Pascal redan 1639 och var förmodligen inspirerad av Desargues som var hans lärare. Brianchon som var samtida med Poncelet hade tidigare lanserat begreppet dualitet och visat en dual sats till Pascals: ”Om en sexhörning är omskriven ett kägelsnitt och motstående hörn förenas med räta linjer så går dessa genom en punkt.”. Pol och polar introducerades, som vi tidigare nämnt, redan av Apollonius. Det är emellertid Poncelets arbete som ger en sammanhängande bild av det vi idag kallar projektiv geometri.



Figur 13.40: Figuren är identisk med figur 13.38 men förutsättningar och slutsatser har bytt plats. Trianglarna ABC och $A'B'C'$ är givna. Sidorna AB och $A'B'$ skär varandra i P, BC och $B'C'$ i Q samt AC och $A'C'$ i R. Om de tre punkterna P, Q och R ligger på samma räta linje så går de tre räta linjerna AA', BB' och CC' genom samma punkt O.

13.7 Differentialgeometri

Utvecklingen av algebran med bl.a. Descartes *La Géometrie* under första hälften av 1600-talet och framväxten av differential- och integralkalkylen under 1600-talets senare hälft innebar ändrade förutsättningar för geometrins utveckling. Geometriska problem kunde behandlas algebraiskt och man fick verktyg att undersöka egenskaper hos kurvor och ytor. Flera av de tongivande matematikerna under 1700-talet använde den nya kalkylen till att studera plana kurvors krökning och man införde begreppet *krökningscirkel* till given punkt på en kurva. Krökningscirkeln tangerar kurvan i den givna punkten. Men det finns många cirklar som tangerar en kurva i en given punkt och man väljer den som ”ansluter bäst” till kurvan vilket innebär att både första- och andraderivatorna för cirkeln och kurvan sammanfaller. Ett naturligt mått på en cirkels krökning är $1/R$ där R är krökningscirkelns radie. Cirklar med mindre radier har intuitivt större krökning än de med större. Krökningen av en kurva i en given punkt är alltså lika med $1/R$ där R är krökningscirkelns radie. Krökningscirkelns medelpunkt kallas *krökningscentrum*.

Ett annat område som blev föremål för omfattande studier var bestämning av envelopper och evolutor till kurvskaror. En envelopp till en kurvskara är en kurva som tangerar samtliga kurvor i den givna kurvskaran. En evoluta skär samtliga kurvor i skaran under räta vinklar.

Plana kurvor blev ett naturligt område för tillämpning av den nya kalkylen. Problemen blev svårare när man skulle studera kurvor och ytor i rummet. Hur mäter man t.ex. krökningen av yta? Den som först tacklade det problemet var Leonhard Euler i en artikel *Recherches sur la courbure des surfaces* (”Undersökning av ytors krökning”) från 1767. Han konstaterade att genom en punkt på en yta går flera plana kurvor och de har i de flesta fall alla olika krökning. Han visade att om man studerade alla plana snitt genom den ifrågavarande punkten som är vinkelräta mot ytans tangentplan i punkten så finns det en kurva med maximal krökning och en med minimal och de båda kurvornas plan är vinkelräta mot varandra. Det skall anmärkas att de olika kurvornas krökning räknas med tecken. Kurvornas krökningscentrum kan ligga på olika sidor om tangentplanet. De vars centrum ligger på den ena sidan har positiv krökning och de på den andra har negativ.

I kapitlet om 1800-talet i den historiska översikten nämnde vi speciellt arbeten av Gaspard Monge, Carl Friedrich Gauss och Bernhard Riemann. Vi skall ge några ytterligare kommentarer om dessa arbeten. Gaspard Monge är den förste som systematiskt började arbeta med problem inom differentialgeometri. och han brukar kallas differentialgeometrins fader. I arbetet *Application de l'analyse à la géométrie* från 1807, som är på ungefär 400 sidor, studerar han olika typer av ytor med avseende på krökning och envelopper till skaror av ytor i rummet. I arbetet utvecklar han metoder som kom att påverka dfferentialgeometrins utveckling.

Carl Friedrich Gauss arbeten inom differentialgeometri är epokgörande. I artikeln *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (”Allmänna undersökningar av krökta ytor”) visar han det berömda *Theorema egregium* (”Den märkvärdiga satsen”). Han inför begreppet huvudkrökning av en yta i en punkt som produkten av den största och minsta krökningen av de kurvor genom punkten som ligger i plan vinkelräta mot ytans tangentplan. Det är alltså samma krökningar som Euler studerade i sin avhandling från 1767. *Theorema egregium* säger nu att huvudkrökningen inte ändras om ytan utsätts för ”stela” transformationer. Den får alltså t.ex. böjas men inte sträckas eller krympas. Det betyder t.ex. att det är omöjligt att avbilda en sfär, som har positiv huvudkrökning i alla punkter, ”stelt” på ett plan där huvudkrökningen överallt är lika med 0. *Disquisitiones generales circa superficies kurvas* är ett epokgörande arbete. Det finns också en engelsk översättning, *General investigations of curved surfaces of 1827 and 1825*, med kommentarer av **J. C. Morehead** och **A. M. Hiltebeitel** på `https://quod.lib.umich.edu`.

Gauss arbeten ligger till grund för ett av differentialgeometrins viktigaste arbete nämligen Bernhard Riemanns habilationsföreläsning *Über die Hypotesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*. I det arbetet finns de revolutionerande idéer som senare skulle leda till teorin för abstrakta Riemannska mångfalder och det är detta arbete som ligger till grund för Einsteins formulering av den allmänna relativitetsteorin. Riemanns föreläsning finns på Internet både i originalversion och i en engelsk översättning av **W. K. Clifford**.

13.8 Icke-euklidisk geometri

I avsnitt 9.5.2 beskrivs den icke-euklidiska geometrins framväxt från Proklos, Omar Khayyams, Nasir Eddin Al Tusis, John Wallis, Girolamo Saccheris, Johann Heinrich Lamberts och Adrian Maria Legendres försök att bevisa Euklides femte postulat, parallellaxiomet, med hjälp av de fyra övriga till Gauss, Nikolaj Lobatjevskijs och János Bolyai konstruktion av en ny geometri där de fyra första postulaten är uppfyllda men inte det femte. Att en sådan geometri verkligen existerar visade Eugenio Beltrami, Felix Klein och Henri Poincaré genom modeller i den euklidiska geometrin. Den intresserade läsaren kan ta del av det nämnda avsnittet. Vi ger några referenser för den som vill fördjupa sig närmare.

I författarens bok *Åtta kapitel om geometri* ägnas det sista kapitlet helt åt icke-euklidisk geometri med bl.a. beskrivningar av de olika bevis av parallellpostulatet som antingen var felaktiga eller ofullständiga. Där finns också utdrag ur brev från Gauss där han delger sina misstankar att det finns en annan geometri än den euklidiska samt en beskrivning av Lobatjevskijs arbete. Vidare presenteras en modell av den icke-euklidiska geometrin som konstruerats av Poincaré.

MacTutor History of Mathematics Archive har en särskild artikel om icke-euklidisk geometri under fliken ”History topics index”, ”Geometry and topology”. Där finns också en lista med 23 referenser.

I D. E. Smith *A Source Book in Mathematics. Vol. II* finns utdrag från Saccheris, Lobatjevskijs och Bolyais verk. Boken finns tillgänglig på nätet på `https://archive.org`. En engelsk översättning av Lobatjevskis arbete från 1826, *New Principles of Geometry with Complete Theory of Parallels*, samt Bolyais arbete *Scientiam spatii absolute verum* (”Den absoluta vetenskapen om rummet”) finns tillgängliga på Internet.

Euklides *Elementa* var under årtusenden det grundläggande verket inom geometrin. De fem postulat som framställningen utgår från är emellertid ofullständiga. Det finns brister i *Elementa*. David Hilbert ger i *Grundlagen der Geometrie* ett fullständigt system av postulat för den euklidiska geometrin. Arbetet i sin helhet finns tillgänglig på Internet. En sammanställning av axiomsystemet finns som ett appendix i *Åtta kapitel om geometri*.

13.9 De tre klassiska konstruktionsproblemen

Problemen om cirkelns kvadratur, kubens fördubbling och vinkelns tredelning hade i mer än tvåtusen år gäckat matematiker. De var under denna tid mer eller mindre i fokus men fanns alltid som en utmaning. Det var på 1800-talet som problemen fick sin lösning och det tack vare algebrans utveckling och då framför allt teorin för ekvationslösning. Det var den franske matematikern Pierre Wantzel som löste de två sistnämnda problemen genom att visa, att det är omöjligt, att med de stränga krav som en gång Platon ställt, konstruera en kub med dubbelt så stor volym som en given samt att dela en en godtycklig vinkel i tre lika stora delar. Ett bevis finns skisserat i avsnitt 9.5.1 och ett mer detaljerat bevis ges i *Åtta kapitel om geometri*. Wantzels artikel *Recherches sur les moyens de reconnaitre si un Problème de Géométrie peut se résourdre avec la règle et le compas* (”Undersökningar om medel för att avgöra om problem inom geometrin kan lösas med hjälp av passare och linjal”) publicerades 1837 i tidskriften *Journal de Mathématiques* och den finns tillgänglig på Internet.

Problemet med cirkelns kvadratur visade sig besvärligare och löstes genom utvecklingen av det som kallas *analytisk talteori*. Att det problemet är olösbart följer av att talet π är trancendent vilket innebär att det inte är rot till någon algebraisk ekvation med heltalskoefficienter. Det visades 1882 av den tyske matematikern Ferdinand von Lindemann i en artikel *Ueber die Zahl* π i tidskriften *Mathematische Annalen*. Artikeln finns tillgänglig på Internet.

13.10 Efter den icke-euklidiska geometrin

I sin berömda föreläsning på matematikerkongressen i Paris 1900 framhöll David Hilbert att vid sidan av den aritmetiska formuleringen av continuum var Gauss, Bolyais och Lobatjevskijs upptäckt av den icke-euklidiska geometrin de mest anmärkningsvärde bidragen till matematiken under 1800-talet. Upptäckten gav nya perspektiv på matematiken.

Felix Klein formulerade 1872 det som kallas *Erlangen programmet* en ny syn på matematiken delvis inspirerad av Poncelets arbeten om projektiv geometri. Han kopplade samman geometri och gruppbegreppet som ursprungligen skapats för att studera symmetrier hos rötter till algebraiska ekvationer. Han studerade grupper av avbildningar av rummet på sig själv. En samling avbildningar bildar en grupp om två villkor är uppfyllda: 1. Om två avbildningar tillhör gruppen så gör också deras sammansättning det. 2. Om en avbildning tillhör gruppen så gör också inversen det. Den vanliga euklidiska geometrin är studiet av egenskaper som är invarianta under kongruensavbildningar och den projektiva geometrin är studiet av egenskaper som är invarianta under projektiva avbildningar. Om vi studerar en grupp av avbildningar som avbildar räta linjer på räta linjer och som dessutom lämnar delningsförhållandet mellan tre punkter på en rät linje invariant får vi en typ av geometri som kallas *affin*.

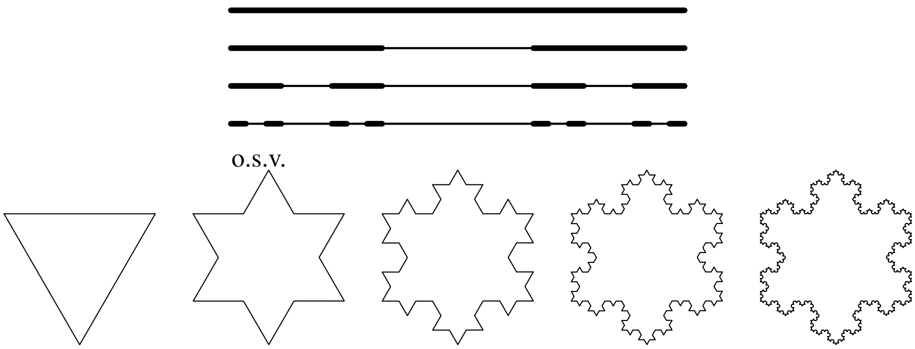
Tillsammans med norrmannen Sophus Lie studerade Klein kontinuerliga grupper, s.k. *Liegrupper*, och egenskaper hos ytor som är invarianta under Liegrupper av transformationer. Ändliga permutationsgrupper används för att studera lösningar till algebraiska ekvationer. Med hjälp av Liegrupper kan man studera egenskaper hos lösningar till differentialekvationer.

I sitt arbete med kvarternioner införde den irländske matematikern W. R. Hamilton vektorer, riktade sträckor som beskrivs med en taltripplar. Vektorbegreppet har kommit att bli centralt inom geometrin och är numera en oundgänglig del av en akademisk grundutbildning i matematik. Vektorbegreppet kan generaliseras till flera dimensioner och begrepp som räta linjer, sträckor, vinklar, plan, areor och volymer kan definieras i n-dimensionella rum där $n > 3$. Detta område kallas *linjär algebra* och det ger verktyg som är användbara inom många kanske de flesta delar av matematiken. Vi återkommer till det i nästa kapitel.

Bernhard Riemann skisserar i sin föreläsning *Über die Hypotesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* från 1854 differentialgeometri i högre dimensioner. Arbetet är grundläggande för den moderna utvecklingen av differentialgeometrin där Riemannska mångfalder numera är ett centralt begrepp. I avsnitt 10.3.3 tar vi upp Poincarés arbeten kring *Analysis Situs* och hans karakterisering av 2-mångfalder och hur Felix Haussdorff införde nya abstrakta begrepp som metriska rum med en typ av avståndsbegrepp och topologiska rum som är ännu generellare och där omgivning till en punkt är centralt. Vi är nu långt ifrån Euklides där vi har en konkret bild av sträckor, vinklar, areor och volymer.

13.11 Fraktaler – en ny typ av geometriska objekt

År 1982 gav **Benoit Mandelbrot** ut en mycket uppmärksammad skrift *The Fractal Geometry of Nature*. Mandelbrot var född i Polen men som matematiker var han verksam i Frankrike och USA. Han hade tidigare publicerat arbeten inom samma område. År 1967 publicerade han en artikel, *How Long is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension*, i den ansedda tidskriften *Nature*. På en världskarta är Storbritanniens kustlinje en tämligen okomplicerad kurva. På en karta som bara omfattar Storbritannien är den mer komplicerad. Vi ser fler vikar som går in i landet och fler uddar som skjuter ut i havet. Gör vi en karta som beskriver kustlinjen kring ett litet samhälle vid kusten blir bilden än mer komplicerad. Så kan vi fortsätta och bilden av kustlinjen blir alltmer komplicerad. Den blir ”taggigare” och ”taggigare”. Varje ”tagg” kan förstoras och ge upphov till en ännu ”taggigare” kurva. Den ursprungliga enkla bilden från världskartan har blivit mer komplex och längden av kustlinjen beror på den detaljnivå vi väljer. Ordet fraktal, som kommer från latinets ”fractus” som betyder bruten, införde Mandelbrot 1975 i publikationen *Les objets fractals, formes, hasard et dimension*. Mandelbrot studerade där geometriska objekt där mönster upprepas i allt mindre skala och där de mindre delarna är likformiga med de större. Han tar också fram exempel från naturen som har en fraktal geometri.



Figur 13.41: I den översta figuren visas hur Cantormängden konstrueras. Vi utgår från ett intervall, delar in det i tre lika stora delar och tar bort den mittersta. På var och en av de båda tredjedelar som återstår upprepar man proceduren o.s.v. Den mängd som återstår efter oändligt många steg kallas *Cantormängden*. Bilden visar den fyra första stegen. Det kan anmärkas att Cantormängden består av de punkter som som representeras av de tal som i tresystemet kan skrivas $0.abcd\ldots$ där a, b, c, d, $\ldots$ är 0 eller 2. Den nedre delen av figuren illustrerar de tre första stegen i konstruktionen av von Kochs *snöflingekurva*. Utgångsfiguren är en liksidig triangel. Var och en av sidorna delas in i tre lika stora delar. På de mittersta delarna konstrueras nya liksidiga trianglar. De nya sidorna delas in tre lika stora delar och på de mittersta konstrueras nya liksidiga trianglar o.s.v. Efter oändligt många steg får vi snöflingekurvan, vars längd visar sig vara oändlig.

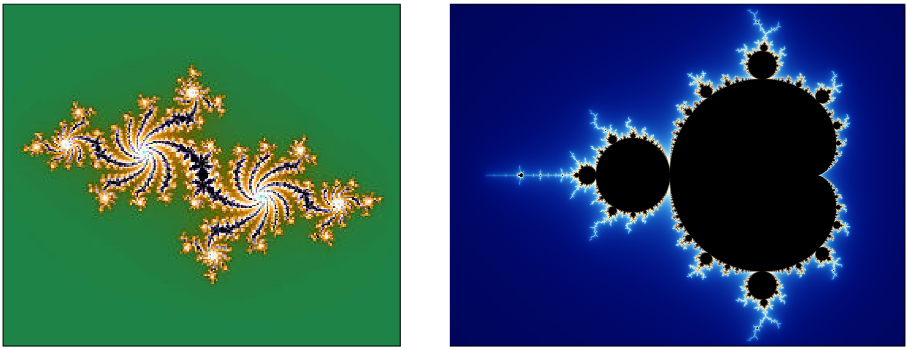
De typer av geometriska figurer som Mandelbrot studerade var inte nya. Georg Cantor hade introducerat en mängd, Cantormängden[3], på reella tallinjen som har fraktala egenskaper, den italienske matematikern Giuseppe Peano hade konstruerat en kurva som går genom varje punkt i en kvadrat och den svenska matematikern **Helge von Koch** hade 1904 konstruerat snöflingekurvan. Cantormängden och snöflingekurvan beskrivs i figur 13.41. Två franska matematiker **Gaston Julia** och **Pierre Fatou** hade redan under 1920-talet studerat samma typ av mängder som Mandelbrot och deras arbeten är i själva verket en utgångspunkt för Mandelbrots arbete från 1982. De konstruerade en mängd, som nu kallas *Juliamängden*, och som måste ha inspirerat Mandelbrot när han skapade den fraktala mängd som nu kallas *Mandelbrotmängden*.

Konstruktioner av allt mer komplexa kurvor blev en utgångspunkt för en diskussion om dimensionsbegreppet. En punkt har dimensionen 0. En enkel kurva som en rät linje eller periferin av en cirkel eller en parabel har dimensionen 1. Ett område i planet som en kvadrat eller det inre av en cirkel har dimensionen 2. En kub har dimensionen 3. Den tyske matematikern **Felix Hausdorff** införde 1919 ett nytt dimensionsbegrepp som tar hänsyn till hur tätt packad kurvan är lokalt. Med det dimensionsbegreppet har Peanos kurva och snöflingekurvan dimensionerna 2 respektive $\ln 4/\ln 3$.

Framstegen inom datatekniken gjorde det möjligt att på 1980-talet åskådliggöra fraktalerna och många har fascinerats av de mönster som bildas. I figur 13.42 nedan åskådliggörs Juliamängden och Mandebrotmängden och i bildtexten beskrivs hur de är konstruerade.

Det skall till slut nämnas att teorin för fraktaler har starka kopplingar till den del av analysen som kallas *kaosteori* och som lanserades under 1950- och 60-talen. Redan 1892 skrev emellertid Poincaré ett banbrytande arbete *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste* ("Nya metoder inom den celesta mekaniken") som förebådar kaosteorin.

[3]Mängden hade egentligen upptäckts redan år 1875 av den engelske matematikern **Henry John Stephen Smith** nio år före Cantor introducerade den.



Figur 13.42: Julia och Fatou utgår från en talföljd i det komplexa talplanet. Från ett givet startvärde z_0 definierar de följden på följande sätt: $z_1 = z_0^2 + c$, $z_2 = z_1^2 + c$, $z_3 = z_2^2 + c$, o.s.v. eller allmänt $z_{n+1} = z_n^2 + c$ där c är en konstant. Talföljden konvergerar mot ett ändligt värde beroende på startvärdet z_0 och konstanten c. För ett givet värde på konstanten c består Juliamängden av alla startpunkter z_0 för vilka talföljden konvergerar. Det finns alltså en Juliamängd för varje c. Den vänstra bilden visar en juliamängd. Mandelbrot utgår från samma talföljd men han låter startvärdet alltid vara $z_0 = 0$ och bestämmer alla c så att följden konvergerar. Mandelbrotmängden består alltså av alla sådana c och den visas i bilden till höger.

Kapitel 14

Algebra

Aritmetiken och geometrin är de två ursprungliga delarna av matematiken. När problemen blev mer komplicerade både inom aritmetiken och inom geometrin uppstod ett behov av att utveckla metoder som förenklar och ger överblick. Det är problem som leder till ekvationer som blir utgångspunkt för det som vi idag kallar algebra. Det finns lertavlor från det gamla Babylonien där man kan se den formel för lösning av andragradsekvationen som finns i dagens läroböcker – naturligtvis i konkreta fall och utan symboler för den obekanta. Under antiken dominerade den vetenskapliga matematiken av geometri, men andra boken av Euklides *Elementa* ägnas åt vad vi idag kallar geometrisk algebra. Där finns i geometrisk form kvadreringsregeln, konjugatregeln och lösning till andragradsekvationer, men även om vi kan känna igen vissa algebraiska formler så är det fråga om geometri och knappast vad vi kallar algebra.

Det är i arabländerna kring 700 e.Kr. som man brukar anse att algebran börjar utvecklas och det stora namnet är Al Khwarizmi. Dessförinnan hade emellertid en av de stora matematikerna från antiken, Diofantos, som levde på 200-talet e.Kr., börjat utveckla metoder som var embryon till ett algebraiskt tänkande.

Vi börjar vår genomgång av algebrans utveckling med att studera Diofantos arbeten innan vi beskriver Al Khwarizmis banbrytande arbete och vi slutar med det vi kallar den abstrakta algebran som växte fram på 1800-talet och utvecklades ytterligare under 1900-talet.

14.1 Diofantos *Arithmetica*

En av kejsartidens största matematiker var Diofantos som verkade i Alexandria på 200-talet e.Kr. Till skillnad från de flesta andra matematiker under antiken var inte hans huvudintresse geometri utan aritmetik. Det var inte aritmetikens användbarhet för att mäta olika storheter som var i förgrunden utan Diofantos studerade aritmetiken för sin egen skull. Hans stora verk *Arithmetica* består av tretton böcker, av vilka nio finns bevarade åtminstone delvis, och det innehåller 189 problem med lösningar. Problemen leder i regel till ekvationer.

I den historiska översikten gav vi en något moderniserad version av det första problemet ur den första boken. Den är hämtad från en svensk översättning av Peter Glimstedt från 1855 och finns tillgänglig på Internet. Glimstedt har, för att göra texten mer lättläst, använt symboler för t.ex. addition och subtraktion som infördes långt senare. Matematikhistorikern T. L. Heath har i arbetet *Diophantus of Alexandria. A Study of Greek Algebra* från 1885 kommenterat och översatt *Arithmetica*. Verket finns tillgängligt på Internet liksom en läsvärd uppsats, *Fortytwo problems of first degree from Diophantus' Arithmetica* (2010), av **Tinka Davies**.

Man kan ha flera perspektiv när man studerar *Arithmetica*. Ett är naturligtvis problemen och lösningsmetoderna. Ett annat är den formella framställningen. Heath ägnar ett längre avsnitt i inledningen åt att diskutera Diofantos beteckningssystem och i översättningen och tolkningen av de olika problemen väljer han att använda moderna beteckningar för att läsaren lättare skall kunna följa resonemangen. Glimstedts svenska tolkning, som gjordes över femtio år före Heaths, använder också genomgående moderna beteckningar. Davies ger förmodligen en mer källtrogen framställning av några av de första problemen. En översättning till svenska av hennes version av problem 7 i bok I är följande:

> ”Att subtrahera två givna tal med samma tal så att de båda skillnaderna har ett givet förhållande. Antag att vi vill subtrahera 100 och 20 från samma tal så att den större skillnaden är tre gånger så stor som den mindre.
>
> Låt det sökta talet vara 1 arithmos. Om vi subtraherar 100 så är skillnaden 1 arithmos minus 100 enheter; och om vi subtraherar 20 är skillnaden 1 arithmos minus 20 enheter. Nu skall den större resten vara tre gånger så stor som den mindre, så tre gånger den mindre är lika med den större. Nu är tre gånger den mindre resten lika med 3 arithmoi minus 300 enheter som skall vara lika med 1 arithmos minus 20 enheter. Addera lika mycket till båda sidorna och vi får att 3 arithmoi är lika med 1 arithmos plus 280 enheter. Subtrahera lika mycket från båda sidor och vi får att 2 arithmoi är lika med 280 enheter; arithmos är alltså 140 enheter.
>
> Om vi återvänder till hypotesen att det sökta talet är 1 arithmos så är det 140 enheter. Om vi subtraherar 100 får vi 40 enheter kvar och om vi samtidigt subtraherar 20, får vi 120 enheter kvar; alltså har vi slagit fast att den större skillnaden är tre gånger så stor som den mindre.”

Diofantos kallar alltså det obekanta talet för ”arithmos” med pluralformen ”arithmoi” och han löser problemet genom att ställa upp en ekvation som han sedan löser på samma sätt som vi löser ekvationer. Men han inför inte beteckningar utan beskriver såväl ”ekvationen” som lösningsprocessen med ord. Det är vad vi kallar retorisk algebra. För att förkorta framställningen inför Diofantos beteckningen ζ för arithmos.

Problemen blir allt svårare och med retorisk algebra blir lösningarna alltmer oöverskådliga. Vi skall se hur Heath tolkar det problem som inspirerade Fermat till att formulera sin förmodan. Heath tar alltså hjälp av modern algebraisk notation för att vi lättare skall kunna följa tankegångarna. Efter att ha översatt den grekiska texten har han tolkat det matematiska innehållet som utan moderna beteckningar måste vara omständligt och svårtytt.

> ”Att dela ett en given kvadrat i två kvadrater.
>
> Givet en kvadrat 16.
>
> x^2 en av de sökta kvadraterna. Därför måste $16 - x^2$ vara en kvadrat.
>
> Tag en kvadrat av formen $(mx - 4)^2$, m är ett heltal och 4 det tal som är kvadratroten ur 16, t.ex. tag $(2x - 4)^2$, och sätt det lika med $16 - x^2$.
>
> Alltså $4x^2 - 16x + 16 = 16 - x^2$, eller $5x^2 = 16x$ och $x = 16/5$.
>
> De sökta kvadraterna är därför $\frac{256}{25}$ och $\frac{144}{25}$.”

Det är uppenbart att problemet har flera lösningar. Det naturliga talet m kan väljas godtyckligt och med andra värden på m får vi andra lösningar. Problemet har alltså oändligt många lösningar och ekvationer av den typen kallar vi idag diofantiska. Många av problemen i *Arithmetica* leder till sådana ekvationer.

De matematiska samband och uttryck som Diofantos arbetar med är så komplexa att han tvingades införa symboler som förkortade framställningen. Vi har tidigare nämnt att han införde beteckningen ζ för den obekanta. Men han arbetar också med kvadrater, kuber, bikvadrater, o.s.v. av den obekanta och han inför särskilda beteckningar för dem. I ett brev till en kollega Dionysios förklarar han sina val av beteckningar;

> ”Alltså har vart och ett av dessa tal, givet en förkortad beteckning, som erkänns tillhöra den aritmetiska teorins elementa.
>
> Sålunda kallas kvadraten på det okända kvadrat och dess tecken är ett Δ, som har särtecknet Y, Δ^Y,
>
> kuben på det okända kub och dess tecken är ett K, som har särtecknet Y, K^Y,
>
> det av en kvadrat multiplicerad med sig själv, kvadratkvadrat och dess tecken är två Δ, som har särtecknet Y, $\Delta^Y\Delta$,
>
> det av en kvadrat multiplicerad kuben med samma sida som den, kvadratkub och dess beteckning är ΔK, som har särtecknet Y, ΔK^Y
> . . .”

Hur använder nu Diofantos dessa förkortningar? Vi ger några exempel från Heaths arbete. Uttrycket

$$x^3 + 13x^2 + 5x$$

skriver Diofantos

$$K^Y\bar{\alpha}\Delta^Y\overline{\iota\gamma}\zeta\bar{\epsilon}.$$

Han skriver först symbolen för kuben på den obekanta och därefter dess koefficient som är 1, som i det grekiska eller joniska talsystemet betecknas med α. Alla koefficienter markeras med överstrykning. Därefter följer symbolen för den obekanta i kvadrat följt av koefficienten som är 13 som i det grekiska talsystemet svarar mot $\iota\gamma$. Sedan följer den obekanta ζ med koefficienten 5 d.v.s. ϵ. Läsaren kan ta del av det joniska talsystemet i avsnitt 12.3.1. Vad händer om vi läger till en konstant term och istället vill studera

$$x^3 + 13x^2 + 5x + 2?$$

För att inte missuppfattnings skall kunna uppstå inför Diofantos beteckning $\dot{M}$ som anger antalet enheter och vårt uttryck skrivs

$$K^Y\bar{\alpha}\Delta^Y\overline{\iota\gamma}\zeta\bar{\epsilon}\dot{M}\bar{\beta}.$$

Diofantos hade ingen symbol för addition men använde en uppochnedvänd treudd ⫛ för subtraktion. Uttrycket

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 1$$

skrivs

$$K^Y\bar{\alpha}\zeta\bar{\eta} \pitchfork \Delta^Y\bar{\epsilon}\dot{M}\bar{\alpha}.$$

Han samlar först det vi kallar plustermer och genom tecknet för minus skiljs de från minustermerna.

Diofantos beteckningssystem förefaller oss komplicerat och svåröverskådligt. Det kan naturligtvis bero på vår ovana med det joniska talsystemet men antalet olika tecken blir snart stort och det innebär att läsbarheten minskar. Diofantos utvecklar inte räknandet med sina symboler utan de är enbart ett sätt att förkorta framställningen. Man brukar kalla en sådan algebra för synkoperad. Det är emellertid värt att notera att Diofantos hade klart för sig teckenreglerna vid multiplikation. Han skriver i brevet till Dionysios: ”Ett negativt tal multiplicerat med ett negativt blir positivt och ett negativt multiplicerat med ett positivt blir negativt.”.

Innehållet i *Arithmetica* är talteoretiskt. Problemen handlar ofta om att konstruera kvadrattal och och ibland kuber. Några exempel ur bok II får belysa detta.

> Problem 9: Att dela ett givet tal, som är summan av två kvadrater, i två andra kvadrater.
>
> Problem 10: Att bestämma två kvadrater som har en given skillnad.
>
> Problem 11 i bok 2: Att addera ett sökt tal till två givna tal så att så att båda summorna blir kvadrater.

Problemen har i regel flera lösningar och Diofantos resonerar med konkreta exempel. Han gör heller inte anspråk på att bestämma alla lösningar. Några allmänna metoder att lösa ekvationer av t.ex. andra graden ges inte. Men hans val av aritmetiska problem, hans metoder och hans beteckningssystem banar väg för den algebra som skulle utvecklas på 700-talet.

14.2 Algebrans födelse

14.2.1 Al Khwarizmis *Hisab al-jabr w'al-muqabalah*

Abu a'far Muhammad ibn Musa Al Khwarizmi var en av de tongivande lärarna vid *Visdomens hus* som grundades av Harun Al Rashid som var kalif i Bagdad 786–809. *Visdomens hus* var ett vetenskapligt centrum med ett stort bibliotek och hade en storhetstid då Harun al Rashids son Al Mamun var kalif. Al Mamun, som regerade 813–33, hade ett stort intresse för vetenskap och kultur och han var också angelägen om att bevara arbeten från den grekiska kulturen. Det var förmodligen han som gav Al Khwarizmi uppdraget att skriva en bok om matematik som skulle hjälpa yrkesmän av olika kategorier att utveckla sin verksamhet. Boken som har namnet *Hisab al-jabr w'al-muqabalah* kom ut under Al Mamuns tid som kalif. Titeln kan översättas med ”Kortfattad bok om beräkning medhjälp av komplettering och balansering”. Vi påminner om att med vår terminologi innebär det att man adderar respektive subtraherar samma tal till båda sidorna i en ekvation. Det är i detta verk som vi har en systematisk genomgång av metoder att lösa ekvationer av första och andra graden. Ordet ”algebra” kommer från ”al-jabr” i bokens titel.

En engelsk översättning med kommentarer av **Frederic Rosen**, *The Algebra of Mohammd ben Musa*, från 1831 finns tillgänglig på Internet. Arbetet omfattar 174 sidor och de sista två tredjedelarna handlar om tillämpningar framför allt inom handel och juridik. De första sextio sidorna ägnas åt rent matematiska frågor. Det är tydligt att Al Khwarizmi vill renodla matematiken för att utnyttja dess generalitet. Det framgår av de första meningarna:

> ”När jag övervägde vad folk i allmänhet önskar av beräkningar, fann jag att det alltid är ett tal.
>
> Jag observerade också att varje tal är sammansatt av enheter och att varje tal kan delas upp i enheter.”

Al Khwarizmi studerar därför först tal utan att koppla dem till någon speciell tillämpning.

Han observerar att de tal som han behöver i beräkningarna är av tre slag: Rötter, kvadrater och enkla tal som varken är kopplade till rötter eller kvadrater. Med rot menar Al Khwarizmi det tal som efterfrågas eller den obekanta. En kvadrat är en rot multiplicerad med sig själv. Med vår terminologi betraktar han problem som leder till ekvationer med x^2- och x-termer samt konstanta termer.

Efter att ha introducerat de grundläggande begreppen studerar Al Khwarizmi sex typer av ekvationer. Först betraktar han de tre fallen ”kvadrater är lika med rötter” eller med våra beteckningar $ax^2 = bx$, ”rötter är lika med tal” d.v.s. $ax^2 = b$ och ”rötter är lika med tal” d.v.s. $ax = b$. Han visar genom exempel att de är enkla att lösa. Nu återstår tre fall där lösningarna är mer komplicerade nämligen

- ”rötter och kvadrater är lika med tal” d.v.s. $ax^2 + bx = c$
- ”tal och kvadrater är lika med rötter” d.v.s. $ax^2 + c = bx$
- ”rötter och tal är lika med kvadrater” d.v.s. $ax^2 = bx + c$

Al Khwarizmi använder sig inte av negativa tal och det är därför han måste skilja på dessa tre fall. Han visar först genom exempel hur man går till väga för att bestämma lösningen. Han ger en algoritm med vars hjälp ekvationen kan lösas. Därefter visar han geometriskt att metoden är korrekt.

Det första fallet behandlades i kapitel 3. Vi studerar det andra fallet, som är det där det geometriska beviset är mest komplicerat. Al Khwarizmi väljer att lösa ekvationen ”kvadrat och 21 enheter är lika med 10 rötter” eller $x^2 + 21 = 10x$. En översättning av hans algoritm i Rosens engelska översättning är följande:

> ”Tag halva antalet rötter; hälften är fem. Multiplicera det med sig själv; produkten är tjugofem. Subtrahera därifrån tjugoett som är anknuten till kvadraten; skillnaden är fyra. Bestäm dess rot; den är två. Subtrahera detta från hälften av antalet rötter; skillnaden är tre. Detta är den sökta roten av kvadraten och kvadraten är nio. Du kan också addera roten till hälften av antalet rötter; summan är sju. Detta är också den sökta roten av kvadraten och kvadraten själv är fyrtionio.”

Lösningen till $x^2 + 21 = 10x$ är med våra beteckningar

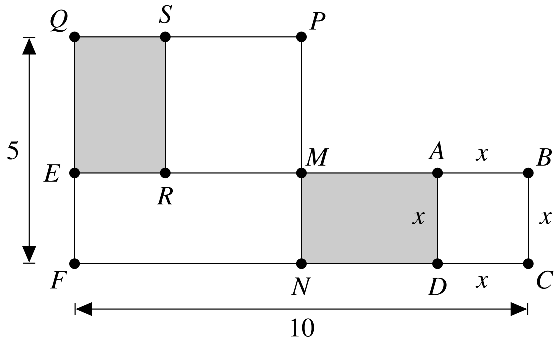
$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 21} = 5 \pm 2.$$

Genom att gå igenom Al Khwarizmis text finner man att det exakt detsamma som vad vi beskriver med våra symboler. I figur 14.1 med tillhörande text ger vi det geometriska beviset.

Efter att ha behandlat de sex olika typerna av andragradsekvationer övergår Al Khwarizmi att studera de fyra räknesätten. Han ger lagar för beräkning med kvadratrötter, han visar hur man multiplicerar samma parenteser och i samband med det ger han teckenreglerna för multiplikation. Han skriver:

> . . . Men om vårt exempel är ”tio minus ett skall multipliceras med tio minus ett”; då är tio multiplicerat med tio lika med hundra, den negativa ettan multiplicerad med tio är minus tio; den andra negativa ettan multiplicerad tio är också minus tio och den negativa ettan multiplicerad med den andra negativa ettan är en positiv etta; tillsamman blir detta åttioett.

I nästa avsnitt går Al Khwarizmi igenom sex olika problem och visar hur de genom komplettering och balansering kan reduceras till någon av de sex typerna av andragradsekvationer. Boken avslutas med att visa hur de abstrakta metoderna kan tillämpas inom olika delar av samhället. Denna del är i sidor räknat mer omfattande än den första mer teoretiska delen.



Figur 14.1: Kvadraten $ABCD$ har den sökta sidan x. Förläng sidorna BA och CD åt A respektive D till så att $BE = CF = 10$. Låt M vara mittpunkten på BE. Konstruera kvadraten $NFQP$ som har sidan 5. Låt R och S vara punkter på sträckorna EM respektive QP sådana att $QS = ER = x$. Då är $RSPM$ en kvadrat. Vidare är de båda skuggade rektanglarna $QSRE$ och $ADNM$ kongruenta. Rektanglarna $BEFC$ och $AEFD$ har areorna $10x$ respektive $10x - x^2 = 21$. Då är också arean av det område som består av rektanglarna $MEFN$ och $QSRE$ lika med 21. Kvadraten $RSPM$ har då arean $25 - 21 = 4$ och sidan 2. Då är $x = MB - MA = MB - MR = 5 - 2 = 3$. Vi har i resonemanget förutsatt att $x < 5$. Om vi antar att $x > 5$ kan vi göra motsvarande konstruktioner och visa att $x = 7$.

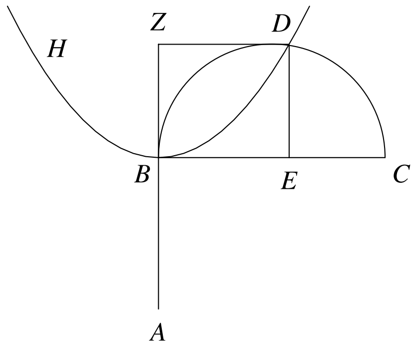
14.2.2 Omar Khayyams lösning av tredjegradsekvationen

Al Khwarizmi var en av många betydande – kanske den mest betydande – matematiker under den guldålder för islamisk vetenskap som varade under tiden 700–300 f.Kr. En annan framstående vetenskapsman var Omar Khayyam som var verksam omkring 1100 ungefär 150 år efter Al Khwarizmi. Khayyam var filosof, poet, astronom och matematiker. Förmodligen är han mest känd som poet, men han gav betydande bidrag till matematiken. I avsnitt 13.5 tog vi upp hans diskussioner kring det femte postulatet i Euklides *Elementa*. I ett arbete om algebra *Maqalah fi al-jabr w'al-muqabalah* ("Om bevis för problem inom komplettering och balansering") visar han bl.a. hur man kan lösa tredjegradsekvationer geometriskt med hjälp av kägelsnitt. Han visar att han, som många av den tidens arabiska vetenskapsmän, har stor kännedom om antikens klassiska verk, i det här fallet Apollonius *Konica*.

Khayyam klassificerar tredjegradsekvationerna på samma sätt, som Al Khwarizmi klassificerar andragradsekvationer, men antalet fall blir betydligt större. Vi skall undersöka det första fallet, som Khayyam formulerar "en kub och sidorna är lika med ett tal" eller med våra beteckningar $x^3 + px = q$ där p och q är positiva tal. Vi gör först en mycket fri översättning av en engelsk översättning av Khayyams text[1] och ger sedan en förklaring med hjälp av moderna beteckningar. För dagens matematikintresserade kan texten vara svår att ta sig igenom. Meningen är att visa hur räkning med algebraiska symboler gör resonemangen lättare att följa.

> "Låt sträckan AB i figur 14.2 vara sidan i en kvadrat som är lika med det givna antalet rötter (sidor). Konstruera ett rätblock med kvadraten som basyta och vars volym är lika med det givna talet. Sträckan BC är vinkelrät mot AB och är lika med rätblockets höjd. Förläng AB åt B till en punkt Z. Konstruera en parabel med vertex i B, med axeln BZ och parametern AB. Kägelsnittet HBD är nu entydigt bestämt och BC är en tangent. Konstruera en halvcirkel med BC som diameter. Den skär kägelsnittet i punkten D och vi antar att DZ är vinkelrätt mot AZ. Låt E vara en punkt på BC sådan att DE är vinkelrät mot BC. Sträckan

[1]Den engelska översättningen är hämtad från *Mathematics learning through history* av **M. S. T. Ziaun Nahar**. Arbetet finns tillgängligt på Internet.



Figur 14.2: Figur till Omar Khayyams geometriska lösning av tredjegradsekvationen.

> DZ är ordinata till kägelsnittet. Dess kvadrat är då lika med produkten av parametern AB och abskissan BZ. Der betyder att AB förhåller sig till DZ som DZ till BZ. Eftersom $DZ = BE$ och $BZ = DE$ så förhåller sig AB till BE som BE till DE. Men kordasatsen ger att BE förhåller sig till ED som ED till EC. De fyra sträckorna AB, BE, ED och EC är i geometrisk progression vilket innebär att kvadraten på den första sträckan, parametern AB, förhåller sig till kvadraten på den andra sträckan BE, som den tredje sträckan förhåller sig till den fjärde sträckan EC.[2] Alltså är rätblocket med kvadraten med sidan AB som bas och sträckan EC som höjd lika med kuben med sidan BE. Addera nu rätblocket, vars bas är kvadraten med sidan AB och höjd är EB till båda. Kuben med sidan BE plus detta rätblock är då lika med rätblocket med kvadraten AB som bas och höjden BE plus EC d.v.s. BC. Det sista rätblocket är det givna talet. Men kvadraten AB är det givna antalet rötter. Alltså är kuben med sidan BE plus antalet rötter multiplicerat med BE lika med det kända talet.
>
> Lösningen är alltså sträckan BE.”

Vi visar nu med modernare metoder att Khayyams svårgenomträngliga resonemang ger korrekt resultat. Med våra beteckningar kan ekvationen skrivas $x^3 + px = q$ där både p och q är positiva konstanter. Sträckan AB är sidan i en kvadrat med arean p och alltså är $AB = \sqrt{p}$. Sträckan BC är lika med höjden i det rätblock som har basytan p och volymen q. Alltså är $BC = q/p$. Vi inför ett koordinatsystem med origo i punkten B med de räta linjerna BC och AZ som x-axel respektive y-axel. Då har halvcirkeln med diametern BC ekvationen

$$\left(x - \frac{q}{2p}\right)^2 + y^2 = \frac{q^2}{4p^2}, \quad y \geq 0$$

eller

$$x^2 - \frac{q}{p}x + y^2 = 0, \quad y \geq 0.$$

Parabeln har parametern $AB = \sqrt{p}$ och det innebär att ekvationen är

$$y\sqrt{p} = x^2.$$

Om vi kombinerar ekvationerna får vi att

[2] Att AB, BE, ED och EC är i geometrisk progression innebär att $AB/BE = BE/ED = ED/EC$. Då är $AB^2/BE^2 = BE^2/ED^2 = BE^2/(BE \cdot EC) = BE/EC$ eftersom $BE/ED = ED/EC$ medför att $ED^2 = BE \cdot EC$.

$$x^2 - \frac{q}{p}x + \frac{1}{p}x^4 = 0.$$

Vi söker skärningspunkten E där $x > 0$. Om vi dividerar varje term med x så kan får vi efter enkla omskrivningar att

$$x^3 + px = q.$$

Punkten E:s abskissa $x = EB$ är alltså lösning till vår ekvation.

Omar Khayyam själv såg det som brist att han inte kunde ge en aritmetisk lösning utan bara en geometrisk. Men hans prestation är imponerande. Hans lösningar visar prov på uppfinningsrikedom, på förmåga att bemästra komplicerade resonemang och djupa kunskap om den klassiska geometrin inte minst Apollonius arbeten. Han utvecklar de tankar som finns i Al Khwarizmis arbeten. Det är också värt att lägga märke till att Khayyam inte resonerar genom konkreta exempel utan i allmänna termer. Han talar om ”antalet rötter” och ”det givna talet” utan att ha ett konkret exempel för ögonen. Man kan se det som ett steg mot en ökad abstraktion som några hundra år senare skulle resultera i räkning med algebraiska symboler.

14.3 Italienare löser tredje- och fjärdegradsekvationer

Utvecklingen av matematiken under den vi kallat den islamiska guldåldern nådde så småningom Europa och då i första hand länderna kring Medelhavet. Fibonacci lanserade i *Liber Abaci* från 1202 de hinduarabiska siffrorna och decimalsystemet i västerlandet men det dröjde några hundra år innan de kom i mer allmänt bruk och i samband med det utgavs flera räkneläror. Vi har nämnt *Trevisoaritmetiken* från 1478 och Paciolis *Summa* från 1494. Problemfloran utvidgades och många ledde till ekvationer. Det banade väg för ett mer algebraiskt tänkande. Ett verk som i många avseenden var långt före sin tid var fransmannen Nicolas Chuquets *Triparty en la science des nombres* (”Vetenskapen om talen i tre delar”). Chuquet behandlade där inte bara grundläggande aritmetik utan också lagar för kvadratrötter, han införde någon form av potensräkning och han löste ekvationer av första, andra, tredje och fjärde graden. Arbetet skrevs på 1480-talet men trycktes först 1880 och påverkade därför knappast utvecklingen. Verket finns tillgängligt i sin helhet på Internet.

Det är studiet av tredje- och fjärdegradsekvationer som bidrog till att algebran utvecklades i Europa. Tredjegradsekvationen kommenteras i den sista upplagan *Summa* och Pacioli konstaterade att det då inte fanns någon allmän lösning till den. Han hade under en vistelse i Bologna träffat Scipio del Ferro som arbetade med problemet och som senare skulle ge den allmänna lösningen till en tredjegradsekvation utan kvadratterm. Han anförtrodde lösningen till en av sina elever. Vi har i avsnitt 6.2 beskrivit de tävlingar i matematik som ägde rum i Italien under 1500-talet. Många gånger ledde problemen till tredjegradsekvationer. Tävlingsverksamheten, som kunde ge segrarna stora prissummor, innebar att skickliga matematiker hemlighöll sina metoder. Den skickligaste var kanske Niccolo Tartaglia. Vi har tidigare beskrivit den invecklade tvist som hade del Ferro, Tartaglia, Girolamo Cardano och Lodivico Ferrari som huvudpersoner och vi skall inte upprepa den. Lösningen till den allmänna tredjegradsekvationen ingick i Cardanos stora verk *Ars Magna* som publicerades 1545.

14.3.1 Cardanos *Ars Magna*

Den fullständiga titeln på verket är *Artis magnæ sive de regulis algebraicis* (”Den stora konsten eller algebrans regler”). Det handlar alltså om algebra eller mer specifikt om ekvationslösning. Han inleder först kapitlet med orden ”Denna konst har sitt ursprung från Mahomet, araben Moses son. Leonardo av Pisa är en trovärdig källa till detta påstående.”. Med Mahomet menar Cardano Al Khwarizmi som omnämns i Fibonaccis *Liber Abaci*. Cardano har alltså klart för sig att han bygger vidare på en arabisk tradition som startade över sjuhundra år tidigare. Han går igenom lösningar av ekvationer av första och andra graden och använder samma typ av geometriska resonemang som Al Khwarizmi för att visa att de metoder han avvänder är korrekta. Cardano går längre än Al Khwarizmi i den meningen att han accepterar negativa tal och att andragradsekvationer därmed i regel har två lösningar. Det är emellertid lösningen av tredjegradsekvationen som har gjort *Ars Magna* till ett banbrytande verk. Idéerna är inte Cardanos egna och han är noga med att ange del Ferro och Tartaglia som upphovsmän.

Boken finns i en engelsk översättning från 1968 av **T. Richard Witmer** och den finns i sin helhet på Internet. Witmer har använt sig av modern notation så att dagens läsare lättare skall förstå Cardanos resonemang. För att ge en inblick i Cardanos beteckningssystem illustrerar vi det därför med några exempel. Därefter skisserar vi med moderna beteckningar lösningen av tredjegradsekvationen i det fall då ekvationen saknar kvadratterm. Vi gör också några korta kommentarer till lösningen av fjärdegradsekvationen. Vi avslutar med ett avsnitt där Cardano diskuterar möjligheten att räkna med de tal som vi idag kallar komplexa.

Cardanos beteckningssystem De symboler Cardano använder i *Ars Magna* är förkortningar och de har en tendens att bli kortare och kortare ju längre fram i texten man kommer. Beteckningssystemet är inte konsekvent men detta erbjuder knappast några tolkningsvårigheter. Han använder t.ex. ”p” för plus, ”m” för minus, ”qd” för kvadrat och ”cu” för kub. För den storhet som skall bestämmas använder han ”pos” som är en förkortning av ”positio”, det ”ting” som söks. Bokstaven R står för rot. Uttrycken

”3qdqd. p: 5cub. p: 6qd. m: 10 pos. æqualia 50” och ”R v: cu. R 108 m: 10”

betyder alltså

$$3x^4 + 5x^3 + 6x^2 - 10x = 50 \quad \text{respektive} \quad \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}.$$

Beteckningen ”qdqd” betyder att man tar kvadraten på kvadraten och bildar en fjärdepotens. Bokstaven ”v” i ”R.v: cu. ...” innebär att tredjeroten omfattar hela det återstående uttrycket. Parenteser började användas i större omfattning först på 1700-talet. Bokstaven ”v” kommer från latinets universalis där första bokstaven ”u” ofta liknade ett ”v”.

Om kuben och tinget lika med talet Det är i kapitel XI som Cardano på allvar tar sig an tredjegradsekvationer. Stora delar av de tio första kapitlen kan ses som förberedelser där han bland annat började använda negativa tal. Rubriken på kapitel XI är ”Om kuben och tinget lika med talet” och han löser ekvationer av typen $x^3 + px = q$ där p och q är positiva. Han inleder kapitlet på följande sätt:

> ”Scipio Ferro från Bologna upptäckte denna regel för nästan trettio år sedan och vidarebefordrade den till Antonio Maria Fior från Venedig, som vid en tävling med Niccolò

> Tartaglia gav Niccolò tillfälle att upptäcka den. Han [Tartaglia] gav den till mig som svar på mina enträgna böner dock utan att ge beviset. Med hjälp av denna upplysning har jag på olika sätt sökt efter bevis. Det var svårt. Min version är som följer.”

Cardanos bevis är geometriskt och för dagens läsare rätt svårläst bl.a. för att resonemangen sker i tre dimensioner och figurerna förmedlar knappast det. Vi väljer att ge en framställning av Cardanos härledning med moderna beteckningar.

Cardano illustrerar sitt resonemang med exemplet $x^3 + 6x = 20$. Han börjar med att bestämma två kuber med sidorna s respektive t sådana att skillnaden mellan deras volymer är lika med högerledet 20 och produkten av sidorna är 2 som är lika med en tredjedel av koefficienten för x. Han söker alltså s och t sådana att

$$s^3 - t^3 = 20 \quad \text{och} \quad st = 2.$$

Han konstaterar att kuben med sidan $s - t$ har volymen

$$(s-t)^3 = s^3 - 3s^2t + 3st^2 - t^3$$

och använder kubregeln som han tidigare visat. Han visar att $3s^2t - 3st^2 = 3st(s-t) = 6(s-t)$ och eftersom $s^3 - t^3 = 20$ kan han sluta sig till att

$$(s-t)^3 = 20 - 6(s-t) \quad \text{d.v.s.} \quad (s-t)^3 + 6(s-t) = 20.$$

Alltså är $s - t$ lösning till ekvationen $x^3 + 6x = 20$.

För att bestämma s och t multiplicerar vi båda leden i $s^3 - t^3 = 20$ med s^3 och eftersom $s^3t^3 = (st)^3 = 8$ får vi

$$(s^3)^2 - 8 = 20s^3.$$

En lösning är $s^3 = 10 + \sqrt{108}$. Motsvarande värden på t uppfyller då $t^3 = -10 + \sqrt{108}$. Ekvationen har alltså roten

$$x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} - \sqrt[3]{-10 + \sqrt{108}}.$$

Cardano formulerade nu den regel som han förmodligen från början har fått av Tartaglia.

> ”Bilda kuben på 2 som är en tredjedel av 6, det ger 8; tag kvadraten på 10 som är hälften av 20; resultatet är 100. Addera 100 och 8, som ger 108, och tag kvadratroten ur detta som är $\sqrt{108}$. Detta dupliceras; Lägg till den ena 10, hälften av konstanten och subtrahera samma sak från den andra. Då får du *binomet*[3] $\sqrt{108} + 10$ och dess *apotome*[4] $\sqrt{108} - 10$. Bilda tredjerötterna av dessa tal. Subtrahera tredjeroten ur *apotome* från tredjeroten ur *binomet* vilket ger lösningen $x = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} - \sqrt[3]{-10 + \sqrt{108}}$.”

Vi är vana vid att en tredjegradsekvation har tre rötter. Cardano har bara bestämt den reella roten. De två övriga är komplexa.

Fjärdegradsekvationen Lodovico Ferrari, som var elev till Cardano, lyckades lösa fjärdegradsekvationen och Cardano publicerade lösningen i det näst sista kapitlet i *Ars Magna*. Han är också här noga med att ange upphovsmannen. Lösningen är komplicerad och idén är att genom transformationer reducera problemet till en tredjegradsekvation.

[3] Ett binom är ett uttryck med två termer

[4] Om en sträcka delas i två delar så att kvoten är irrationell kallade Euklides en av delarna för apotome till den andra.

Cardano om komplexa tal I kapitel XXXVII diskuterar Cardano negativa lösningar till ekvationer och i ett problem går han längre. Han skriver:

> ”Om någon skulle säga, dela 10 i två delar så att produkten är 40 så är det naturligtvis omöjligt. Trots det kan vi arbeta på följande sätt: Vi delar 10 i två lika stora delar där varje del är 5. Vi kvadrerar och får 25. Vi subtraherar 40 om du så önskar från 25, enligt de regler jag tidigare bevisat, och får -15 och roten ur detta tal adderas till och subtraheras från 5 och vi får de delar vars produkt är 40. Delarna är $5 + \sqrt{-15}$ och $5 - \sqrt{-15}$.”

Cardano genomför sedan ett geometriskt resonemang och avslutar med en kontroll.

> ”Om vi trots den mentala tortyr detta innebär, multiplicerar vi $5 + \sqrt{-15}$ och $5 - \sqrt{-15}$ ger det $25 - (-15) = 40$. Alltså är produkten lika med 40.
> ...
> Så utvecklas aritmetiska subtiliteter som till slut kan sägas vara lika raffinerade som oanvändbara.”

Cardano använder sin formelapparat utan att de tal han räknar med har någon geometrisk betydelse. Han finner dem oanvändbara. Hans ansats är emellertid fruktbar. Han föregriper de komplexa talen, som några hundra år senare skulle visa sig vara i hög grad användbara. En av hans samtida som insåg det praktiska med att använda denna typ av tal var Rafael Bombelli.

14.3.2 Bombellis *L'Algebra*

I avsnitt 6.2 har vi beskrivit hur Rafael Bombelli, som var ingenjör och som medverkade i flera större projekt, kom att intressera sig för matematik. Han var från Bologna i norra Italien där del Ferro, Tartaglia, Cardano och Ferrari verkat. Han studerade Cardanos *Ars Magna* och så småningom kom han också i kontakt med Diofantos *Arithmetica*. Han beslöt att göra en sammanhängande framställning av algebran och den skulle inte bara som *Ars Magna* vara tillgänglig för en vetenskaplig elit. Han förberedde sig genom att intervjua flera av dem som varit med om att utveckla metoderna för ekvationslösning. Verket *L'Algebra* planerades omfatta fem band. De tre första gavs ut 1572 samma år som Bombelli avled 40 år gammal. Manuskript till de två återstående banden återfanns 1923 i biblioteket i Bologna.

L'Algebra är alltså en genomtänkt och sammanhängande framställning av den algebra som skapats av italienska matematiker. Den innehåller också flera problem från Diofantos *Arithmetica*. Bombelli inför tidigt negativa tal och han skriver upp teckenreglerna för multiplikation. Han utvecklar också ett beteckningssystem som är mer genomtänkt än det som t.ex. Cardano använde sig av. Han inför beteckningen $\smile$ för den obekanta och ekvationen $x^3 = 15x + 4$ skriver han på följande sätt

$$1 \overset{3}{\smile} \quad \text{Equalea} \quad 15 \overset{1}{\smile} \text{p.4.}$$

Detta liknar mer vårt sätt att skriva ekvationer än det Cardano använde.

Det epokgörande med Bombellis *L'Algebra* är emellertid att han inför och räknar med komplexa tal och visar hur man därigenom kan få en mer enhetlig framställning av lösningarna till ekvationer av andra, tredje och fjärde graden.

Bombelli kallar de tal vi betecknar i och $-$i för ”più di meno” och ”meno di meno” och skriver upp nedanstående räkneregler. Bombellis egna formuleringar står till vänster och motsvarigheterna i vårt beteckningssystem till höger.[5]

[5] Tabellen och de efterföljande exemplen är hämtade från artikeln *Rafael Bombelli's Algebra (1572) and a new mathematical "object": A Semiotic Analysis* av **Giorgio T. Bagni**. Artikeln finns på Internet.

Più via più di meno, fa più di meno	$1 \cdot i = i$
Meno via più di meno, fa meno di meno	$(-1) \cdot i = -i$
Più via meno di meno, fa meno di meno	$1 \cdot (-i) = -i$
Meno via meno di meno, fa più di meno	$(-1) \cdot (-i) = i$
Più di meno via più di meno, fa meno	$i \cdot i = -1$
Più di meno via più meno di meno, fa più	$i \cdot (-i) = 1$
Meno di meno via più di meno, fa più	$(-i) \cdot i = 1$
Meno di meno via meno di meno, fa meno	$(-i) \cdot (-i) = -1$

Nu bildar Bombelli komplexa tal och visar hur man kan addera och multiplicera dem. Han visar sedan att man kan använda den formel för lösningen av tredjegradsekvationen som Cardano härlett även om koefficienterna är negativa och illustrerar det med att lösa ekvationen $x^3 = 15x+4$ eller $x^3 - 15x = 4$. Låt oss se vad som händer om vi använder Cardano-Targtaglias formel.

> ”Bilda kuben på -5 som är en tredjedel av koefficienten för x. Vi får -125. Tag kvadraten på 2 som är hälften 4. Vi får 4. Addera -125 och 4. Vi får -121. Tag kvadratroten ur det $\sqrt{-121} = 11i$. Lägg till och drag ifrån 2, som är hälften av den konstanta termen. Tag kubikroten ur dessa båda tal och bilda skillnaden som är
>
> $$\sqrt[3]{11i + 2} - \sqrt[3]{11i - 2}$$
>
> som alltså skall vara lösningen.”

Nu är det lätt att se att en lösning till ekvationen är $x = 4$ som vid första anblicken inte alls påminner om den lösning som formeln ger. Men Bombelli kan visa genom att använda sina regler för multiplikation att

$$(i + 2)^3 = 11i + 2 \quad \text{och} \quad (i - 2)^3 = 11i - 2.$$

Vi kan nu skriva om den lösningen som formeln gett på följande sätt:

$$x = \sqrt[3]{(i + 2)^3} - \sqrt[3]{(i - 2)^3} = i + 2 - (i - 2) = 4.$$

Bombelli accepterade de komplexa talen och visade hur man kunde räkna med dem. De blir verktyg med vars hjälp man kan skapa större enhetlighet. Istället för att arbeta med flera olika fall som vart och ett krävde sin speciella lösning kunde man använda en gemensam formel. Framställningen blir enklare och mer överskådlig. Matematikhistorikern **J. W. Crossley** skriver i *The emergence of numbers* (1980):

> ”Thus we have an engineer, Bombelli, making practical use of complex numbers perhaps because they gave him useful results, while Cardano found the square roots of negative numbers useless.”

Det har diskuterats i vad mån Bombellis *Algebra* påverkade matematikens utveckling. Några har hävdat att verket fick mycket liten spridning och därför inte hade så stor betydelse. Den har emellertid påverkat matematiker som haft utomordentligt stor betydelse för matematiken. En av differential- och integralkalkylens upphovsmän, Gottfried Wilhelm von Leibniz, säger om Bombelli att han var ”en enastående mästare i den analytiska konsten”.

14.4 Den symboliska algebran får sitt genombrott

Den algebra som utvecklats av Al Khwarizmi, Omar Khayyam, del Ferro, Tartaglia, Cardano och Ferrari var retorisk. Ekvationerna hade uttryckts med ord. Ibland införde man förkortningar men man räknade inte med dem. Bombelli hade bl.a. genom införandet av komplexa tal börjat räkna med symboler men det var i begränsad omfattning. Den symboliska algebra, som idag är en grundpelare i matematikutbildningen på gymnasienivå, har sina rötter i två viktiga verk: Francois Viètes *In artem analyticam isagoge* (”Inledning till den analytiska konsten”) från 1591 och René Descartes *La Géométrie* från 1637. Viète var till yrket jurist och hög ämbetsman och Descartes var en av den tidens stora filosofer vars tankar än idag har inflytande på den intellektuella debatten. Den förändring i synsättet, som de båda verken innebar, kan beskrivas med Viètes egna ord i inledningen till *In artem analyticam isagoge*: ”Numerisk räkning hanterar tal; symbolisk räkning använder symboler d.v.s. alfabetets bokstäver.”.

I detta sammanhang bör nämnas engelsmannen Thomas Harriot som var samtida med Viète. Han publicerade inte några matematiska skrifter under sin livstid men ett efterlämnat manuskript *Artis Analyticae Praxis ad Aequationes Algebraicas Resolvendas* (”Tillämpning av den analytiska konsten för att lösa algebraiska ekvationer”) publicerades 1631 tio år efter hans död. Av det framgår att han hade liknande tankar som Viète. Det är oklart om Harriot kände till Viètes verk eller vice versa. Kanske var tiden helt enkelt mogen för en ny symbolisk algebra och det kan förklara varför flera framstående matematiker tänkte i samma banor.

Om Viètes och Descartes arbeten innebär genombrott för den symboliska algebran så betecknar Leonhard Eulers *Algebra* som kom ut 1770 krönet av en utveckling. Metoder och beteckningar har finslipats och Euler ger en sammanhängande framställning av den elementära algebran som får en fast grund. En av de största matematiker genom tiderna skriver en lärobok som vänder sig både till nybörjaren och specialisten.

14.4.1 Viètes *In artem analyticam isagoge*

I biografin över Viète i avsnitt 6.4 beskrivs i stora drag innehållet i *In artem analyticam isagoge*. Vi skall här ge några exempel på Viètes framställning och vi utnyttjar en engelsk översättning av T. Richard Witmer från 1968. Den engelska titeln är *The Analytic Art*. Witmer har moderniserat Viètes framställning för att tankegångarna skall vara lättare att följa för dagens läsare. Han använder exponenter vilket inte Viète gör och han använder siffror för att beteckna potenser. Viète använde kombinationer av latinska namn eller förkortningar som *quad* och *cub*. Det som Witmer skriver som A^4 skriver Viète *Aquadrato-quadratum* eller kortare *Aquad-quad* eller ibland t.o.m. *Aqq*. Förmodligen hade Viète inte kommit i kontakt med Bombellis *L'Algebra*.

Ett framträdande drag i Viètes framställning är betydelsen av en storhets dimension. Storheter kan ha dimensionen ”längd” eller ”bredd”, ”plan” och ”volym”. Han använder genomgående stora bokstäver för att beteckna olika storheter. Om en storhet är plan skriver han ett *p* efter bokstaven, om den har volymdimension så skriver han ett *s* som i ”solide” efter bokstaven. Så betecknar t.ex. *Ap* en plan storhet och *Bs* en rumslig storhet. För att öka läsbarheten skriver Witmer A^p respektive B^s och vi kommer i fortsättningen att använda oss av det beteckningssystemet.

I inledningen ger Viète följande tabell:

En bredd gånger en längd ger plan
Ett bredd gånger en plan ger volym
En bredd gånger en volym ger plano-plan
En bredd gånger ett plano-plan ger plano-volym
En bredd gånger en plano-volym ger volym-volym
o.s.v.
Ett plan gånger ett plan ger plano-plan
Ett plan gånger en volym ger plano-volym
Ett plan gånger en plano-volym ger volym-volym
o.s.v.
En volym gånger en volym ger volym-volym
En volym gånger ett plano-plan ger plano-plano-volym
o.s.v.

Viète laborerar alltså med storheter som har fler än tre dimensioner och han ger de olika dimensionerna namn. Han tillåter inte att man adderar eller subtraherar storheter med olika dimension. I samband med dimensionsresonemangen skriver Viète upp motsvarigheterna till våra potenslagar.

Det är alltså nödvändigt att hela tiden hålla reda på en storhets dimension och det kan göra texten tungläst. Men det är också lätt att känna igen sig. Han visar t.ex. utvecklingarna av $(A + B)^n$ för $n = 2, 3, 4, 5$ och 6 och han härleder konjugatregeln.

Vi ger nu ett exempel där Viète använder flera räkneregler. Det är hämtat från kapitel 13 där han härleder samband mellan kubiska storheter från samband mellan kvadratiska.

Om

$$A^2 + BA = Z^p$$

så gäller

$$A(B^2 + Z^p) - A^3 = BZ^p.$$

(Anm.: Z^p betyder att Z är en plan storhet. A och B är längder.) Om alla termer i

$$A^2 + BA = Z^p$$

multipliceras med A är

$$A^3 + BA^2 = Z^p A.$$

Men det var givet att

$$A^2 = Z^p - BA.$$

Med hjälp av detta kan vi uttrycka volymen BA^2 i den kubiska ekvationen,

$$A^3 + BZ^p - B^2 A = Z^p A$$

som efter lämplig omskrivning är

$$A(B^2 + Z^p) - A^3 = BZ^p.$$

Man kan fråga sig varför Viète gör denna omskrivning och t.o.m. upphöjer den till en sats. Det är förmodligen en förberedelse till senare studier av ekvationer. Han visar att av satsen följer att lösningar till andragradsekvationen $x^2 + 8x = 20$ också är lösningar till en tredjegradsekvation $84x - x^3 = 160$ utan kvadratterm.

Exemplet visar hur Viète kunde räkna med symbolerna enligt vissa lagar utan att behöva föra geometriska resonemang. Symbolerna lever sitt eget liv, räkningarna kan göras mekaniskt och tankearbetet underlättas.

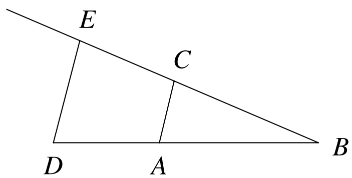
14.4.2 Descartes *La Géométrie*

Ett av de viktigaste verken i matematikens historia är Réné Descartes *La Géométrie*. Det gavs ut 1637 som ett appendix till hans stora filosofiska verk *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (”Avhandling om metoden att rätt vägleda sitt förstånd och söka sanningen i vetenskapen”), som ofta för enkelhets skull kallas *Discours de la méthode*. *La Géométrie*, som är skriven på franska, omfattar ungefär 100 sidor och finns på nätet både i en moderniserad version från 1886 och i en ursprungsversion med en engelsk översättning, *The Geometry*, från 1925. Verket lägger grunden till det som ofta kallas *analytisk geometri* – ett område som knyter samman algebra och geometri. Geometriska objekt som räta linjer och kurvor kan beskrivas algebraiskt och algebraiska samband kan ges en geometrisk tolkning. Den analytiska geometrin är en förutsättning för differential- och integralkalkylen som skulle få sitt genombrott mot slutet av 1600-talet.

Det första intrycket när man studerar *La Géométrie* är att man känner igen sig. Beteckningar och skrivsätt är mycket likt våra egna även om han t.ex. inte använder vårt likhetstecken utan $\propto$. Grundläggande begrepp inom analytisk geometri är koordinatsystem och koordinater. Det är med hjälp av dem vi beskriver punkters läge. Letar man i Descartes verk efter motsvarigheter till ”koordinatsystem” eller ”koordinat” letar man förgäves. Det närmaste man kommer är när Descartes löser ett problem av Pappos genom att införa avstånd till linjer som en form av variabler. Koordinatsystemet infördes senare av samtida uttolkare av Descartes arbete.

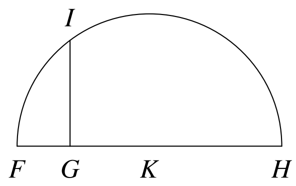
La Géométrie består av tre delar. Den första handlar om konstruktioner med passare och linjal. Descartes undersöker sambandet mellan geometriska konstruktioner och algebraiska operationer. I den andra delen studerar han kurvor och där ingår bl.a. lösningen av Pappos problem. Den tredje delen ägnar Descartes åt högregradsekvationer.

Konstruktioner med passare och linjal Descartes börjar med att visa hur olika algebraiska uttryck kan konstrueras med passare och linjal. Om a och b betecknar positiva tal där $a > b$ så beskriver han hur man konstruerar $a+b$, $a-b$, $a \cdot b$ och a/b. Han förtydligar med en figur i fallet $a \cdot b$ som vi återger i figur 14.3 tillsammans med en fri översättning av Descartes text. Han visar också hur man konstruerar $\sqrt{a}$ där a är positivt samt rötterna till andragradsekvationen $z^2 = az + b^2$. I figur 14.4 respektive figur 14.5 återger vi Descartes resonemang. Descartes visar inte sina påståenden utan antar att läsaren är bekant med grundläggande geometri. Det kan vara en trevlig övning för läsaren att utföra bevisen.

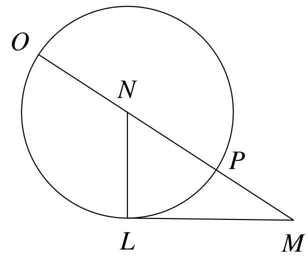


Figur 14.3: Antag t.ex. att AB är enhetssträckan. För att multiplicera BD med BC sammanbinder vi punkterna A och C, drar sedan en rät linje genom D parallell med AC. Den skär den räta linjen genom B och C i E. Då är BE den sökta produkten.

Dessa exempel får illustrera innehållet i första kapitlet, som är på fjorton sidor och som också innehåller mer komplicerade exempel och längre resonerande avsnitt. Ett av exempel är hämtat från Pappos. Han förbereder lösningen av problemet som han löser i nästa kapitel.



Figur 14.4: Antag att vi vill bestämma kvadratroten ur sträckan GH. Förläng sträckan GH till F så att FG är en enhetssträcka. Dela FH mitt itu genom punkten K. Konstruera en cirkel med medelpunkt i K och med diametern FH. En rät linje genom G vinkelrät mot diametern HF skär cirkeln i punkten I. Då är GI den sökta roten.



Figur 14.5: Konstruera en rätvinklig triangel NLM där sidan LM är lika med b, kvadratroten ur den kända termen, och där LN är lika med $a/2$, hälften av det tal som multipliceras med den okända z. Förläng MN till O så att $NO = NL$. Då är hela OM lika med det sökta talet z som kan skrivas $z = a/2 + \sqrt{a^2/4 + b^2}$. Om vi låter P vara den punkt på MN för vilken $NP = NL$ så är MP också lösning till $z^2 = -az + b^2$.

Kurvor I det andra kapitlet studerar Descartes kurvor i allmänhet. De kan ha genererats med hjälp av olika tekniska hjälpmedel. Det handlar mycket om kägelsnitt och han beskriver bl.a. den mekaniska anordning som genererar en ellips. Ändpunkterna av ett snöre, vars längd är lika med ellipsens storaxel, fästs med hjälp av t.ex. häftstift i ellipsens brännpunkter. Med hjälp av penna håller man snöret sträckt och då man för runt pennan uppkommer en ellips. Man utnyttjar att en ellips består av de punkter där summan avstånden till brännpunkterna är konstant lika med ellipsens storaxel.

Det som dominerar framställningen är emellertid Descartes försök att lösa ett problem från 300-talet som ställdes av Pappos och som Descartes formulerat och förberett redan i kapitel 1:

> Fyra räta linjer är givna. Bestäm de punkter P för vilka produkten av avstånden till två av linjerna är lika med produkten av avstånden till de två övriga. Problemet kan varieras så att avstånden till linjerna inte nödvändigtvis måste mätas vinkelrätt mot de givna linjerna utan kan mätas längs linjer som bildar en given vinkel med dem.

Det är i arbetet med Pappos problem som man kan se de idéer som senare gav upphov till koordinatsystem. Descartes inför beteckningar för två variabla avstånd i den relativt komplicerade figur som uppkommer med de fyra givna linjerna och de fyra linjer längs vilka avstånden mäts. Han härleder ett samband mellan de båda variablerna d.v.s. han bestämmer ekvationen för den kurva som punkten P beskriver. Räkningarna är relativt omfattande och ibland svåra att följa. Resultatet är emellertid att sambandet mellan punkten P:s ”koordinater” är av andra graden och Descartes visar med hjälp av satser av Apollonius att det då måste röra sig om ett kägelsnitt.

Högregradsekvationer Det tredje kapitlet, vars rubrik är ”De la construction des problèmes solides ou plus de solides” (”Om konstruktioner vid problem om volymer eller mer än volymer”), ägnas huvudsakligen åt ekvationer av grad tre eller högre.

Descartes ägnar början av kapitlet åt det vi kallar faktorteoremet. Han konstruerar en ekvation med rötterna 2, 3, 4 och -5 genom att beräkna produkten av $(x-2)$, $(x-3)$, $(x-4)$ och $(x+5)$. Han får

$$(x-2)(x-3)(x-4)(x+5) = x^4 - 4x^3 - 19x^2 + 106x - 120.$$

Han ändrar på tecknen på x^3- och x-termerna och antar på goda grunder att $x = -3$ är en lösning till

$$x^4 + 4x^3 - 19x^2 - 106x - 120 = 0$$

och experimenterar med att sätta $x = y - 3$. Han skriver om ekvationen till

$$y^4 - 8y^3 - y^2 + 8y = 0.$$

Det är uppenbart att en rot är $y = 0$ och det betyder att $x = -3$ är en lösning till den ursprungliga ekvationen. Om vi dividerar alla termerna med y så får vi en tredjegradsekvation

$$y^3 - 8y^2 - y + 8 = 0.$$

Denna ekvation har två positiva rötter $y = 1$ och $y = 8$ och en negativ $y = -1$. De motsvarar $x = -2$, $x = 5$ respektive $x = -4$. Det skall anmärkas att Descartes genomgående kallar negativa rötter för falska. De har för honom ingen geometrisk motsvarighet.

Descartes visar också hur man med hjälp av lämpliga substitutioner kan omvandla tredje- och fjärdegradsekvationer till ekvationer utan kvadrat- respektive kubiktermer. Han ger en metod för division av ett polynom med ett binom och han gör kommentarer till Cardanos formler för lösningarna till tredjegradsekvationer.

La Géométrie är förmodligen ett av de viktigaste arbetena i matematikens historia. Genom räkningar med symboler, som kan göras relativt mekaniskt, kan man formulera och bevisa generella samband. Algebran har genom Descartes arbete blivit ett effektivt verktyg inte bara för att lösa problem utan för att utveckla matematiken som ämne. Den symboliska algebran är en förutsättning för differential- och integralkalkylen som kom att revolutionera inte bara matematiken utan också fysiken.

Även om den matematiska formalismen i *La Géométrie* känns välbekant så är det en hel del som skiljer den från dagens. Descartes skriver t.ex. inte x^2 utan xx, han använder som vi tidigare nämnt inte likhetstecken och han nämner inte begreppet koordinater. Utvecklingen mot det matematiska språk vi har idag har skett stegvis. Matematiker har prövat olika notationer och de som fungerat bäst har överlevt. Att i detalj redogöra för detta skulle ta alltför stort utrymme. Vi hänvisar till standardverket *A History of Mathematical Notations. Volume I.* (1928) av **Florian Cajori**. Det finns tillgängligt på Internet.

14.4.3 Eulers *Algebra*

Leonard Euler var 63 år gammal då han gav ut sin lärobok *Algebra*. Han var då professor i Berlin och en stor auktoritet inom matematiken. Boken översattes till franska med ett företal av Johann Bernoulli. En engelsk översättning, *Elements of Algebra*, av **John Hewlett** kom ut 1882. Den innehåller förutom Eulers text också Bernoullis förord till den franska upplagan samt ett tillägg av Joseph Louis Lagrange. Den engelska översättningen finns tillgänglig på Internet.

Boken består av två delar. Den första delen har rubriken ”Innehållande analys av bestämda storheter” och den andra ”Innehållande analys av obestämda storheter”. Den andra delen ägnas till stor del åt diofantiska ekvationer och problem inom talteori. Den riktar sig huvudsakligen till experter. Det är i den första delen som Euler ger en systematisk genomgång av den elementära algebran och vi skall göra några nedslag i den. Det är emellertid angeläget att påpeka att texten är jämförelsevis lättläst och författaren till dessa rader ser stora likheter mellan Eulers uppläggning och den presentation som författaren själv ställdes inför under sin skoltid.

I första kapitlet gör Euler en form av programförklaring. Varje kapitel är indelat i artiklar och så här lyder de båda första artiklarna i första kapitlet:

> ”1. Allt som kan ökas eller minskas kallas en storhet eller kvantitet.
>
> En summa pengar är därför en kvantitet, eftersom man kan öka den eller minska den. Detsamma gäller en vikt eller andra ting av samma natur.
>
> 2. Från denna definition är det uppenbart att det finns så många olika typer av storheter att det är svårt att räkna upp alla: och detta är ursprunget till olika grenar av matematiken, där var och en behandlar en särskild typ av storhet. Matematik i allmänhet är *vetenskapen om kvantitet*; eller vetenskapen som undersöker medlen för att mäta kvantiteter.”

Han fortsätter med att påpeka att det är nödvändigt att kunna jämföra olika kvantiteter av samma slag och att det är nödvändigt att ha någon form av enhet. I artikel 5 skriver han:

> ”5. Från detta följer det att alla storheter kan uttryckas med hjälp av tal; och grunden till alla matematiska vetenskaper måste vila på ett fullständigt studium av vetenskapen om tal och med en noggrann undersökning av olika möjliga beräkningsmetoder.
>
> Denna fundamentala del av matematiken kallas Analys eller Algebra.
>
> 6. I Algebra betrakta vi endast tal som representerar storheter utan att ta hänsyn till vilken slags kvantitet det är frågan om. Det är föremål för andra delar av matematiken.”

Euler gör alltså här ingen skillnad mellan Analys och Algebra vilket dagens matematiker gör. Det som är anmärkningsvärt är att han knyter algebran till tal. I boken finns knappt några hänvisningar till geometri som hos Al Khwarizmi, Khayyam, Cardano, Viète och Descartes. Han använder symboler för tal och arbetar hela tiden parallellt med symboler och konkreta tal. Det är kanske mer i linje med dagens matematikundervisning.

Den första delen innehåller fyra sektioner. I den första går Euler igenom elementära matematiska begrepp och metoder. Han förklarar plus- och minustecknen, han går igenom de fyra räknesätten, räkning med bråk och räkning med kvadratrötter och tredjerötter. Han definierar potenser både då exponenten är ett positivt heltal, ett negativt heltal och ett rationellt tal. Han visar potenslagarna, definierar logaritmer genom att utgå från potenser och visar logaritmlagarna. Vi ger några prov på Eulers framställning och börjar med hans förklaring av teckenreglerna vid multiplikation.

”31. Vi har hittills bara betraktat positiva tal; och det kan inte råda någon tvekan om att produkten som uppstår är positiv; d.v.s. produkten mellan $+a$ och $+b$ måste nödvändigtvis ge $+ab$. Men vi måste var för sig undersöka vad $+a$ multiplicerat med $-b$ och $-a$ multiplicerat med $-b$ ger.

32. Låt oss börja med att multiplicera $-a$ med 3 eller +3. Eftersom $-a$ kan betraktas som en skuld så är tre gånger skulden en tre gånger så stor skuld och alltså är produkten $-3a$. Så om vi multiplicerar $-a$ med b så är produkten $-ba$ vilket är detsamma som $-ab$. Alltså kan vi dra slutsatsen att om ett positivt tal multipliceras med ett negativt så är produkten negativ. Det kan fastläggas som en regel att + gånger + ger + eller *plus* och att tvärtom + gånger − och − gånger + ger − eller *minus*.

33. Det återstår att lösa fallet då − multipliceras med − eller till exempel $-a$ med $-b$. Vid en första anblick är det klart att bara med hänsyn till bokstäverna måste produkten bli ab; men det är tveksamt om man skall placera + eller − framför; allt vi vet att det måste vara ett av dessa båda tecken. Nu påstår jag att det inte kan vara − för $-a$ gånger b ger $-ab$ och $-a$ gånger $-b$ kan inte ge samma sak. Det måste ge det motsatta resultatet d.v.s. $+ab$; alltså har vi följande regel: − gånger − ger + d.v.s. samma sak som + gånger +.”

I artikel 196 introducerar Euler potenser med brutna exponenter på följande sätt:

”196. Alltså är kvadratroten ur a^2 lika med a^1 eller a; kvadratroten ur a^4 lika med a^2; kvadratroten ur a^6 lika med a^3 och så vidare; och eftersom detta är generellt måste kvadratroten ur a^3 vara $a^{3/2}$ och följaktligen har vi på samma sätt att $a^{1/2}$ är lika med $\sqrt{a}$ och detta nya sätt att representera kvadratroten kräver speciell uppmärksamhet.”

I kapitlet om aritmetik beskrev vi hur Napier och Briggs införde logaritmer. Det var en relativt komplicerad procedur. Nu 150 år senare kan man ge en enklare definition och den beskrivs av Euler i artikel 220:

”220. Vi återgår till ekvationen $a^b = c$ och börjar med att anmärka att vi antar, när vi talar om logaritmer, att talet a är godtyckligt valt och att det inte ändras. När detta är sagt väljer vi b så att a^b är lika med ett givet tal c; då kallas exponenten b för *logaritmen* för det givna talet c. För att uttrycka detta skall vi använda bokstaven **L.** eller de inledande bokstäverna log. Alltså med $b = \mathbf{L}.c$ eller $b = \log c$ menar vi att b är lika med logaritmen för talet c eller att logaritmen för c är lika med b.”

Den andra sektionen behandlar uttryck med fler än en term. Euler visar hur man multiplicerar samman parenteser och hur man dividerar polynom. Han visar kvadreringsregeln och binomialteoremet i dess allmänna form. I den tredje sektionen behandlar Euler bl.a. aritmetiska och geometriska talföljder och summor. Han tillämpar teorin för geometriska talföljder på problem om ränta på ränta. Den fjärde sektionen handlar om ekvationslösning. Han behandlar ekvationer och ekvationssystem av första graden, han ger de allmänna lösningarna till ekvationer av andra, tredje och fjärde graden och han visar hur man använder faktorteoremet. Andragradsekvationen är idag en del av gymnasiekurserna i matematik och det kan var av intresse att studera hur Euler behandlar den.

645. ”. . . i ekvationen $x^2 = px + q$ inför vi en annan kvantitet y sådan att $x = y + p/2$; om vi har bestämt y så har vi också bestämt x.

Om vi gör substitutionen $y+p/2$ istället för x får vi $x^2 = y^2+py+p^2/4$ och $px = py+p^2/2$; följaktligen blir vår ekvation

$$y^2 + py + \frac{1}{4}p^2 = py + \frac{1}{2}p^2 + q$$

som först förenklas genom att subtrahera py till

$$y^2 + \tfrac{1}{4}p^2 = \tfrac{1}{2}p^2 + q$$

och sedan genom att subtrahera $p^2/4$ från $y^2 = p^2/4 + q$. Detta är ren kvadratisk ekvation, som omedelbart ger

$$y = \pm\sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 + q}$$

Nu eftersom $x = y + p/2$ har vi

$$x = \tfrac{1}{2}p \pm \sqrt{\tfrac{1}{4}p^2 + q}.\text{”}$$

Framställningen kunde vara hämtad från någon av dagens läroböcker för gymnasiet. Intrycket av att *Algebra* är en lärobok förstärks av de många övningar som ger läsaren möjligheter att kontrollera om hon eller han förstått innehållet. Vi ger två exempel på typer som läsaren förmodligen känner igen.

Övning till kapitel VIII sektion I som handlar om bråk:

Förenkla så långt som möjligt

$$\frac{a^4 - x^4}{a^3 - a^2x + ax^2 - x^3}.$$

Övning 14 till kapitel III sektion III som handlar om ekvationer av första graden:

En viss cistern, som kan fyllas på 12 minuter genom två kranar, fylls på 20 minuter om bara den ena är på. Hur lång tid tar det att fylla cisternen om bara den andra är på.

Eulers *Algebra* känns som lärobok förhållandevis modern. Den saknar givetvis de illustrationer som dagens läromedel är rikligt försedda med. Men den är präglad av enkelhet, klarhet och konkretion. Den kan med fördel studeras av dagens läroboksförfattare och lärare.

14.5 Komplexa tal och kvarternioner

14.5.1 De Moivres och Eulers formler

I sin *Ars Magna* från 1545 räknar Cardano med komplexa tal men han ville inte erkänna dem. Några decennier senare skulle hans landsman Bombelli i sitt stora verk *L'Algebra* ge dem en mer framträdande plats. Metoderna för ekvationslösning fick en mer enhetlig form om man accepterade de komplexa talen. I Bombellis anda använde man sig alltmer av komplexa tal som hjälpmedel för att bestämma rötter. Även om formlerna till synes innehöll komplexa tal visade det sig ofta att de efter omskrivningar i själva verket var reella. Någon mer systematisk studie av komplexa tal gjordes emellertid inte under 1600-talet.

I början av 1700-talet visade den franskfödde engelske matematikern Abraham de Moivre ett samband som skulle innebära en ny syn på de komplexa talen. Han visade att

$$(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)^n = \cos nx + \sqrt{-1}\sin nx$$

och det sambandet kallas idag *de Moivres formel*. I sin berömda *Introductio in analysin infinitorum* som kom ut 1748 ägnar Euler hela kapitel 9 åt att utveckla dessa samband och han visar bl.a. de formler,

$$\cos x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} + e^{-\sqrt{-1}x}}{2} \quad \text{och} \quad \sin x = \frac{e^{\sqrt{-1}x} - e^{-\sqrt{-1}x}}{2},$$

som idag kallas *Eulers formler*. Han härleder dem helt enkelt genom att ersätta x med $x\sqrt{-1}$ respektive $-x\sqrt{-1}$ i potensserieutvecklingen av e^x. I en artikel på 1770-talet införde han beteckningen i för $\sqrt{-1}$ – den beteckning som idag är standard.

14.5.2 Geometrisk representation av komplexa tal

Under 1700-talet blir det inte minst på grund av Eulers arbeten alltmer accepterat att räkna med komplexa tal. Det dröjde emellertid till slutet av seklet innan de kom att få en geometrisk representation. Den som först presenterade en geometrisk tolkning av komplexa tal var den danske lantmätaren Caspar Wessel i avhandlingen *Om directionens analytiske betegning* som publicerades 1799 av *Videnskabernas selskab*. Artikeln är skriven på danska och hade därför liten påverkan på matematiska kretsar i Europa. Fjorton år senare publicerade Jean-Robert Argand oberoende av Wessel samma metod i artikeln *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* ("En essä om en metod att representera imaginära storheter geometriskt") i den franska tidskriften *Annales de Mathématiques*. Argand var en amatörmatematiker som drev en bokhandel i Paris. Hans avhandling finns publicerad på nätet liksom en engelsk version av Wessels arbete "On the Analytical representation of Directions" i översättning av **Flemming Damhus**.

Som framgår av artiklarnas titlar närmar sig Wessel och Argand problemet från olika utgångspunkter. Wessel söker algebraiska verktyg för att beskriva riktningar och riktningsförändringar. Argand utgår från de komplexa talen och söker en geometrisk representation där addition och multiplikation får rimliga tolkningar. Båda inför riktade sträckor som de adderar på samma sätt som vi nu adderar vektorer i planet. För båda spelar en form av en generalisering av de Moivres formel en stor roll för översättningen mellan multiplikation av komplexa tal och rotationer av riktade sträckor. De visar och använder sambandet

$$(\cos u + \mathrm{i}\sin u)(\cos v + \mathrm{i}\sin v) = \cos(u+v) + \mathrm{i}\sin(u+v)$$

och multiplikation av dessa båda komplexa tal kan tolkas som en vridning. Om den riktade sträcka som svarar mot den första faktorn vrids vinkeln v så får vi den riktade sträcka som svarar mot produkten. Argand använder beteckningen $\sqrt{-1}$ och Wessel ϵ för den imaginära enheten i.

Varken Wessels eller Argands arbeten uppmärksammades i någon högre grad. I Wessels fall utgjorde språket en begränsning men också Argands arbete gick till en början relativt spårlöst förbi. Det var först när Gauss och Cauchy på allvar började arbeta mer systematiskt med funktioner av komplexa tal som de metoder som Wessel och Argand infört fick stor betydelse. Gauss kände förmodligen varken till Wessels eller Argands arbeten utan utvecklade samma metoder oberoende av dem. Cauchy kände till Argands arbete och hänvisade till det i sina publikationer.

14.5.3 Algebrans fundamentalsats

Det imaginära talet $\sqrt{-1}$ infördes som lösning till ekvationen $x^2 = -1$. Det visade sig att med hjälp av imaginära talet $\sqrt{-1}$ kunde lösningarna till andra-, tredje- och fjärdegradsekvationer ges en enhetlig form. Varje ekvation upp t.o.m. fjärde graden vars koefficienter är reella är lösbara om vi tillåter komplexa tal. Är det fortfarande fallet om vi betraktar ekvationer av godtyckligt gradtal eller måste vi lägga till ytterligare "imaginära" enheter för att uppnå lösbarhet? Svaret ges av algebrans fundamentalsats som säger:

Varje ekvation $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$ med komplexa koefficienter har en komplex rot.

Med hjälp av faktorsatsen följer sedan att ekvationen har precis n rötter om vi räknar rötterna med multiplicitet. Gauss gav ett bevis för satsen för reella koefficienter i sin doktorsavhandling 1799. Beviset som är geometriskt innehöll emellertid en lucka och kunde kompletteras först 1920. Det första stringenta beviset publicerades 1814 av Argand i artikeln *Réflexions sur la nouvelle théorie d'analyse* ("Reflektioner kring den nya teorin för analys") i *Annales de Mathématiques*. Gauss gav ytterligare två bevis 1816 och de tillgodoser dagens krav på stringens. Hittills hade alla bevisen gällt ekvationer med reella koefficienter. År 1849 levererade Gauss ett bevis för ekvationer med komplexa koefficienter men generaliseringen är mer formell. Med en enkel omskrivning kan problemet med komplexa koefficienter överföras till ett problem med reella koefficienter.

Bevisen är alltför tekniska för att ens antydas här. Det skall emellertid konstateras att de alla använder metoder från analys. Inget är rent algebraiskt. En utförlig historisk redogörelse för turerna kring algebrans fundamentalsats finns i **H.-D. Ebbinghaus** et al *Graduate texts in Mathematics. Readings in Mathematics. Book 123.* (2012) där delar finns tillgängliga på Internet.

14.5.4 Kvarternioner

I Storbritannien fick algebran en mer logisk filosofisk inriktning genom en rad framstående matematiker som t.ex. Augustus de Morgan och George Boole. En annan av dem som gjorde banbrytande insatser var William Rowan Hamilton. Han var något av ett underbarn både i matematik och språk. Han blev redan vid 22 års ålder professor vid Trinity College i Dublin och föreståndare för Dunsinkobservatoriet. År 1837 publicerade han en längre artikel *Theory of conjugate functions, or algebraic couples, with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time*. Han var starkt influerad av Immanuel Kants filosofiska teorier och hans syn på algebra stod på många sätt i konflikt med t.ex. Eulers. Han fick senare erkänna idéerna om algebran som en vetenskap om tid inte höll vid en närmare granskning. Konsekvenserna blev orimliga. Han utvecklade emellertid en syn på algebran som gjorde honom till en av pionjärerna i utvecklingen av den abstrakta algebran.

En del av Hamiltons artikel handlar om ett sätt att införa komplexa tal. Det som vi skriver som $a + \mathrm{i}\, b$ ser Hamilton som ett talpar (a, b) och han inför addition och multiplikation genom

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{och} \quad (a, b)(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Han sätter sedan $\mathrm{i} = (0, 1)$ vilket ger att $(a, b) = a + \mathrm{i}\, b$ där han identifierar a och b med $(a, 0)$ respektive $(b, 0)$.

Hamilton frågar sig nu om man på liknande sätt kan införa en addition och multiplikation av tripplar (a, b, c). Han arbetade med problem dagligen i flera år och det sägs att familjen engagerade sig i hans grubblerier. Barnens första fråga vid frukostbordet lär ha varit: "Har far kunnat multiplicera tripplarna?". Hamilton kom så småningom underfund med, att med de krav han ställde, gick det inte att definiera en meningsfull multiplikation. Han var tvungen att lägga till ett tal och istället betrakta kvadrupler. Han kom på lösningen under en promenad den 16 oktober 1846 och han kunde inte motstå att rista in lösningen i den träbro han just passerat. Han skrev

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{ijk} = -1.$$

Kungliga irländska akademin lät 1958 sätta upp en minnesplatta med dessa likheter på bron.

De nya talen kallade Hamilton kvarternioner och de kunde skrivas $a + b\,\mathrm{i} + c\,\mathrm{j} + d\,\mathrm{k}$ där a, b, c och d är reella tal. Talen i, j och k multipliceras enligt de lagar som Hamilton ristat in på bron. Därav följer bland annat att

$$\mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k}, \quad \mathrm{jk} = -\mathrm{kj} = \mathrm{i} \quad \text{och} \quad \mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = \mathrm{j}.$$

Multiplikationen är alltså inte kommutativ och det är första exemplet på vad man kallar en icke-kommutativ kropp. Det är möjligt att addera, subtrahera, multiplicera och dividera kvarternioner förutsatt att divisorn vid division inte är lika med 0. De vanliga räknelagarna gäller utom kommutativa lagen. I de flesta fall är alltså $z \cdot w \neq w \cdot z$ om z och w är kvarternioner. Kvarternionerna visar att det är möjligt att bilda talområden där de vanliga operationerna inte följer de lagar vi är vana vid. Under arbetet med att konstruera kvarternionerna tvingades Hamilton att konkretisera vad vi menar med vanliga räknelagar och det är förmodligen första gången associativa lagar formulerades

Om vi betraktar kvarternionerna av formen $b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k}$ så finner vi att multiplikation av dessa påminner i hög grad om det vi kallar vektorprodukt. Vi får då göra den konventionen att produkterna $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2$, som är lika med -1 om vi betraktar dem som kvarternioner, sätts lika med 0 om vi betraktar dem som vektorer. Det är rimligt eftersom talet -1 inte har någon komponent i någon av de tre rumsriktningarna i, j och k. Hamilton var medveten om att multiplikationen kunde tolkas geometriskt som just vektorprodukt. Han har i sina publicerade föreläsningar ett avsnitt där han beskriver hur de tre vektorerna i, j och k skall ligga i förhållande till varandra med hjälp av de tre riktningarna söder-norr, öster-väster och nadir-zenit. Kvarternionerna, som från början är en rent teoretisk konstruktion, visar sig också ha tillämpningar i modern fysik.

Hamilton presenterade sina teorier i en föreläsningsserie som publicerades 1853 med titel *Lectures on Quarternions containing a systematic statement of a new mathematical method*. Verket omfattar omkring 730 sidor. Till det kommer ett förord på över 60 sidor och innehållsförteckning av ungefär samma omfattning. Föreläsningarna och den artikel som nämnts inledningsvis är tillgängliga på Internet.

14.6 Lösningar av ekvationer med radikaler

Enligt algebrans fundamentals har varje polynom med komplexa koefficienter ett komplext nollställe. Satsen säger emellertid inte något om hur man bestämmer lösningen. Den är en existenssats. Under 1500-talet gav del Ferro, Tartaglia, Cardano och Ferrari metoder för att lösa tredje- och fjärdegradsekvationer. Andragradsekvationer kunde man lösa långt tidigare. Gemensamt är att rötterna kan bestämmas genom att successivt använder de fyra räknesätten samt rotutdragning på koefficienterna. I de nämnda fallen använder man kvadratrötter och kubikrötter. Om det är möjligt att på detta sätt bestämma lösningen till en n-tegradsekvation genom att successivt använda de fyra räknesätten och bildandet av rötter av ordningen r på ekvationens koefficienter säger vi att ekvationen är lösbar med hjälp av radikaler där ordet ”radikal” är den latinska benämningen för ”rot”. Den naturliga frågan är om en allmän ekvation av n-te graden är lösbar med radikaler. Det var naturligt att börja studera femtegradsekvationer.

Problemet sysselsatte många matematiker och många olika ansatser gjordes. Vi skall ta upp tre viktiga verk av Lagrange, norrmannen Niels Henrik Abel och fransmannen Evariste Galois. De två sistnämnda avled mycket unga och relativt detaljerade biografier om dem finns i avsnitt 9.9. Innehållet i de arbeten som vi skall hänvisa till är alltför komplicerat för ens skisseras här utan vi kommer bara att ge några mycket allmänna kommentarer och hänvisa till artiklar på nätet. Det skall emellertid nämnas att de begrepp och teorier som utvecklades speciellt av Galois har fått stor betydelse i modern matematik långt utanför teorin för algebraiska ekvationer.

Vi skall alltså ta upp viktiga verk av Lagrange, Abel och Galois. Den italienske matematikern och filosofen **Paolo Ruffini** hade 1799 före Abel och Galois publicerat ett bevis för att den allmänna femtegradsekvationen inte kan lösas med radikaler. Beviset var emellertid ofullständigt och fick ingen större uppmärksamhet. Även om beviset hade brister så är det anmärkningsvärt att Ruffini formulerat det korrekta resultatet. Det är okänt om Abel kände till Ruffinis arbete.

14.6.1 Lagranges studier av algebraiska ekvationer

Åren 1770–1 publicerade Lagrange en stor artikel *Réflexions sur la résolution algébrique des équations* om ekvationslösning. Han studerar uppbyggnaden av lösningarna till andra-, tredje- och fjärdegradsekvationerna och kan konstatera att det finns symmetrier som kan beskrivas med permutationer. Han lägger därmed grunden för Abels och Galois arbeten om ekvationers lösbarhet med radikaler. Artikeln finns i sin helhet tillgänglig på nätet och är på över tvåhundra sidor.

14.6.2 Abel och femtegradsekvationen

I biografin över Abel i den historiska översikten har vi beskrivit hur Abel trodde han visat att att femtegradsekvationen kan lösas med radikaler, hur han skickade den för granskning till en dansk auktoritet som bad om ett förtydligande, hur Abel upptäckte ett fel när han skulle komplettera beviset och hur han istället lyckades visa motsatsen d.v.s. att femtegradsekvationen i allmänhet inte kan lösas med radikaler. Efter några turer publicerades artikeln 1827 i det första numret av *Crelles Journal*. Artikeln har titeln *Recherches sur les fonctions elliptiques* och finns tillgänglig på Internet.

Den danske matematikhistorikern **Henrik Kragh Sørensen** har i artikeln *Niels Henrik Abel and the theory of equations* givit en version av Abels bevis och samtidigt beskrivit den historiska bakgrunden. Mycket förenklat kan man säga att om den allmänna lösningen till femtegradsekvationen kunde bestämmas med radikaler så skulle det finnas en femtegradsekvation med fler än fem rötter.

14.6.3 Galoisteori

Galois liv var dramatiskt vilket framgår av hans biografi i avsnitt 9.9. Efter den duell som skulle leda till hans död lämnade hans vänner in hans manuskript till Gauss och Jacobi som inte verkar ha tagit del av dem. De återfanns av Joseph Liouville som publicerade dem 1846 i artikeln *Mémoire sur les conditions de resolubilité des equations par radicaux* ("Om villkoren för ekvationers lösbarhet med radikaler") i *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*. Galois hade utformat en teori för när en algebraisk ekvation är lösbar med hjälp av radikaler. Liouville skrev att han i Galois artikel funnit en lösning;

> "... som är både korrekt och djup till detta underbara problem: Givet en irreducibel ekvation av primtalsgrad, avgör om den är lösbar med hjälp av radikaler."

Galois ursprungliga artikel, som finns tillgänglig i sin helhet på Internet, är svårläst. Naturligtvis spelar permutationer av rötter en viktig roll. Genom att på ett systematiskt sätt använda sig av abstrakta begrepp som grupper och kroppar kunde Galois idéer så småningom få den form den har nu och som kallas *Galoisteori*. Det är svårt att ge en enkel bild av den utan att gå in på detaljer. Läsaren hänvisas därför till standardlitteratur i modern algebra där Galoisteori har en självskriven plats.

14.7 Linjär algebra

I dagens högskoleutbildning i matematik är linjär algebra ett självklart inslag och ingår redan i de grundläggande kurserna. I linjär algebra studeras bl.a. linjära ekvationssystem, matriser, determinanter och kvadratiska former.

14.7.1 Linjära ekvationssystem och successiv elimination

Ekvationssystem har studerats i århundraden. Problem som leder till linjära ekvationssystem som har två ekvationer och två obekanta

$$\begin{aligned} ax + by &= e \\ cx + dy &= f \end{aligned}$$

där a, b, c och d är kända studerades redan i räkneläror från 1400-talet. Man använde den metod som kallas *regula falsi* och vi gav exempel på sådana problem i avsnitt 12.4.5. Newton saknade i de algebraböcker som då fanns en generell metod att lösa linjära ekvationssystem och han beskrev i anteckningar det vi idag kallar successiv elimination. De lär ha publicerats 1707 långt efter det att Newton lämnat den akademiska scenen. Metoden blev standard och kom också att kallas *Gausselimination* eftersom Gauss använde metoden vid beräkningar i samband med bearbetning av observationer av planeten Pallas gjorda under åren 1803–09.

Successiv elimination var emellertid känd långt tidigare i Kina och beskrivs i åttonde kapitlet i *Nio kapitel om den matematiska konsten* som skrevs någon gång under andra århundradet e.Kr. Troligen var metoden känd ännu tidigare eftersom *Nio kapitel om den matematiska konsten* till stora delar sammanfattar sedan länge kända resultat.

Tidigt kunde man utrycka lösningarna x och y till linjära ekvationssystem med två obekanta med hjälp av koefficienterna a, b, c, d, e och f med hjälp av det vi dag kallar *determinanter*.

14.7.2 Determinanter

Innan vi beskriver den historiska utvecklingen skriver vi upp lösningarna till ett linjärt ekvationssystem med två ekvationer och två obekanta. Om vi använder samma beteckningar som ovan får vi efter en del räkningarna att

$$x = \frac{ed - bf}{ad - bc}, \qquad y = \frac{af - ec}{ad - bc}.$$

Observera att det är samma uttryck $(ad - bc)$ i nämnaren både för x och y och det är rimligt att förutsätta att detta är skilt från 0.

Ett linjärt ekvationssystem med tre ekvationer och tre obekanta kan skrivas

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z &= b_3 \end{aligned}$$

där koefficienterna är numrerade så att första index anger ekvationens nummer och andra den obekantas. Efter betydligt mer räkningar, än i fallet med två obekanta, kan man också här uttrycka den allmänna lösningen i koefficienterna och får att x, y och z alla är bråk med samma nämnare nämligen

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Om vi byter ut koefficienterna a_{11}, a_{21} och a_{31} för x mot b_1, b_2 respektive b_3 så får vi täljaren i uttrycket för x. Alltså är x lika med

$$\frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + a_{13}a_{32}b_2 - b_1a_{23}a_{32} - a_{12}b_2a_{33} - a_{13}a_{22}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}.$$

De nio koefficienterna bildar en tabell med tre rader och tre kolonner – en tabell av typ 3×3. Nämnaren består av sex termer där varje term är en produkt av tre koefficienter – en från varje rad och en från varje kolonn. Tre av termerna adderas och tre subtraheras och det sker enligt vissa regler. Dessa uttryck skall så småningom komma att kallas *determinanter*.

Den förste som studerade denna typ av uttryck var en japansk matematiker **Takakazu Seki** (1642–1708) som genom exempel inte bara studerade determinanter av tabeller av typ 2×2, 3×3 utan också bildade motsvarigheterna för tabeller av typ 4×4 och 5×5. Seki använde inte determinanterna för att lösa linjära ekvationssystem utan för andra typer av problem.

Något decennium senare började determinanter användas i Europa. Leibniz efterlämnade skrifter visar att han bestämt den allmänna lösningen till ett linjärt ekvationssystem med tre ekvationer och tre obekanta med hjälp av determinanter, som han kallade resultanter. Första gången lösningar till linjära ekvationssystem av typ 2×2 och 3×3 uttrycks med hjälp av determinanter är i läroboken *Treatise on Algebra* av Colin MacLaurin. Den publicerades 1748 tio år efter MacLaurins bortgång. Här finns fullständiga bevis och också en antydan om hur man skall behandla linjära ekvationssystem av typ 4×4.

Den allmänna regeln för system av typen $n \times n$ gavs av den schweiziske matematikern Gabriel Cramer i artikeln *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques* (1750) ("Introduktion till analys av algebraiska kurvor") där han i en bilaga formulerade den sats som i dag kallas *Cramers regel*. Han skriver:

> Man finner att värdena av de n obekanta är n bråk med en och samma nämnare som ha lika många termer som antalet permutationer av n olika ting.

Han går i detalj genom hur nämnaren och täljarna är konstruerade men ger inga bevis.

Efter Cramers arbete skrevs flera artiklar om determinanter. Det var Cauchy, som i ett arbete från 1812, skulle ge en mer sammanhängande teori och det var också han som införde namnet "determinant". Ett viktigt bidrag gav senare Lagrange i ett arbetet om mekanik där han visade att volymen av en tetraeder med hörnen i $(0, 0, 0)$, (x, y, z), (x', y', z') och (x'', y'', z'') är lika med absolutbeloppet av

$$\tfrac{1}{6}\big(z(x'y'' - x''y') + z'(yx'' - xy'') + z''(xy' - yx')\big).$$

Uttrycket i den yttre parentesen är lika med en determinant. Det finns alltså ett samband mellan volym och determinant.

Brittiska matematiker som Cayley och Sylvester utvecklade också teorin för determinanter och det var Cayley som införde beteckningen med två lodräta raka streck kring tabellen.

Det skall anmärkas att rent numeriskt är Cramers regel inte effektiv. Den innehåller alltför många operationer och tar för lång tid – något som redan Laplace anmärkte. Successiv elimination är betydligt effektivare. Det är emellertid av principiellt intresse att veta hur lösningarna till ett linjärt ekvationssystem kan uttryckas med hjälp av koefficienterna.

14.7.3 Andragradsformer

Kägelsnitten har en framträdande plats i Descartes *La Géometrie*. Den holländske matematikern **Jan de Witt** kommenterade i *Elementa curvarum linearum* från 1659 Déscartes arbete. Kägelsnitten ges i koordinatsystem av ekvationer av andra graden $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ och de Witt visade hur man kan göra en koordinattransfomation så att ekvationen för kägelsnittet saknar xy-term.

År 1826 studerade Cauchy kvadratiska former av ett godtyckligt antal variabler

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + \ldots + kxy + mxz + nyz + \ldots$$

och gav en metod för att transformera dem till kvadratiska former utan blandade termer. Han gör det genom att i princip betrakta symmetriska matriser och bestämmer egenvärden och egenvektorer. Hans använder inte dessa begrepp utan det är de kvadratiska formerna som är huvudmålet för verksamheten.

En kvadratisk form kan alltså transformeras så att den i det nya koordinatsystemet saknar blandade termer. Cauchy angav ett sätt men det finns många. James Sylvester lyckades i en artikel från 1852 visa att om en kvadratisk form transformeras till en kvadratisk form utan blandade termer så är antalet positiva och antalet negativa kvadrattermer oberoende av hur transformationen görs.

14.7.4 Matriser

I *Nio kapitel om den matematiska konsten* använde man scheman av tal vid successiv elimination. I västerlandet var det i samband med studiet av determinanter under 1700-talet som man började skriva upp scheman eller tabeller av tal. Cauchy använde ”tableaux” när han studerade kvadratiska former men de var då bara hjälpmedel. Termen ”matris” lanserades av Sylvester i en artikel från 1850 och han beskriver den som en rektangulär uppställning av tal där man, om matrisen är kvadratisk, kan bestämma dess determinant.

Det var emellertid Cayley som på allvar började räkna med matriser. I en artikel *A Memoir on the Theory of Matrices* från 1858 visade han att resultat om linjära transformationer och andragradsformer kan återföras på resultat om matriser. Han konstruerade en algebra för matriser och visade hur man kan addera, subtrahera och multiplicera dem samt hur man kan multiplicera dem med ett tal. Han visade hur man bestämmer inverser. Han införde karakteristiska ekvationen för en kvadratisk matris och visade att matrisen själv satisfierade den – det som nu kallas *Cayley-Hamiltons sats*. Det är oklart vad Hamilton har bidragit med.

Under senare delen av 1800-talet bidrog matematiker som **Camille Jordan**, **Georg Frobenius** och Karl Weierstrass att utveckla teorin för matriser. För den nya fysiken med relativitetsteori och kvantmekanik, som utvecklades under de första decennierna av 1900-talet, blev matriser ett oundgängligt verktyg. Det har visat sig att matriser är ett effektivt hjälpmedel inte bara inom modern fysik utan inom snart sagt alla matematikens tillämpningsområden. Stora system kan skrivas på en kompakt form, som ger större överblick och som förenklar räknandet. Trots matristeorins uppenbara användbarhet blev den inte en naturlig del av grundläggande högskoleutbildning förrän på 1960-talet. Nu innehåller all högskoleutbildning på elementär nivå inslag av matristeori.

14.7.5 Vektorrum eller linjära rum

I samband med den geometriska tolkningen av komplexa tal infördes vektorer och begreppet generaliserades i teorin för kvarternioner. Kvarternionerna är fyrdimensionella och därmed har man lämnat det åskådliga rummet. År 1845 publicerade Cayley *Chapters on the Analytical Geometry of (n) Dimensions*. Geometriska begrepp och samband i det tredimensionella rummet generaliseras till högre dimensioner och detta måste göras rent algebraiskt. I de n-dimensionella vektorrummen kan man definiera bas och koordinater och man kan införa avståndsbegrepp och mäta vinklar. Man kan definiera linjära avbildningar mellan vektorrum och en avbildningen mellan ett vektorrum V till ett annat W kallas *linjär* om $F(\lambda u + \nu v) = \lambda F(u) + \nu F(v)$ för alla tal λ och ν samt alla vektorer u och v i V. Det visar sig att till varje linjär avbildning F hör en matris A som förmedlar sambandet mellan koordinaterna för u och $F(u)$ och omvänt ger varje matris med lämpligt antal rader och kolonner upphov till en linjär avbildning mellan V och W.

En sammanhängande teori – linjär algebra – kunde skapas för vektorer, matriser, kvadratiska former och inte minst linjära ekvationssystem. Som så många andra teorier utformades den olika i olika läromedel. Det var under 1950- och 60-talen som de första läroböckerna i linjär algebra såg dagens ljus. Sedan dess har ett otal läromedelsförfattare känt sig manade att ge sin tolkning av området antagligen beroende på att det både är relativt väl avgränsat och att det kan göras logiskt sammanhängande. Samtidigt ger teorin verktyg att lösa meningsfulla problem, både rent matematiska och med praktiska tillämpningar.

Den linjära algebra vi diskuterat har handlat om studiet av vektorrum av ändlig dimension. Varje vektor kan beskrivas med en uppsättning koordinater. En annan syn på området började utvecklas under 1800-talet. Man såg vektorrum som en mängd objekt som kan adderas och multipliceras med tal och som uppfyller vissa givna villkor. Vektorerna var alltså abstrakta storheter – mer abstrakta än de n-tipler som vi diskuterat tidigare – och vektorrummen behövde inte längre vara ändligtdimensionella. Den som framför allt stod för ett sådant synsätt var den polske matematikern **Hermann Grassmann**. Hans arbete *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* ("Linjär utvidgningsteori, en ny gren av matematiken") från 1844 blev emellertid ifrågasatt. Den första upplagan var utomordentligt svårläst och han fick omarbeta texten flera gånger. Under 1900-talet kom allt fler matematiker som David Hilbert, John von Neumann och Stefan Banach att förstå styrkan i det nya synsättet och nya typer av oändligtdimensionella rum infördes som Banachrum och Hilbertrum. Oändligtdimensionella vektorrum och då i första hand Hilbertrum ofta konkretiserade i form av rum av funktionsrum, blev de redskap som behövdes för att formalisera kvantmekaniken.

14.8 Abstrakt algebra

Under 1900-talet utvecklades ett område som brukar kallas *abstrakt algebra*. Det har sina rötter i 1800-talets studier av algebraiska ekvationer, talteori och geometri. Under andra hälften av seklet blev området ett stående inslag i matematikutbildning strax över grundnivå. Det innehåller bl.a. teorier om tre grundläggande strukturer: Grupper, ringar och kroppar. Tillsammans med teorin för vektorrum är kunskaper om dem nödvändiga för att förstå stora delar av dagens matematik. Begreppen ingår i standardterminologin.

14.8.1 Gruppbegreppet

Under slutet av 1700-talet och under 1800-talet lanserades en rad nya begrepp. Lagrange, Abel och Galois studerade grupper av permutationer som på något sätt beskrev symmetrier. Gruppbegreppet var länge knutet till permutationer. Den brittiske matematikern Arthur Cayley var en av föregångsmännen när det gällde att utveckla gruppbegreppet. Han ger 1854 en ny typ av definition som innebär att en grupp inte nödvändigtvis måste bestå av permutationer. Den kan också bestå av kvarternioner och matriser. Vi citerar en del av hans definition;

> ”. . . the symbol 1 will naturally denote an operation which (either generally or in regard to the particular operand) leaves the operand unaltered. . . . A symbol xy denotes the compound operation, the performance of which is equivalent to the performance, first of the operation y, and then of the operation x; xy is of course in general different from yx. But the symbols x, y, . . . are in general such that $x(yz) = (xy)z$ etc., so that xyz, $xyzt$, etc. have a definite signification independent of the particular mode of compounding the symbols . . .”

Cayleys definition var före sin tid och hans artiklar gjorde inget avtryck. Drygt 30 år senare 1889 skulle tiden vara mogen för en mer abstrakt definition. I fyra artiklar, som hade den gemensamma titeln *On the Theory of Groups*, gav Cayley en abstrakt definition av gruppbegreppet och visade också att varje ändlig grupp kan representeras av en grupp av permutationer.

Några år tidigare 1872 hade Felix Klein givit ut *Erlangen Program* där han klassificerade olika geometrier utifrån grupper av transformationer. I Euklidisk geometri t.ex. studeras egenskaper som är invarianta vid avbildningar som bevarar avstånd och i projektiv geometri studeras egenskaper som inte ändras vid projektiva avbildningar. Klein hade samarbetat med den norska matematikern Sophus Lie som studerade differentialekvationer med hjälp av gruppteori.

I dagens litteratur om teorin för grupper ges i regel följande definition:

En grupp G som en mängd objekt med en operation $\star$ med egenskaperna:

1. Om a och b tillhör G så tillhör $a \star b$ också G,
2. $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$ för alla a, b och c i G,
3. det finns ett enhetselement e i G sådant att $a \star e = e \star a = a$ för alla a i G, samt
4. för varje a i G finns en invers a^{-1} i G sådant att $a \star a^{-1} = a^{-1} \star a = e$.

Gruppteorin blev under 1900-talet föremål för omfattande studier och är av stor betydelse inom flera områden av matematiken som t.ex. matristeori, galoisteori och talteori samt inom olika tillämpningar som fysik, kemi och biologi.

14.8.2 Kroppar

Ett annat begrepp som infördes i samband med studiet av algebraiska ekvationer var begreppet *talkropp* som en mängd tal som är slutna under de fyra räknesätten. Det betyder att om om a och b tillhör talkroppen så gör också $a+b$, $a-b$ och $a \cdot b$ det liksom a/b om $b \neq 0$. Abel och Galois använde sig i sina resonemang av talområden med sådana egenskaper utan att använda ordet talkropp. Detta gjorde också Pierre Wantzel när han visade att problemen med vinkelns tredelning och kubens fördubbling är olösbara.

Det var den tyske matematikern Richard Dedekind som 1879 införde termen *kropp* eller på tyska ”körper”. Han skriver:

> ”Med en kropp menar vi varje oändligt system av reella eller komplexa tal som är så slutet i sig själv och så perfekt att addition, subtraktion, multiplikation och division av två av dess tal ger ett tal i systemet.”

Dedekinds definition var knuten till reella eller komplexa tal. Den definition som numera används är mer abstrakt och är inte knuten till tal. En kropp är en mängd objekt med två operationer, addition och multiplikation, som uppfyller ett antal lagar, som vi är vana vid att addition och multiplikation skall uppfylla med ett undantag: Multiplikation behöver inte vara kommutativ. En kropp där multiplikation inte är kommutativ kallas ibland *skevkropp* och kvarternionerna är exempel på en sådan. Det visar sig också att det finns ändliga kroppar och de spelar stor roll inom talteorin.

14.8.3 Ringar

Ett tredje begrepp som förknippas med abstrakt algebra är *ring*. I en ring kan man addera, subtrahera och multiplicera men inte nödvändigtvis dividera. Exempel på ringar är de hela talen $\mathbb{Z}$, mängden $\mathbb{Z}_n$ av hela tal modulo n, polynom med heltalskoefficienter, polynom med komplexa koefficienter och kvadratiska matriser av en given ordning. Det sistnämnda är ett exempel på en icke-kommutativ ring.

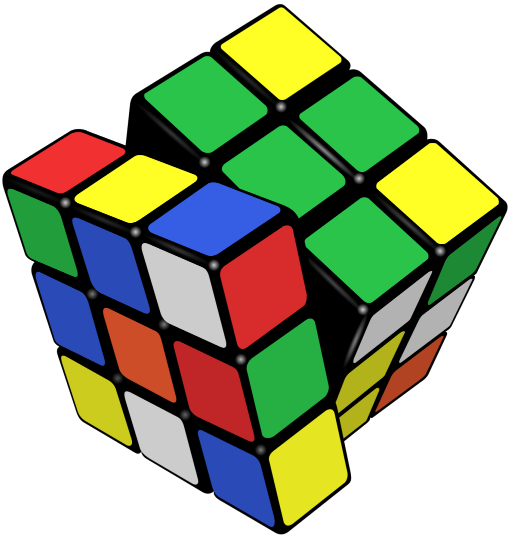
Teorin för ringar där multiplikationen är kommutativ kan härledas från talteori och arbeten av Gauss och Dirichlet samt från studiet av polynom och deras delbarhetsegenskaper. De uppenbara likheter vi nu ser när det gäller delbarhetsegenskaper hos hela tal och polynom utnyttjades inte under 1800-talet. De behandlades skilda åt. Det var först den tyska matematikern Emmy Noether som 1920 skapade en teori för abstrakta kommutativa ringar som omfattade både delbarhetsegenskaperna hos heltal och polynom. Eftersom hon var kvinna hade hon svårt att få arbetet publicerat och det var den holländske matematikern B. L. van der Waerden som i sin klassiska bok *Moderne Algebra* från 1930 gjorde hennes resultat kända. Centralt i Noethers arbete var begreppet ideal som införts tidigare av Richard Dedekind. Ett ideal I i en kommutativ ring R är en icke-tom delmängd av R som har följande egenskaper:

1. Om a och b tillhör I så gör också $a-b$ det.

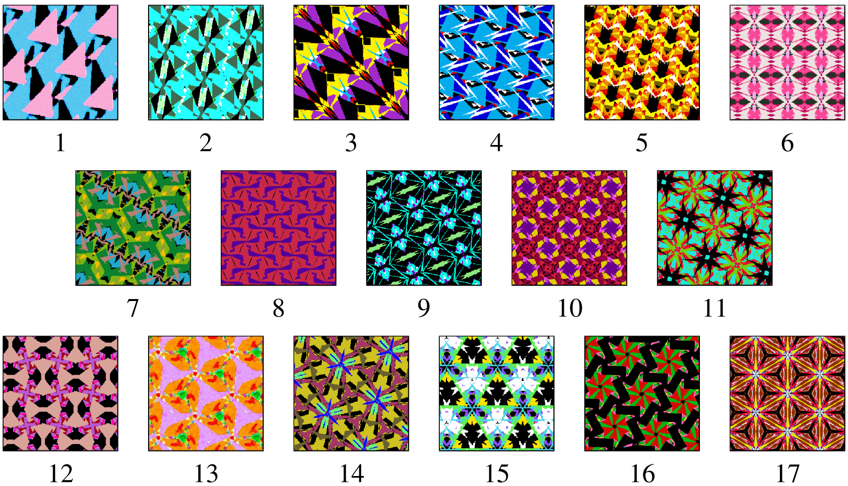
2. Om a tillhör I så gör också ax det för alla x i hela ringen R.

Idealen bland de hela talen är de mängder som består av alla multiplar na av ett givet heltal a. Genom att använda idealbegreppet kunde Noether formulera en delbarhetsteori för en generell abstrakt ring.

I den abstrakta algebran kan till synes helt olika företeelser inordnas under samma abstrakta begrepp. De teorier som utvecklas för de överordnade begreppen kan sedan tillämpas inom olika områden och på det viset skapas större överblick. Men abstraktionsnivån har höjts ytterligare. I den homologiska algebran talar man om s.k. *funktorer* som t.ex. till varje grupp ordnar en ny grupp. ”Definitionsmängd” och ”värdemängd” kan alltså vara mängden av grupper eller mängden av ringar. Inom algebran, som till sin natur är formell, kommer abstraktionsnivåerna förmodligen alltid att höjas för att förenkla, se sammanhang och skapa överblick.



Figur 14.6: Den ungerske arkitekten **Ernö Rubik** skapade 1975–7 ett tredimensionellt mekaniskt pussel för att användas i undervisningen för arkitekter. Pusslet som kallas *Rubiks kub* visas på bilden och de flesta har nog kommit i kontakt med den på ett eller annat sätt. Den har blivit en leksak för äldre och yngre i hela världen. I varje liten kub har de olika sidoytorna de sex olika färgerna vit, svart, grön, röd, blå och gul. I utgångsläget har alla rutorna i varje sida i den stora kubens samma färg. Genom slumpmässiga vridningar blandar man färgerna och uppgiften är att genom upprepade vridningar återställa kuben till utgångsläget. Första gången Rubik själv skulle göra det lär det ha tagit honom sex veckor. Nu har man tävlingar och man har kommit ner i några sekunder. Uppenbarligen är problemet matematiskt och för att göra en närmare analys så använder man gruppteori där de olika kombinationerna av vridningar är elementen. Den intresserade läsaren kan t.ex. studera den teori man får genom **Tom Davis** text *Group Theory via Rubik's Cube* som finns på Internet (`2WJvSNH`). (Bild: `2CQzaHU`)



Figur 14.7: Gruppteori kan användas för att studera symmetrier t.ex. symmetrier hos tapeter som har ett mönster som upprepar sig i två olika riktningar. Man kan klassificera dem med hjälp av transformationsgrupper som lämnar dem invarianta d.v.s. de ändras inte efter en transformation i gruppen. Det kan innebära att två tapeter vars mönster verkar vara helt olika kan lämnas invarianta av samma transformationsgrupp och de ska då identifieras medan omvänt två mönster som inte verkar skilja sig så mycket har olika transformationsgrupper. Det visar sig att det finns 17 olika grupper av tapetsymmetrier och det är de som visas i figuren. Resultatet visade av ett antal matematiker i slutet av 1800-talet. En utmärkt översikt finns på Internet, `2DZoCGV`. Det påstås att alla de sjutton mönstren ska finnas representerade i mosaiken i moskén i Alhambra, men det råder inte någon enighet om det. (Bild: `2DZoCGV`)

Kapitel 15

Analys

År 1748 utkom Leonhard Eulers stora verk *Introductio in analysin infinitorum* ("Introduktion till analys av det oändliga") och det är upphovet till namnet på det område som vi idag kallar Analys. Det omfattar differential- och integralkalkylen, som då var femtio år gammal, men också oändliga serier. Det handlar alltså om det "oändligt lilla" och det "oändligt stora". I differentialkalkylen dividerar vi "oändligt små tal" eller "infinitesimaler", i integralkalkylen delar vi en storhet i "oändligt många oändligt små delar" som sedan adderas.

Oändliga processer användes redan i antiken för att bestämma t.ex. en area eller en volym. De innehöll emellertid inbyggda problem, som formulerades på ett slående sätt i ett antal paradoxer av den grekiske filosofen Zenon från Elea (c:a 490–425 f.Kr.). Den mest kända är den om Akilles och sköldpaddan. Akilles, den tidens symbol för kraft och snabbhet, skall tävla mot en sköldpadda som får ett försprång. Naturligtvis hinner Akilles upp sköldpaddan men Zenon visar att om man använder ett resonemang som innehåller oändligt många steg så gör han inte det. När Akilles nått den punkt där sköldpaddan startade så har sköldpaddan kommit till en punkt P. Akilles fortsätter till punkten P, men då har sköldpaddan hunnit till Q. När Akilles når Q är sköldpaddan vid R o.s.v. Akilles hinner alltså aldrig fatt sköldpaddan. Givetvis visste Zenon att han gjorde det. Han ville visa hur ett resonemang som innehåller oändligt många steg kan föra oss vilse.

En annan av Zenons paradoxer är den om en flygande pil. En flygande pil är i varje ögonblick i ett fixerat läge och därmed i vila. Hur kan den då vara i rörelse?

De problem som ryms i Zenons paradoxer har förföljt analysen under århundraden. Genom att studera det oändliga är man inte längre på säker mark. Redan under antiken gjordes betydelsefulla försök att förankra det oändliga i det ändliga. Eudoxos uttömningsprincip är det viktigaste. Den lyder:

> Antag att två storheter är givna och att den ena är större än den andra. Antag att vi från den större avlägsnar en del som är större än hälften av den större och att vi sedan från resten avlägsnar en storhet som är större än hälften av resten o.s.v. Vi kommer då efter ett ändligt antal steg få en rest som är mindre än den givna mindre storheten.

Antikens store matematiker Arkimedes kom fram till viktiga resultat genom att arbeta med oändligt många oändligt små delar. Resonemangen är korta och eleganta. Han var emellertid noga att sedan bevisa resultaten med hjälp av uttömningsprincipen och då blev framställningen omständlig och svåröverskådlig.

I sitt stora verk *Samtal och matematiska bevis rörande två nya vetenskaper* från 1638 diskuterar Galileo Galilei problemen med det oändligt lilla och det oändligt stora. Ett samtal handlar om det paradoxala att en mindre cirkel i någon mening har ”lika många” punkter som en större. Galileis alter ego Salviati säger:

> ”Dessa svårigheter är reella och de är inte de enda. Men låt oss komma ihåg att vi har att göra med oändligheter och odelbarheter, båda övergår vår ändliga förståelseförmåga, de förra på grund av dess storlek, de senare på grund av dess litenhet. Trots det kan inte människan avstå från att diskutera dem även om det måste göras indirekt.”

Motsatsförhållandet mellan effektiviteten vid räkning med oändligheten och kraven på förankring i det ändliga kom att i perioder prägla analysen. Biskop Berkeley kritiserade Newtons och Leibniz infinitesimalkalkyl och hävdade att om man kunde visa saker genom att använda infinitesimaler av första, andra och högre ordning så kunde man lika gärna hänvisa till Gud. Under andra halvan av 1800-talet fann man paradoxer inom analysen som innebar att grunderna måste klargöras och då kom genom insatser av Weierstrass Eudoxos uttömningsprincip till heders. Några matematiker med Kronecker i spetsen hävdade att matematiken skulle vara konstruktiv, att alla begrepp som bildades skulle kunna konstrueras ur de naturliga talen och att alla bevis skulle vara konstruktiva – motsägelsebevis var inte tillåtna. Det skulle exkludera stora delar av analysen. Men trots alla kritiska synpunkter är analysen idag ett av matematikens viktigaste områden.

15.1 Preludier till ”Analys av oändligheten”

Det grundläggande verket från antiken är *Elementa*. Där har Euklides samlat den tidens matematiska kunskap och inordnat den i ett logiskt system. Några resonemang om oändligheten finns inte – varken om det oändligt lilla eller det oändligt stora. Man kan emellertid misstänka att några resultat har från början härletts med resonemang som inte uppfyllde Euklides krav på stringens och att man intuitivt arbetat med oändligt många oändligt små enheter. Det är särskilt när Euklides tvingas arbeta med motsägelsebevis och Eudoxos uttömningsprincip som det måste ha funnits någon form av förberedande resonemang som inte är stringent i Euklides mening. Det viktigaste exemplet är satsen om cirkelns area men också bestämning av tetraederns, konens och cylinderns volymer utnyttjar uttömningsprincipen. Det är alltså vid beräkning av areor och volymer som han utgår från ett påstående som sedan visas genom motsägelsebevis – bevis som inte ger någon egentlig upplysning om hur man kommit fram till den aktuella satsen. När det gäller cirkelns area verkar det högst sannolikt att Euklides delat in cirkeln i oändligt många oändligt små sektorer som i sin tur är ungefär trianglar med den lilla bågen som bas och radien som höjd.

Om bestämning av areor och volymer för tankarna till integralkalkylen så för satser om tangenter tankarna till differentialkalkylen. I Elementa visas att tangenten till en cirkel är vinkelrät mot radien till tangeringspunkten. Här krävs också ett motsägelsebevis men att satsen gäller kan inses av symmetriskäl. Tangenter spelar en stor roll i Apollonius *Konica* och i de grundläggande satserna används motsägelsebevis. Det finns i själva motsägelsebevisen en ansats till att tangenten i en punkt är ett gränsläge då sekanter vrider sig kring punkten.

Den som framför alla andra antika matematiker förebådar integralkalkylen är Arkimedes. Det kommer tydligast till uttryck i *Metoden* där han visar hur han med hjälp av infinitesimala resonemang kommer fram till ett samband mellan volymerna av en sfär och en cylinder. Sambandet visas sedan med hjälp av ett motsägelsebevis där Eudoxos uttömningsprincip används. Framställningen i *Metoden* är relativt enkel att följa medan motsägelsebeviset är mer komplicerat. Vi har gjort en relativt grundlig genomgång av hans resonemang i kapitel 13.

Arkimedes härleder också arean av ett parabelsegment och i samband med det bestämmer han summan av en oändlig serie – ett område som skulle bli centralt inom analysen. Han bestämmer i princip den ändliga geometriska summan

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{4^n}$$

och visar att summan kan göras godtyckligt nära $4/3$ om bara n är tillräckligt stort. Drygt tusen år senare på 800-talet bestämde Thabit ibn Quarra, som verkade i Bagdad, parabelsegmentets area på ungefär samma sätt som Arkimedes. För detaljerna i Arkimedes härledning hänvisar vi till kapitel 13.

Under senare delen av 1300-talet bidrog en fransk präst och kunglig rådgivare – Nicolas Oresme – med resultat som var nyskapande och som föregrep den analys som skulle utvecklas trehundra år senare. Han införde en form av koordinatsystem där man kunde åskådliggöra hur två variabla storheter beror av varandra. Han visade att en likformigt accelererad kropp på en given tid tillryggalägger samma sträcka som en kropp som rör sig med en konstant hastighet, som är lika med den förstnämndes hastighet efter halva den givna tiden – något som förutsätter någon form av ”infinitesimalt” resonemang. Oresme visade också att den oändliga serien $1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + 1/5 + \ldots$ är divergent, d.v.s. att summan överstiger varje givet tal om man bara tar med tillräckligt många termer. Vi avslutar vårt urval av preludier till analysen med att ge idéerna i Oresmes bevis.

Betrakta summan av de 16 första termerna i serien

$$1 + \tfrac{1}{2} + \left(\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\right) + \left(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{8}\right) + \left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{10} + \tfrac{1}{11} + \tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{13} + \tfrac{1}{14} + \tfrac{1}{15} + \tfrac{1}{16}\right).$$

I varje parentes ersätter vi alla talen med det minsta. Summan är då större än

$$1 + \tfrac{1}{2} + 2 \cdot \tfrac{1}{4} + 4 \cdot \tfrac{1}{8} + 8 \cdot \tfrac{1}{16} = 1 + 4 \cdot \tfrac{1}{2} = 3.$$

Vi kan fortsätta på detta sätt. Nästa parentes omfattar 16 termer och den minsta är $1/32$, den därpå omfattar 32 termer och den minsta är $1/64$ o.s.v. Vi kan utföra detta oändligt många gånger och varje parentes har en summa som är större än $1/2$. Alltså är den oändliga summan

$$1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \ldots$$

oändligt stor.

15.2 Precalculus

Den stora revolutionen inom matematiken under 1600-talet var skapandet av infinitesimalkalkylen eller bara kalkylen, som den ofta kom att kallas. En rad arbeten under samma århundrade banade väg för den nya grenen av matematiken. De brukar ibland sammanfattas under rubriken *Precalculus* och vi skall ge några exempel. Innan vi går in på dem är det viktigt att framhålla att en förutsättning för infinitesimalkalkylen är utvecklingen av algebran och den analytiska geometrin. Att kunna räkna med symboler och att kunna illustrera beroendet av variabler i koordinatsystem är av avgörande betydelse för uppkomsten av kalkylen. Viètes *In artem analyticam isagoge* och Descartes *La Géométrie* gav matematiker verktyg för att utforma analysen av det oändliga.

De exempel vi valt är hämtade från **D. J. Struiks** bok *A Source Book in Mathematics, 1200–1800* som finns tillgänglig på Internet. Vi skall visa hur den italienske matematikern **Bonaventura Cavalieri**, elev till Galilei och professor i Bologna, härleder det vi skriver

$$\int_0^a x^n \,\mathrm{d}x = \frac{a^{n+1}}{n+1},$$

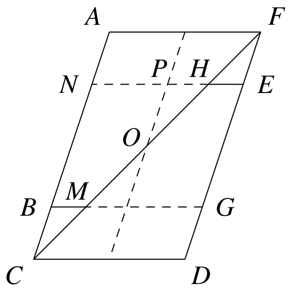
hur den framstående amatörmatematikern Pierre de Fermat, som var domare i Toulose, bestämmer maximum av en funktion, hur den unge Blaise Pascal integrerar sinusfunktionen och hur Newtons lärare **Isaac Barrow** härleder det vi idag kallar integralkalkylens huvudsats.

15.2.1 Cavalieris integrationsmetod

År 1635 publicerade Bonaventura Cavalieri boken *Geometria individisibilbus continuorum* där han presenterade vad vi idag skulle kunna kalla integrationsmetoder. Han betraktade en area som en summa av sträckor och en volym som en summa av plana areor. Han studerade oändliga summor av oändligt små odelbara och kontinuerliga storheter. Hans framställning är inte lätt att följa och den blev ifrågasatt av samtida matematiker. Vi nöjer oss med att visa hur man med Cavalieris metod kan visa en motsvarighet till

$$\int_0^a x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{a^3}{3}$$

ett resultat som Arkimedes egentligen redan visat. Vi antyder sedan hur Cavalieri fortsatte med högre potenser av x. Struik har i sin bok översatt Cavalieris text till engelska och dessutom gjort en framställning med moderna beteckningar. För att principerna i resonemangen skall framgå tydligare använder vi bara den mer moderna versionen och hänvisar för övrigt till Struiks bok.



Figur 15.1: Figur 1 till Cavalieris integrationsmetod.

Cavalieri betraktar en parallellogram $ACDF$ med diagonalen CF och han påstår följande: ”Alla kvadrater på parallellogrammen $ACDF$ är tre gånger alla kvadrater på triangeln ACF (eller BDF).”. Vad han menar med detta är inte helt klart men det kommer att framgå av resonemangen som följer.

Han tänker sig att parallellogrammen och triangeln består av oändligt många sträckor parallella med AF. Sträckorna i parallellogrammen har konstant längd medan de i triangeln varierar.

I figur 15.1 är EN och BG parallella med AF. Vidare är $BC = EF$. Punkten P är mittpunkt på EN och den streckade linjen genom P är parallell med AC. Den skär diagonalen CF i dess mittpunkt O.

Vi inför följande beteckningar:

$$AF = CD = a, \quad HN = x, \quad HE = y \quad \text{och} \quad HP = z.$$

och observerar att

$$a = x + y, \quad x = \tfrac{1}{2}a + z \quad \text{och} \quad y = \tfrac{1}{2}a - z.$$

Vi summerar nu alla kvadrater av a i parallellogrammen och får[1]

$$\sum a^2 = \sum (x+y)^2 = \sum (x^2+2xy+y^2) = \sum x^2 + 2\sum (\tfrac{1}{2}a+z)(\tfrac{1}{2}a-z) + \sum y^2$$

som kan skrivas

$$\sum a^2 = \sum x^2 + \frac{1}{2}\sum a^2 - 2\sum z^2 + \sum y^2.$$

Vi observerar att

$$\sum y^2 = \sum x^2 \quad \text{och} \quad \sum z^2 = \frac{1}{4}\sum x^2.$$

Den sista likheten inses med hjälp av likformiga trianglar. Vi har nu att

$$\sum a^2 = 2\sum x^2 + \frac{1}{2}\sum a^2 - \frac{1}{2}\sum x^2$$

som efter förenklingar ger att

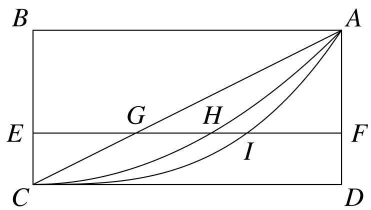
$$\frac{1}{2}\sum a^2 = \frac{3}{2}\sum x^2$$

eller

$$\sum a^2 = 3\sum x^2.$$

På ungefär samma sätt visar Cavalieri det vi med moderna beteckningar skriver

$$\sum a^3 = 4\sum x^3 \quad \text{och} \quad \sum a^4 = 5\sum x^4.$$



Figur 15.2: Figur 2 till Cavalieris integrationsmetod.

Cavalieri använder nu figur 15.2 för att få de resultat han önskar. I parallellogrammen $ABCD$ är AC en diagonal. Sträckan EF rör sig från AB till CD. Den skär diagonalen AC i punkten G. Konstruera nu punkterna H och I på EF så att

$$\frac{DA^2}{AF^2} = \frac{EF}{FH} \quad \text{och} \quad \frac{DA^3}{AF^3} = \frac{EF}{FI}.$$

Han kallar AHC och AIC för en andra respektive tredje diagonal och påstår att arean av området av hela parallellogrammen $ABCD$ är tre gånger arean av $AHCD$ och fyra gånger arean av $AICD$.

För att ge ett bevis i Cavalieris anda men med modern notation inför vi följande beteckningar:

$$CD = a,\quad AD = b,\quad AF = z,\quad FG = x,\quad FH = x_1,\quad GE = y \;\text{ och }\; HE = y_1.$$

Eftersom trianglarna ABC och AFG är likformiga så är $b/z = a/x$. Konstruktionen av H ger

$$\frac{a^2}{x^2} = \frac{b^2}{z^2} = \frac{a}{x_1}$$

[1]De båda sista likheterna gäller på övre halvan av parallellogrammen. På den undre byts z mot $-z$ vilket inte påverkar resonemanget eftersom z bara förekommer som kvadratterm.

vilket ger $ax_1 = x^2$. Vi summerar och använder tidigare resultat

$$a \sum x_1 = \sum x^2 = \frac{1}{3} \sum a^2.$$

Om vi kallar $ABCD$:s area för Q så är $Q = \sum a$ och alltså $aQ = \sum a^2$. Kombinerar vi detta med föregående likhet får vi att

$$\text{Arean av } AHCD = \sum x_1 = \tfrac{1}{3} Q.$$

På liknande sätt kan Cavalieri visa att arean av $AICD = \frac{1}{4} Q$.

”Diagonalerna” AHC och AIC är kurvor av andra respektive tredje graden och Cavalieris resultat motsvarar alltså

$$\int_0^1 x^2 \, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{3} \quad \text{respektive} \quad \int_0^1 x^3 \, \mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}.$$

Cavalieris resonemang är, som vi tidigare nämnt, ofta svårt att följa. Hans slutsatser verkar ibland vara tvivelaktiga och han insåg själv att hans metoder kunde leda vilse men han hoppades att nästa generation matematiker skulle lösa de problemen. Resultaten är emellertid korrekta. När man går igenom Cavalieris härledning slås man av vikten av att ha en fungerande formalism som gör resonemangen genomskinliga. Till det krävdes en Leibniz eller en Newton som kunde införa lämpliga beteckningar och se samband mellan derivator och integraler.

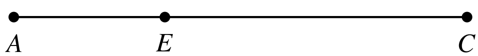
15.2.2 Fermats metod för att bestämma maxima och minima

I ett brev till den franske munken, filosofen och matematikern Marin Mersenne beskrev Pierre de Fermat en metod för att bestämma maxima och minima. Mersenne, som var navet i ett nätverk av vetenskapsmän, mottog brevet 1638 och vidarebefordrade det till Descartes. Brevet gav upphov till en polemik mellan Fermat och Descartes.

Fermat inleder brevet med att i allmänna ordalag beskriva sin metod. Han inför en beteckning a på en variabel och tecknar det som skall maximeras eller minimeras uttryckt i a. Han ändrar a till $a + e$ och gör motsvarande beräkningar. Han påstår sedan att nära ett maximum eller minimum måste uttrycken för a och $a + e$ skilja sig mycket litet åt. För att få den sökta punkten kan han sätta de båda uttrycken lika med varandra och därefter sätta $e = 0$.

För att åskådliggöra sin metod tillämpar han den på följande välkända problem: Bestäm den rektangel med given omkrets som har största area. Redan under antiken kunde man med geometriska metoder visa att den sökta rektangeln är en kvadrat. Vi ger Fermats lösning:

> ”*Att dela en given sträcka AC i en punkt E så att AE · EC är maximal.*



Figur 15.3: Illustration till Fermats resonemang.

> Vi sätter $AC = b$; låt a vara den ena av de båda delarna. Då är den andra $b - a$ och produkten vars maximum skall beräknas är $ba - a^2$. Låt nu den första delen vara $a + e$, den andra är då $b - a - e$ och produkten $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$. Detta måste vara ungefär lika med $ba - a^2$ Om vi avlägsnar gemensamma termer betyder det att $be \sim 2ae + e^2$.

> Dividera med e och sätt $e = 0$: $b = 2a$. Lösningen till problemet är alltså att vi skall välja a lika med halva b
>
> Vi kan knappast tänka oss en mer allmän metod.”

Fermat fortsätter med att använda samma metod för att bestämma tangenter till kurvor.

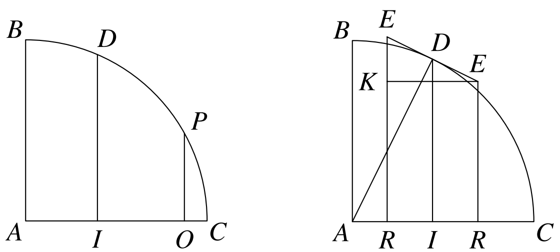
Innehållet i brevet från Fermat till Mersenne publicerades först 1678 i samband med utgivningen av Fermats samlade arbeten. Metoden som Fermat beskriver är naturligtvis ett embryo till hur man med hjälp av derivator bestämmer maxima och minima. Den är enkel men det är lätt att göra invändningar. Räkningarna förutsätter att $e \neq 0$ men sedan sätter man $e = 0$. Är det alltid sant att variationen är nästan lika med 0 i omgivning av en extrempunkt? Fermat var inte den förste som formulerade ett sådant påstående. Det hade Johannes Kepler gjort några decennier tidigare.

15.2.3 Pascals integration av sinusfunktionen

I en artikel från 1658, *Traité des sinus du quart de cercle* (”Teori för sinus i en kvartscirkel”), bestämmer Pascal integralerna $\sin^n x$ för $n = 1, 2, 3$ och 4. Naturligtvis använder inte Pascal ordet integral. Det skulle införas senare. Han uttrycker sig på annat sätt. Vi skall beskriva hans metod i det enklaste fallet $n = 1$ och hänvisar till figur 15.4.

I vänstra delen av figur 15.4 är P en fix punkt på kvartscirkeln ABC och normalen från P mot AC skär AC i O. Punkten D på kvartscirkeln rör sig från B till P och I är fotpunkten för normalen från D till AC. Pascal kallar DI för en sinus och han påstår:

> ”Summan av alla sinusar DI (var och en av dem naturligtvis multiplicerad med lika stora små bågar DD) då D varierar mellan B och P är lika med sträckan AO multiplicerad med cirkelns radie AB.”



Figur 15.4: Figurerna är hämtade ur Struiks bok men där ligger kvartscirkeln i andra kvadranten.

I högra delen av figuren analyseras situationen kring DI närmare. De små fyrhörningarna $EERR$ fyller upp området mellan AB och PO. Pascal betecknar olika punkter med samma bokstav E respektive R för att markera att de ”nästan sammanfaller”. Han observerar att trianglarna EEK och ADI är likformiga eftersom båda är rätvinkliga och den högra vinkeln EEK är lika med vinkeln ADI. Då gäller att

$$\frac{AD}{DI} = \frac{EE}{EK}.$$

men eftersom $AD = AB$ och $EK = RR$ så har vi att

$$\frac{AB}{DI} = \frac{EE}{RR} \quad \text{eller} \quad AB \cdot RR = DI \cdot EE.$$

Summerar vi får vi att högerledet är den sökta summan av sinusar medan vänsterledet är AB gånger summan av alla RR d.v.s. $AB \cdot AO$. Påståendet är därmed visat.

Hur ser Pascals påstående ut med modern notation? Vi antar för enkelhets skull att radien AB är lika med 1. Vi kallar vinkeln CAD för x och vinkeln CAP för x_0. Då är $DI = \sin x$ och $AO = \cos x_0$. Pascals resultat kan då formuleras på följande sätt

$$\int_{x_0}^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, \mathrm{d}x = \cos x_0.$$

Pascal infogar en not där han klargör hur han tänker när det gäller oändligt små storheter, men det krävs nog större precision för att tillfredsställa dagens krav på stringens. Det är emellertid intressant att Pascal uppmärksammar problemen. Han skriver:

> ”Det borde inte åstadkomma förvåning när jag påstår att alla RR tillsammans är lika AO och inte heller att varje tangent EE är lika med varje liten båge DD, även om detta inte är sant då antalet sinusar är ändligt, men det är emellertid sant när antalet är oändligt; eftersom summan av alla lika stora tangenter EE skiljer sig från bågen BD eller summan av alla bågar DD med mindre än varje given storhet, liksom summan av alla RR från hela AO.”

Pascal fortsätter att med liknande teknik beräkna integralerna av $\sin^2 x$, $\sin^3 x$ och $\sin^4 x$, men räkningarna blir mer tekniska och vi hänvisar till Struiks bok.

15.2.4 Isaac Barrows version av integralkalkylens huvudsats

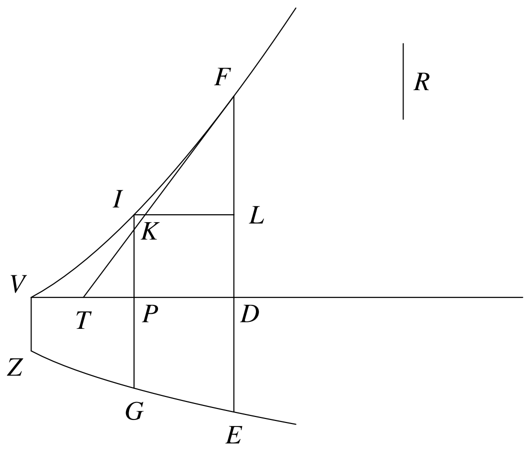
Isaac Barrow var teolog, filosof och matematiker. Han innehade den professur i Cambridge som skulle övertas av hans elev Isaac Newton. År 1670 utgavs Barrow *Lectiones geometricae* som var en sammanfattning av hans föreläsningar. Materialet är tämligen ostrukturerat och Barrow var inte nöjd med det. Han bestämde sig emellertid för att publicera dem som de kom till – i ”Naturens klädsel”. I den tionde föreläsningen handlar ett kortare avsnitt om det vi idag kallar integralkalkylens huvudsats och som uttrycker sambandet mellan integral och derivata. Vi formulerar den idag på följande sätt:

> Om funktionen $f(x)$ är kontinuerlig i ett intervall $a \leq x \leq b$ och $S(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ så är $S'(x) = f(x)$.

Barrow använder sig av figur 15.5. Den undre kurvan ZGE begränsar tillsammans med axeln VD (som motsvarar vår x-axel) samt ordinatorna VZ och DE ett område, som varierar med DE. Barrow konstruerar nu en punkt F sådan att FD är vinkelrät mot axeln och så att en rektangel, vars ena sida är FD och den andra en given enhetssträcka R, har samma area som området $VZGED$. När D varierar kommer F att beskriva en kurva VIF. Konstruera nu en punkt T på axeln sådan att

$$\frac{FD}{DT} = \frac{DE}{R}.$$

Barrow påstår nu att FT är tangent till kurvan VFI i punkten F. Hans bevis går ut på att visa att $LK < LI$ för alla punkter K på FT som ligger under F och en motsvarande olikhet för alla punkter ovanför F. Han drar av det slutsatsen att alla punkter på FT ligger på samma sida av kurvan och menar att det då följer att FT är tangent. Beviset har luckor och bl.a. förutsätts att $DE > PG$ vilket inte behöver vara fallet. En tydlig definition av begreppet tangent saknas.



Figur 15.5: Barrows version av integralkalkylens huvudsats.

Trots bristerna tror man på resonemangen och att det är möjligt att komplettera dem för att täcka olika fall. Vi hänvisar till Struiks bok för detaljerna.

Låt oss nu tolka Barrows påstående med hjälp av moderna beteckningar. Vi antar att V är origo i ett koordinatsystem där VD är x-axel och att $VD = x$ och kallar $DE = f(x)$. Arean av området $VZGED$ är $S(x)$. Om vi antar att längdenheten $R = 1$ så är då $DF = S(x)$. Kurvan $y = S(x)$ är alltså identisk med kurvan VIF. Riktningskoefficienten för dess tangent i F är lika med $S'(x)$ och konstruktionen av punkten T ger nu att

$$S'(x) = \frac{FD}{DT} = \frac{DE}{R} = DE = f(x)$$

d.v.s. den moderna versionen av integralkalkylens huvudsats. Observera att Barrows resonemang är geometriskt. Det vi betecknar med $f(x)$ är ett avstånd och därmed positivt trots att punkten E ligger under x-axeln. Barrow kunde ritat kurvan $VZGED$ över axeln men då hade figuren blivit plottrigare.

Barrows språk är liksom Cavalieris och Pascals geometriskt. Det är bara Fermats bidrag som använder den då nya algebran och läsaren har förmodligen upptäkt att hans bidrag är mer lättläst än de övrigas. Den nya algebran med dess symbolspråk skulle bli en avgörande faktor för utvecklingen av den nya kalkylen som Newton och Leibniz utformade. Det var framför allt Leibniz, som med sitt intresse för semiotik, som skulle utveckla ett beteckningssystem som stått sig genom århundradena.

15.3 Leibniz, Newton och kalkylen

Det skulle alltså bli två av den tidens främsta vetenskapsmän som formulerade den teori som vi idag kallar differential- och integralkalkylen, som ibland kallas *infinitesimalkalkylen* och ibland bara *kalkylen*. De var båda särpräglade. Newton, av många ansedd som den främste vetenskapsmannen någonsin, kallades av studenterna på Cambridge för ”han som föreläser för väggarna”. Leibniz var ständigt verksam. Han formulerade filosofiska system, konstruerade en räknemaskin, studerade språk och semiotik och ägnande sig åt diplomati, men han kommer också för alltid att vara känd genom Voltaires elaka porträtt av honom som doktor Pangloss i romanen *Candide*.

Det har skrivits mycket om vem som egentligen var först med att lansera kalkylen och om striden mellan Newton och Leibniz eller kanske rättare sagt mellan de båda vetenskapsmännens anhängare. Det torde numera vara allmänt accepterat att de uppfann eller upptäckte den oberoende av varandra ungefär samtidigt. Vi skall titta litet närmare på hur Leibniz och Newton närmade sig begreppet derivata och hur de härledde de vanliga deriveringsreglerna. Vi skall också studera hur de formulerade och visade integralkalkylens huvudsats.

15.3.1 Leibniz första artikel om differentialer från 1684

I artikeln *Nova methodus pro maximis et minimas itemque tangentibus, quae ned fractas ned irrationelles quantitates moratur, et singulare pro illi calculi genus* ("En ny metod att bestämma maxima och minima liksom tangenter, som inte utesluter varken bråk eller irrationella storheter, och en märklig typ av kalkyl för detta") inför Leibniz differentialer och härleder räknelagar. Leibniz använder inte ordet differential i denna artikel. Det sker i senare arbeten. En engelsk översättning av artikeln finns i Struiks bok *A Source Book in Mathematics, 1200–1800*.

Leibniz betraktar ett antal kurvor och betecknar deras ordinator[2] med v, w, y och z och motsvarande abscissor med x. Han nämner aldrig ordet funktion utan använder sig av geometriska bilder. Han skär av ett stycke $\mathrm{d}x$ från x räknat på det vi kallar x-axeln och betecknar med $\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}w$, $\mathrm{d}y$ och $\mathrm{d}z$ motsvarande förändringar längs tangenterna till de aktuella kurvorna i de aktuella punkterna. Han ger nu ett antal räkneregler. Han konstaterar att om a är en konstant så är $\mathrm{d}a = 0$ och $\mathrm{d}(ax) = a\,\mathrm{d}x$. För addition och subtraktion gäller enkla regler. Om t.ex. $v = z - y + w + x$ så är $\mathrm{d}v = \mathrm{d}z - \mathrm{d}y + \mathrm{d}w + \mathrm{d}x$. För multiplikation ger han följande regel

$$\mathrm{d}(xv) = x\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}x.$$

Han motiverar inte sina påståenden men det är väl bara regeln för multiplikation som kräver en förklaring, som skulle kunna se ut på följande sätt:

$$\mathrm{d}(xv) = (x + \mathrm{d}x)(v + \mathrm{d}v) - xv = x\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}v.$$

Leibniz motiverar inte varför han stryker $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}v$ men han anser förmodligen att den är mycket liten i jämförelse med de andra termerna. Han måste ha utgått från att differenserna $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}v$, ... är oändligt små även om det inte uttalas.

Leibniz skriver också upp några vanliga lagar för differentiering:

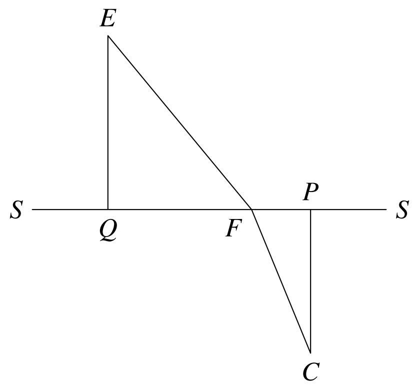
$$\mathrm{d}x^a = ax^{a-1}\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}\frac{1}{x^a} = -\frac{a}{x^{a+1}}\,\mathrm{d}x \quad \text{samt} \quad \mathrm{d}\sqrt[b]{x^a} = \frac{a}{b}\sqrt[b]{x^{a-b}}\,\mathrm{d}x.$$

Någon detaljerad härledning av lagarna gör han inte men han ger numeriska exempel.

För att visa kalkylens effektivitet ger han några tillämpningar, bl.a. studerar han ljusbrytning. Vi ger en beskrivning av hans problemställning och lösning.

> Låt SS vara en rät linje som separerar två media och låt C och E vara punkter på var sin sida om SS. Låt h och r vara tätheten hos medierna på den undre respektive övre sidan om SS. Tätheten är ett mått på det motstånd ljusstrålarna möter och den optiska längden av en väg

[2] I ett rätvinkligt koordinatsystem kallas ofta x-koordinaten för *abscissa* och y-koordinaten för *ordinata*.



Figur 15.6: Ljusbrytning.

är det geometriska avståndet multiplicerat med tätheten. Det förutsätts att ljusstrålen väljer den väg som ger den minsta optiska väglängden. Vi söker alltså en punkt F på SS sådan att den optiska vägen från C till E via F blir minimal. Leibniz inför en rad beteckningar:

$$QP = p, \quad CP = c, \quad EQ = e,$$
$$QF = x, \quad FP = p - x, \quad CF = f \quad \text{och} \quad EF = g.$$

Då är

$$f = \sqrt{cc + pp - 2px + xx} = \sqrt{l} \quad \text{och} \quad g = \sqrt{ee + xx} = \sqrt{m}$$

och vi skall minimera

$$w = h\sqrt{l} + r\sqrt{m}$$

där h och r är tätheterna hos det övre respektive undre mediet. Observera att Leibniz liksom många av hans samtida skriver cc, pp, xx och ee istället för c^2, p^2, x^2 och e^2. För högre potenser än 2 använder han emellertid exponenter.

Eftersom $\mathrm{d}w = 0$ vid ett minimum har vi

$$0 = \frac{h\,\mathrm{d}l}{2\sqrt{l}} + \frac{r\,\mathrm{d}m}{2\sqrt{m}}.$$

Men eftersom

$$\mathrm{d}l = -2(p - x)\,\mathrm{d}x \quad \text{och} \quad \mathrm{d}m = 2x\,\mathrm{d}x$$

får vi att

$$\frac{h(p - x)}{f} = \frac{rx}{g}.$$

Leibniz sätter nu $f = g$ och får då likheten

$$\frac{h}{r} = \frac{x}{p - x} = \frac{QF}{FP}.$$

Alltså förhåller sig sinus för infallsvinkeln till sinus för brytningsvinkeln som förhållandet h/r mellan tätheterna för de båda medierna.

Exemplet visar effektiviteten hos kalkylen. Ett problem som med svårighet kan lösas geometriskt kan omformuleras till ett algebraiskt problem där räkningarna kan utföras relativt mekaniskt. De grundläggande tankarna finns i det exempel av Fermat som vi studerade i avsnitt 15.2.2 men Leibniz har utvecklat en teknik som gör det möjligt att angripa mer generella problem.

I infinitesimalkalkylen är sambandet mellan differentialer och integraler centralt – det som brukar kallas *integralkalkylens huvudsats*. Vi formulerade det i moderna termer i samband med att vi studerade Isaacs Barrows version. I en artikel i *Acta Eruditorum* från 1693 visar Leibniz att differentiering och integration är inversa operationer. Han gör det med hjälp av en figur som kompletteras med en skiss av ett instrument som kan utföra konstruktionerna. Det skulle gå alltför långt att beskriva Leibniz resonemang här utan vi hänvisar till Struiks bok *A Source Book in Mathematics, 1200–1800* där centrala delar av artikeln har översatts till engelska.

15.3.2 Newtons fluxioner

Newton kallar motsvarigheten till Leibniz differentialer för fluxioner. Det var emellertid först så småningom han använde sig av namnet ”fluxion”. Från början använde han sig av begreppet moment (latin: momentum) och i den första upplagan av *Principia* skriver han ”Moment, så fort de är av ändlig storlek upphör de att vara moment.”. Newton har uppenbarligen liksom Leibniz svårigheter med det infinitesimala. I andra boken av *Principia* inför han moment och skriver:

> ”. . . Dessa storheter betraktar jag som variabla och obestämda och växande eller avtagande, som av en kontinuerlig rörelse eller ett flöde; och jag benämner deras ögonblickliga ökningar eller minskningar med moment, så att ökningarna adderas eller betraktas som positiva och minskningarna subtraheras eller betraktas som negativa.”

Han går därefter in på hur man kan beräkna momenten och han konstaterar att, om A, B och C är storheter vars moment är a, b respektive c, så är momentet för AB lika med $aB + bA$ och för ABC lika med $aBC + bAC + cAB$. Vidare är momenten för t.ex.

$$A^2, \quad A^3, \quad A^4, \quad A^{1/2}, \quad A^{-1}, \quad A^{-2} \quad \text{och} \quad A^{-1/2}$$

lika med

$$2aA,\ 3aA^2,\ 4aA^3,\ \tfrac{1}{2}aA^{-1/2},\ -aA^{-2},\ -2aA^{-3} \quad \text{respektive} \quad -\tfrac{1}{2}aA^{-3/2}.$$

Newton bevisar nu dessa räkneregler och den grundläggande lagen är den första som säger att momentet av produkten AB är $aA + bA$. Ur den följer de övriga. Newton härleder momentet för produkten på följande sätt: Han tänker sig en förändring av A och B med a respektive b uppdelad så A och B samtidigt minskas och ökas med halva momenten. Vi får då

$$(A - \tfrac{1}{2}a)(B - \tfrac{1}{2}b) = AB - \tfrac{1}{2}aB - \tfrac{1}{2}bA + \tfrac{1}{4}ab$$

respektive

$$(A + \tfrac{1}{2}a)(B + \tfrac{1}{2}b) = AB + \tfrac{1}{2}aB + \tfrac{1}{2}bA + \tfrac{1}{4}ab.$$

Totala ökningen fås efter subtraktion och den är

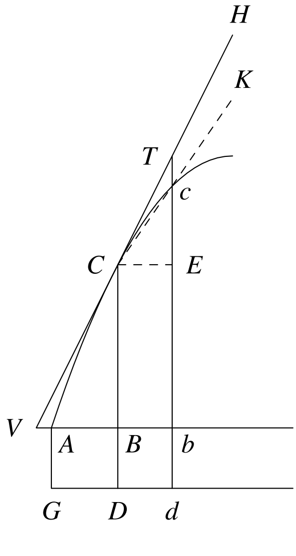
$$aB + bA.$$

Genom konstgreppet att subtrahera halva momenten och addera de andra halvorna slipper Newton diskussionen om produkten av moment som måste vara mycket små i jämförelse med momenten själva.

Principia publicerades 1687. År 1704 publicerade han en fullständig framställning av teorin för fluxioner i ett appendix *Tractatus de quadratura curvarum* till hans verk *Opticks*. Appendixet om fluxioner skrevs emellertid redan 1693. En engelsk översättning med titeln *Two treatises on the quadrature of curves and analysis by equations of an infinite number of terms* av **J. Stewart** publicerades 1745. I denna framställning använder Newton begreppet fluxion istället för moment. Hans utgångspunkt är mekanisk och dynamisk. En fluxion är något som ger upphov till en ”fluent”.

> ”Jag betraktar här matematiska storheter inte som storheter som består av mycket små delar, utan som beskrivna av kontinuerliga rörelser. Linjer beskrivs inte som en samling punkter, utan av kontinuerliga rörelser av punkter; ytor som kontinuerliga rörelser av linjer; volymer som kontinuerliga rörelser av ytor; vinklar som rotationer av halvstrålar; tidsintervall som ett kontinuerligt flöde; och på samma sätt med andra storheter. Detta uppkommer hos saker i naturen och ses dagligen hos kroppar i rörelse.”

Han kallar förändringshastigheterna för fluxioner och de genererade storheterna för fluenter. En fluxion är något som ger upphov till en fluent. Fluxionerna är mycket nära förändringarna av fluenterna per tidsenhet under mycket små tidsintervall.



Figur 15.7: Newtons illustration av fluxion och fluent.

I en figur (15.7) illustrerar Newton sina tankar. Ändpunkten C på sträckan BC rör sig längs en kurva ACc. Den andra ändpunkten B rör sig med likformig hastighet längs Ab. Som fluxion alstrar BC fluenten ABC. Fluxionen till den area som begränsas av kurvbågen AC och sträckorna AB och BC är alltså lika med BC. Detta är ekvivalent med integralkalkylens huvudsats. I figuren finns sträckor AG och BD som båda har längden 1. Rektangeln $ABDG$ illustrerar tidsflödet.

I figuren illustreras också hur tangenten till kurvan i C kan uppfattas som gränsläget av sekanter CK då denna vrider sig kring C och skärningspunkten c närmar sig C.

I samma artikel ställer Newton problemet:

> ”Låt x förändras likformigt och bestäm fluxionen av x^n”.

Om x förändras till $x + o$ så ändras x^n till $(x + o)^n$. Newton har tidigare studerat oändliga serieutvecklingar av $(x + o)^n$ för ett godtyckligt n, som inte behöver vara ett positivt heltal, och visat att

$$(x + o)^n = x^n + nox^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} o^2 x^{n-2} + \ldots .$$

Förhållandet mellan förändringarna $(x + o)^n - x^n$ och o är då

$$nx^{n-1} + \frac{n^2 - n}{2} ox^{n-2} + \ldots .$$

Genom att låta tillskottet o försvinna sluter sig Newton till att fluxionen av x^n är nx^{n-1}.

Newton inför nu beteckningen $\dot{x}$, $\dot{y}$, ... för fluxionen till x, y, ... och han konstaterar också att det är möjligt att bilda fluxioner av fluxioner som han kallar fluxioner av andra ordningen och som han betecknar med $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, ... Dessa ger i sin tur upphov av fluxioner av tredje ordningen o.s.v.

Trots Newtons ambitioner att förklara hur han arbetar med oändligt små storheter så är hans framställning öppen för invändningar och de lät inte vänta på sig. Den mest kända kritikern var, som vi tidigare nämnt, biskop Berkeley. Men med Newtons mekaniska och dynamiska synsätt blir t.ex. det viktiga sambandet mellan integraler och derivata naturligt. På samma sätt som Leibniz kan han algebraiskt bestämma fluxionerna för kända funktioner och härleda de vanliga räknelagarna.

15.3.3 Utveckling av beteckningar och räkneregler

Infinitesimalkalkylen blev ett verktyg som revolutionerade matematiken. Några av Leibniz och Newtons grundläggande idéer har vi presenterat men avgörande faktor för framgången var det effektiva beteckningssystem som framför allt Leibniz utvecklade. Det är genom honom vi har beteckningar som

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \quad \text{och} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

och termer som derivata och integral. Integraltecknet är ett utdraget S som i summa. Newtons beteckning $\dot{x}$ för fluxion eller derivata används numera inom mekaniken.

Kalkylen blev som sagt ett viktigt hjälpmedel för att utveckla matematiken och dess tillämpningar och då framför allt fysiken. Under det arbetet kom flera av de deriverings- och integrationsregler som vi nu använder att härledas. Vi har sett hur Newton och Leibniz formulerade och visade deriveringsregler och under tillämpningarna av kalkylen härleddes senare regler för t.ex. partialintegration och variabelsubstitution. För mer detaljerad information hänvisas till Cajori *A History of Mathematical Notations. Volume II.*

15.4 Två standardverk

När ett nytt område inom matematiken etableras uppstår ett behov av att ge det struktur så att resultaten kan traderas till en större krets. Newtons och Leibniz resultat publicerades i olika arbeten och det saknades en sammanhängande systematisk framställning. Vi skall uppmärksamma två verk som försökte fylla detta behov.

Författaren till det ena är den franske matematikern Guillaume de l'Hopital. Han följde Johann Bernoullis föreläsningar i Paris och höll sedan kontakten när Bernoulli flyttat till Basel. Johann Bernoulli var en av den tidens största matematiker och han kom att förvalta och utveckla den infinitesimalkalkyl som Leibniz skapat. l'Hopital gav 1696 ut boken *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* ("Infinitesimalkalkyl för att förstå krökta linjer") och den kom att användas som lärobok under hela 1700-talet. Den trycktes i många upplagor – den sista 1781. Boken, som kortare kallas *Analyse des infiniment petits*, blev också modell för många läroböcker som gavs ut senare. Den kom därför att utgöra en inkörsport till kalkylen för många matematiskt intresserade och hade därmed en stor påverkan på det matematiska samhället. Det är uppenbart att Johann Bernouillis föreläsningar och kommentarer har haft stort inflytande på både innehåll och form och många anser att det är han som är den egentlige författaren. Det var emellertid l'Hospital som tog sig tid att skriva ner teorierna och ge dem struktur.

Det andra verket har den skotske matematikern Colin MacLaurin som författare. Han var professor i Aberdeen och hans stora arbete är *A Treatise of Fluxions* som kom ut i två volymer 1742. Biskop Berkeleys skarpa kritik av infinitesimalkalkylen träffade en öm punkt och kalkylens förespråkare hade svårt att försvara sig. Men kalkylen fungerade och gav viktiga resultat. MacLaurin ville genom sina böcker ge en sammanhängande och stringent framställning av infinitesimalkalkylen. Han använder sig i stor utsträckning av Eudoxos uttömningsprincip för att verifiera sina påståenden.

15.4.1 L'Hopitals *Analyse des infiniment petits*

L'Hopitals bok är en lärobok i ordets egentliga mening. Den presenterar på ett överskådligt sätt den tidens kunskap om differentialkalkylen och den konkretiserar satser och definitioner med ett stort antal lösta exempel. Resonemangen illustreras med över hundra figurer. Boken är skriven på l'Hopitals modersmål franska och inte på latin. Den är indelad i tio kapitel eller sektioner. I de fyra första avhandlas grundläggande begrepp och satser: Definition av differential, räkneregler, differentialer av vissa elementära funktioner, bestämning av tangenter, maxima och minima samt inflektionspunkter. Därefter tillämpas teorierna på problem om kurvskaror. Att t.ex. söka en kurva som tangerar alla kurvor i en kurvskara engagerade då många matematiker. Boken innehåller några avsnitt om optik.

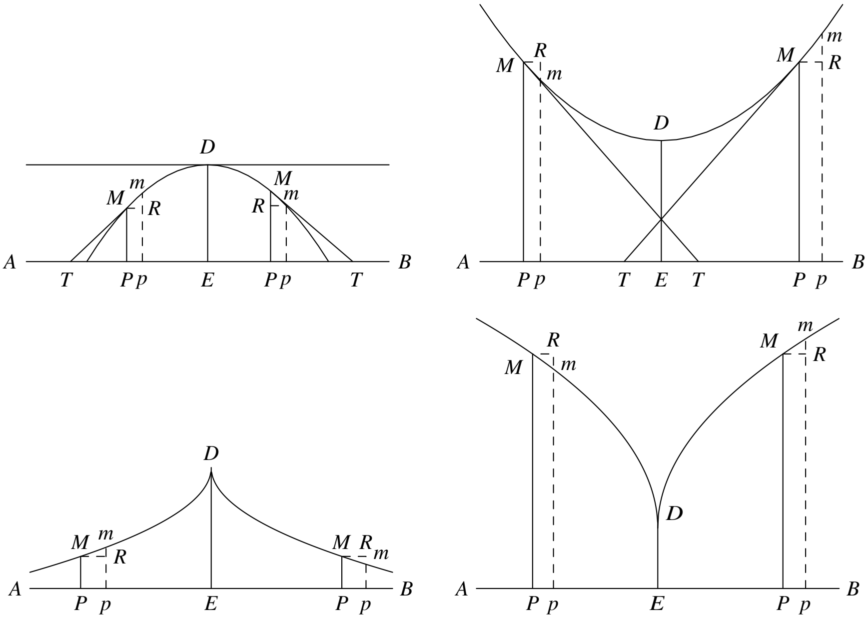
Analyse des infiniment petits, som finns i sin helhet på nätet, är jämförelsevis lättläst för dagens läsare. Vi återger ett avsnitt om hur man bestämmer maxima och minima – något som idag ingår i alla kurser som innehåller differentialkalkyl. Översättningen är gjord från det franska originalet och l'Hopitals beteckningar har bibehållits. Resonemangen bygger på de fyra figurerna i figur 15.8.

> *Kurvan MDM är given; bestäm för AP ett värde AE så att ED är störst eller minst av alla MP.*
>
> När *AP* växer och *PM* också växer är det uppenbart att differensen *Rm* är positiv. Om omvänt, *PM* avtar, så är differensen *Rm* negativ eftersom *AP* alltid växer. Men varje kvantitet som växer eller avtar kontinuerligt kan inte gå från något positivt till något negativt utan att passera oändligheten eller noll; den passerar noll om den avtar och oändligheten om den växer. Alltså måste differensen vara 0 eller oändligheten där den uttryckta kvantiteten är som störst eller minst. Eller om kurvan *MDM* är given så bestämmer man ett värde på *Rm* som i första hand är lika med noll och i andra hand lika med oändligheten och detta kan användas för att upptäcka det sökta värdet *AE* i antingen det ena eller andra av fallen.

L'Hopital fortsätter med att studera tangenterna och visar att en tangent i en maximi- eller minimipunkt antingen är parallell med eller vinkelrät mot A. Kvantiteten *Rm* som är central i resonemanget är uppenbarligen "oändligt liten" och kan identifieras med en differential. Slutsatsen är alltså att i en maximi- eller minimipunkt är differentialen noll eller oändligheten.

Nu tillämpar l'Hopital resultatet på ett stort antal exempel och vi tar upp det första.

> Antag att $x^3 + y^3 = axy$ ($AP = x$, $PM = y$, $AB = a$ i den övre högra figuren i figur 15.8) bestämmer kurvan *MDM*. Genom att bilda differenserna får man $3xx\,\mathrm{d}x + 3yy\,\mathrm{d}y = ax\,\mathrm{d}y + ay\,\mathrm{d}x$ och om *P* är den sökta punkten *E* är
>
> $$\mathrm{d}y = \frac{ay\,\mathrm{d}x - 3xx\,\mathrm{d}x}{3yy - ax} = 0$$



Figur 15.8: Illstration till l'Hopitals resonemang om maxima och minima.

vilket ger

$$y = \frac{3xx}{a}$$

och om vi substituerar detta värde på y i ekvationen $x^3 + y^3 = axy$ finner man att AE har värdet $x = \frac{1}{3}a\sqrt[3]{2}$ vilket ger att ED är störst av alla PM.

Det som dagens läsare slås av i exemplet är att det inte finns några resonemang som visar om det är ett maximum eller minimum. L'Hospital utgår från att kurvan ser ut som den övre högra figuren i figur 15.8. Den aktuella kurvan var förmodligen välkänd.

Resonemangen, som i stor utsträckning stöder sig på figurer, är inte svåra att följa och det finns uppenbara likheter med dagens bevis för att derivatan är lika med 0 i en extrempunkt. Naturligtvis uppfyller de inte dagens krav på stringens. Avsaknaden av en skarp definition av differential eller derivata gör framställningen luddig. Resonemanget med oändligheten känns inte helt övertygande och de funktionskurvor som tankegångarna bygger på är enkla. Senare skall det visa sig att en funktionskurva kan ha ett betydligt mer komplicerat utseende. Trots invändningarna är framställningen en början till en generell framställning av kalkylen. Det skulle dröja nästan tvåhundra år innan den fick den form vi har idag.

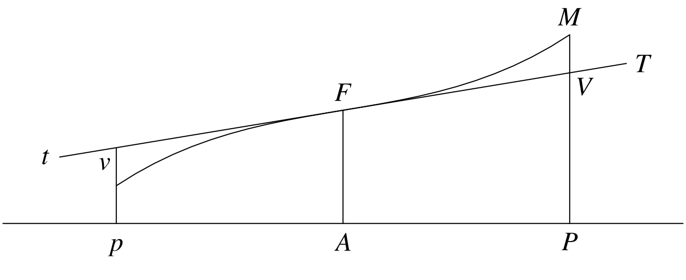
15.4.2 MacLaurins *A Treatise of Fluxions*

A Treatise of Fluxions har en annan karaktär än *Analyse des infiniment petits*. Den är utgiven 1742, nästan femtio år senare. Den består av två volymer och är på sammanlagt 743 sidor. Framställningen i den första delen är geometrisk och begreppen definieras utifrån dynamiska begrepp som hastighet och acceleration. Boken är ett verk i Newtons anda. Det är naturligtvis ingen tillfällighet. Syftet var att försöka ge en logisk sammanhängande teori av Newtons fluxioner efter biskop Berkeleys kritik. Det är antikens framställning av geometrin som fått stå modell. I en inledning skriver MacLaurin:

> ”När sanningshalten av någon del av geometrin ifrågasätts, är den effektivaste metoden att till fullo belysa sanningen och förhindra diskussioner, att härleda den från axiom och grundläggande principer som är oantastliga sanningar med bevis som uppfyller de mest strikta krav i den antika geometriens anda. Detta är syftet med detta verk i vilket vi inte har för avsikt att ändra sir Isaac Newtons fluxionsbegrepp, utan förklara dem och ge strikta bevis utgående från några självklara sanningar; och i arbetet avlägsna alla principer och postulat som förutsätter andra storheter än de som lätt kan uppfattas ha en existens i verkligheten.”

Målsättningen är ambitiös. I de grundläggande avsnitten, som omfattar hela den första volymen, är framställningen som nämnts rent geometrisk och för dagens läsare svårgenomtränglig. Den andra delen har en annan karaktär. Första kapitlet har rubriken ”Om fluxioner av kvantiteter betraktade abstrakt eller representerade av allmänna algebraiska tecken”. Där härleds räkneregler, fluxioner för vissa elementära funktioner inklusive logaritmfunktionen. Han härleder också det vi idag kallar *MacLaurins formel* som är en variant av Taylors formel. Brook Taylor hade 1715 givit sin version och vi återkommer till den i avsnitt 15.5.2. MacLaurin visade följande:

> Låt ordinatan $AF = E$ och sätt $AP = x$ (se figur 15.9). Ordinatan PM är då lika med
>
> $$E + \frac{\dot{E}x}{\dot{x}} + \frac{\ddot{E}x^2}{2\dot{x}^2} + \frac{\dddot{E}x^3}{6\dot{x}^3} + \text{etc.}$$
>
> Här är $\dot{E}$, $\ddot{E}$, $\dddot{E}$ etc. värdet av fluxionerna av PM i E.



Figur 15.9: Illustration till MacLaurins härledning av MacLaurins formel.

MacLaurin visar formeln ungefär som vi gör nu. Han utgår från att PM kan approximeras med ett uttryck $a + bx^2 + cx^2 + dx^3 +$ etc. och bestämmer konstanterna a, b, c, d etc. genom att bilda fluxionerna och sedan sätta $x = 0$. Taylors ursprungliga härledning är, som vi skall se, betydligt mer komplicerad.

Hur löser MacLaurin problemet med maximum och minimum? Redan i den första boken har han visat att i en maximi- eller minimipunkt är fluxionen lika med noll. Han visar också att om fluxionen i en punkt är lika med noll och andra fluxionen i punkten är negativ så har man ett maximum och om den är negativ har man ett minimum. Om både första och andra fluxionerna är lika med noll och tredje fluxionen är skild från noll så har man varken maximum eller minimum o.s.v. Bevisen i första boken är geometriska och svåra att genomskåda. Han återkommer till frågan i andra boken och skriver följande:

”När den första fluxionen av ordinatan försvinner och samtidigt den andra fluxionen är positiv så har ordinatan ett minimum medan den har maximum om andra fluxionen är negativ; det innebär att den är mindre i det förra fallet och större i det senare fallet än ordinator från angränsande delar av kurvan på båda sidor. Detta följer av vad som visats tidigare. . . . [MacLaurin hänvisar till resonemanget och figur 15.9] . . .

Ordinatan *PM* är lika med

$$E + \frac{\dot{E}x}{\dot{x}} + \frac{\ddot{E}x^2}{2\dot{x}^2} + \frac{\dddot{E}x^3}{6\dot{x}^3} + \text{etc.}$$

Låt nu *Ap* ligga på andra sidan om *A* och ha samma storlek som *AP*. Då är ordinatan *pm* lika med

$$E - \frac{\dot{E}x}{\dot{x}} + \frac{\ddot{E}x^2}{2\dot{x}^2} - \frac{\dddot{E}x^3}{6\dot{x}^3} + \text{etc.}$$

Antag nu att $\dot{E} = 0$. Då är

$$PM = E + \frac{\ddot{E}x^2}{2\dot{x}^2} + \frac{\dddot{E}x^3}{6\dot{x}^3} + \text{etc.} \quad \text{och} \quad pm = E + \frac{\ddot{E}x^2}{2\dot{x}^2} - \frac{\dddot{E}x^3}{6\dot{x}^3} + \text{etc.}$$

Om *AP* och *Ap* är tillräckligt små kommer därför både *PM* och *pm* att vara större än *AF* om $\ddot{E}$ är positiv och båda är mindre än *AF* om $\ddot{E}$ är negativ. Men om $\ddot{E}$ är lika med noll liksom $\dot{E}$ och $\dddot{E}$ inte är lika med noll så kommer en av de angränsande ordinatorna *PM* och *pm* vara större än *AF* och den andra mindre. I detta fallet är ordinatan *AF* varken maximum eller minimum.”

MacLaurins *A Treatise of Fluxions* är ett betydelsefullt verk. Den första geometriska första delen ger den teoretiska grunden och den andra algebraiska delen visar vilket effektivt hjälpmedel kalkylen är. Räkneregler och fluxioner av elementära funktioner härleds och framställningen illustreras med ett stort antal exempel. Många har ansett att *A Treatise of Fluxions* trots sina förtjänster inte haft så stor inverkan på matematikens utveckling. Den är emellertid den första systematiska framställningen av Newtons fluxioner och infinitesimalkalkyl som också innehåller nya metoder och resultat av betydelse för kalkylens fortsatta utveckling. Det är t.ex. ett av de första stora verk som på allvar tar upp frågan om konvergens.

15.5 Oändliga serier

Samtidigt som infinitesimalkalkylen utvecklades så gjordes banbrytande insatser när det gällde beräkning av oändliga serier och framställning av funktioner med vad vi idag kallar potensserier. Arbetena har ibland men långt ifrån alltid samband med kalkylen, men de kom att utgöra en viktig del av det som Euler skulle kalla *Analysin infinitorum* (”Analys av det oändliga”) och som vi idag helt enkelt kallar *Analys*.

Vi skall gå litet närmare in på fyra arbeten: Newtons binomialutveckling där exponenten är ett positivt eller negativt rationellt tal, Taylors utveckling av funktioner, Jacob Bernoullis bevis för att den harmoniska serien $1+1/2+1/3+1/4+\dots$ är divergent samt Eulers härledning av summan av serien $1 + 1/4 + 1/9 + 1/16 + 1/25 + \dots$.

15.5.1 Newton och binomialutvecklingen

I två brev från 1676 till sekreteraren i Royal Society beskriver Newton hur han lyckats utveckla $(1+x^2)^{m/n}$ i en serie av positiva heltalspotenser av x. Sekreteraren vidarebefordrade sedan breven till Leibniz.

Det första brevet är daterat 13 juni och i det skriver Newton upp följande teorem som enligt honom själv innebär att många räkningar kan förkortas betydligt:

$$(P+PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \text{etc.}$$

där digniteten m/n kan vara ett heltal eller ett brutet tal; ett positivt tal eller ett negativt. Talet A är lika med den första termen $P^{\frac{m}{n}}$, B är lika med den andra termen $\frac{m}{n}AQ$, C är lika med den tredje termen $\frac{m-n}{2n}BQ$ o.s.v. Han har kommit fram till teoremet genom att studera metoder för rotutdragning. Dessa är idag obsoleta och vi avstår från att försöka rekonstruera hur Newton kommit fram till sitt teorem.

Newton ger några exempel och visar bl.a. att

$$\sqrt{c^2+x^2} = (c^2+x^2)^{\frac{1}{2}} = c + \frac{x^2}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7} + \frac{7x^{10}}{256c^9} + \text{etc.}$$

I det andra brevet från 24 oktober söker Newton mönster i koefficienterna och han kommer fram till att koefficienten för x^n i utvecklingen av $(1-x^2)^m$ för $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$ är lika med

$$\begin{aligned}
&\frac{m-0}{1},\\
&\frac{m-0}{1}\times\frac{m-1}{2},\\
&\frac{m-0}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3},\\
&\frac{m-0}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3}\times\frac{m-3}{4},\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

Newton antar att samma mönster gäller även för $m = 1/2$ och får

$$(1-x^2)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{16}x^6 - \text{etc.}$$

Han kontrollerar resultatet genom att multiplicera högerledet med sig själv och finner att produkten är lika med $1-x^2$ då de övriga termerna tar ut varandra. Han gör också motsvarande kontroll för $m = 1/3$. För detaljerna hänvisas till Struiks bok *A Source Book in Mathematics, 1200–1800* där breven är översatta till engelska. I bokverket *Sigma*, del VII, finns också utdrag ur breven.

Newtons arbete är egentligen rent algebraiskt och som sådant ett mästerverk. Han ser mönster och formulerar dem med hjälp av den då relativt nya algebran. Han säger visserligen att serierna är konvergenta men utan en definition av begreppet konvergens är det naturligtvis svårt att bevisa att så är fallet. Med det konvergensbegrepp som infördes långt senare visar det sig att serierna konvergerar för vissa x men inte för alla.

15.5.2 Taylorutvecklingen

Den engelske matematikern Brook Taylor valdes 1714 till sekreterare i Royal Society och som sådan hade han stort inflytande inom vetenskapsvärlden. Som matematiker är han framför allt känd för boken *Methodus incrementorum directa et inversa* som kom ut 1715. Han inför där metoder som partialintegration och variabelsubstitution samt ger formeln för derivatan av en invers. Ett avsnitt ägnas åt det vi idag kallar *Taylors formel* som vi skriver

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{f''(a)}{2!}h^2 + \frac{f'''(a)}{3!}h^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \ldots$$

där serien konvergerar under vissa villkor på funktionen f. Taylors formulering ser annorlunda ut. I de flesta fall har ändamålsenliga beteckningar och terminologi inneburit förenklingar och ett förtydligande. Trots det ser man likheterna mellan den formel Taylor ger och den moderna.

Som titeln anger handlar boken om ”metoder med direkta och inversa ökningar” och Taylor studerar differenser av olika ordningar. I en talföljd a_k kan man bilda differenserna $a_{k+1} - a_k$ och får då en ny talföljd Δa_k. Differenserna av denna följd bildar i sin tur en talföljd som kallas andra ordningens differenser av a_k och den betecknas $\Delta^2 a_k$. Så kan man fortsätta och bilda differenser av allt högre ordning. Ett intressant mönster som Taylor upptäckte är följande: Vi kan bilda följderna

$$a_k' = a_k + \Delta a_k, \quad a_k'' = a_k' + \Delta a_k', \quad a_k''' = a_k'' + \Delta a_k'', \quad \text{etc.}$$

och efter en del räkningar får vi att

$$a_k'' = a_k + 2\Delta a_k + \Delta^2 a_k, \quad a_k''' = a_k + 3\Delta a_k + 3\Delta^2 a_k + \Delta^3 a_k, \quad \text{etc.}$$

Vi ser samma mönster som i binomialteoremet och får

$$a_k^{(n)} = a_k + \frac{n}{1} \cdot \Delta a_k + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}\Delta^2 a_k + \text{etc.}$$

Struik har i *A Source Book in Mathematics, 1200–1800* gjort en översättning av den del av Taylors bok som rör Taylorutvecklingen. Han har också moderniserat beteckningar för att göra den mer begriplig för dagens läsare. Trots det är det inte särskilt lätt att följa resonemangen. Vi gör en fri tolkning och visar i stort sett bara resultaten.

Taylor betraktar två variabler x och z som beror av varandra och han låter z vara den oberoende variabeln. Han ger z ett tillskott Δz och x får då tillskottet Δx. Vidare sätter han $v = n\Delta z$ och genom att utnyttja det resultat om differenser som han härlett får han att om z övergår till $z + v$ så övergår x till

$$x + \frac{n}{1}\Delta x + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}\Delta^2 x + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}\Delta^3 x + \text{etc.}$$

Han är intresserad av att se hur denna förändring beror av Δz. Detta framgår bättre om vi skriver om uttrycket på följande sätt

$$x + \frac{n\Delta z}{1}\frac{\Delta x}{\Delta z} + \frac{n\Delta z}{1} \cdot \frac{(n-1)\Delta z}{2}\frac{\Delta^2 x}{(\Delta z)^2} + \frac{n\Delta z}{1} \cdot \frac{(n-1)\Delta z}{2} \cdot \frac{(n-2)\Delta z}{3}\frac{\Delta^3 x}{(\Delta z)^3} + \text{etc.}$$

Taylor observerar att $v = n\Delta z$ och sätter $\dot{v} = (n-1)\Delta z = v - \Delta z$, $\ddot{v} = (n-2)\Delta z = \dot{v} - \Delta z$ etc. och uttrycket kan skrivas

$$x + v\frac{\Delta x}{1 \cdot \Delta z} + v\dot{v}\frac{\Delta^2 x}{1 \cdot 2\Delta z^2} + v\dot{v}\ddot{v}\frac{\Delta^3 x}{1 \cdot 2 \cdot 3(\Delta z)^3} + \text{etc.}$$

Nu låter Taylor Δz bli oändligt litet och han ersätter det med $\dot{z}$ och Δx med $\dot{x}$, $\Delta^2 x$ med $\ddot{x}$, etc. Han säger att då måste $v = \dot{v} = \ddot{v} =$ etc. Om z övergår till $z + v$ så kommer x att övergå till

$$x + \dot{x}\frac{v}{1 \cdot \dot{z}} + \ddot{x}\frac{v^2}{1 \cdot 2 \cdot (\dot{z})^2} + \dddot{x}\frac{v^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot (\dot{z})^3} + \text{etc.}$$

Likheterna med dagens formulering av Taylors formel är uppenbara. Taylor vill uppenbarligen uttrycka sin formel med hjälp av Newtons fluxioner men om vi använder Leibniz beteckningar så blir likheterna med dagens version av Taylors formel uppenbara. Då är nämligen

$$\frac{\dot{x}}{\dot{z}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}, \quad \frac{\ddot{x}}{(\dot{z})^2} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}z^2}, \quad \frac{\dddot{x}}{(\dot{z})^3} = \frac{\mathrm{d}^3 x}{\mathrm{d}z^3}, \quad \text{etc.}$$

Taylors arbete är rent algebraiskt och någon diskussion om konvergens finns inte. Invändningar kan naturligtvis göras mot övergången från ändliga tillskott till oändligt små, men resultatet har visat sig vara korrekt i många fall och det har blivit ett oundgängligt verktyg både för matematiken i sig och för dess tillämpningar.

15.5.3 Bröderna Bernoulli och den harmoniska serien

Under 1600-talet väcktes intresset för oändliga serier och många av de främsta matematikerna ägnade sig åt att försöka bestämma summor av ett oändligt antal termer. En serie som var av speciellt intresse var den harmoniska

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

Jacob Bernoulli och hans yngre bror Johann räknas som några av den tidens största matematiker. Jacob publicerade mellan 1689 och 1704 fem artiklar om oändliga serier. I den första *Proportiones arithmeticae de seriebus infinitiv earumque summa finita* visar han att den harmoniska serien är divergent. Det verkar som om Jacob Bernoulli trodde att han var den förste som visat detta men så är inte fallet. Nicole Oresme hade redan på 1300-talet gett ett elegant bevis som vi presenterat i avsnitt 15.1. Ett annat bevis gavs av den italienske matematikern **Pietro Mengoli** (1626–86). Mengoli visade för övrigt också att den alternerande serien $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4+$ etc. konvergerar mot $\ln 2$.

Jacob Bernoulli ger faktiskt två bevis. Det första är ett motsägelsebevis som hans bror Johann visat honom och det andra är ett bevis mer i Oresmes anda. Han drar också geometriska slutsatser av resultatet. Vi skall skissera bevisen. För detaljerna hänvisar vi till Struiks *A Source Book in Mathematics, 1200–1800* där de delar av artikeln som rör beviset av den harmoniska seriens divergens är översatta.

I motsägelsebeviset utnyttjar Bernoulli att han tidigare visat att serien

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots$$

har summan 1. Det inses t.ex. genom omskrivningen

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots$$

eftersom alla termer utom de båda första tar ut varandra. Bernoullis resonemang är något mer komplicerat men för enkelhets skull utelämnar vi det. Han gör omskrivningen

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \ldots = \frac{1}{2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{3}{3 \cdot 4} + \frac{4}{4 \cdot 5} + \ldots$$

och skriver om A som en oändlig serie av oändliga serier på följande sätt

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots \\ \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots \\ \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots \\ \frac{1}{4 \cdot 5} + \ldots \\ \ldots \end{aligned}$$

Den första summan är lika med 1, den andra $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, den tredje $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$, den fjärde $\frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$ etc. Alltså har vi att

$$A = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = 1 + A$$

vilket innebär en motsägelse. Bernoulli drar nu slutsatsen att A inte kan vara ändlig vilket med vårt språkbruk innebär att serien divergerar.

Jacob Bernoullis eget bevis är inte ett motsägelsebevis. Han visar att den harmoniska seriens summa måste vara större än varje tal. Han väljer ut två på varandra följande termer $1/a$ och $1/(a+1)$ och konstruerar den geometriska talföljd där dessa är de båda första termerna. Han tar med så många termer i den harmoniska serien så att den sista är mindre än $1/a^2$. Summan av motsvarande termer i den harmoniska serien är större än summan av termerna i den geometriska talföljden som i sin tur är större än 1. Eftersom det finns oändligt många sådana avsnitt i den harmoniska serien så måste dess summa vara större än varje givet tal. För detaljerna hänvisar vi till Struiks bok.

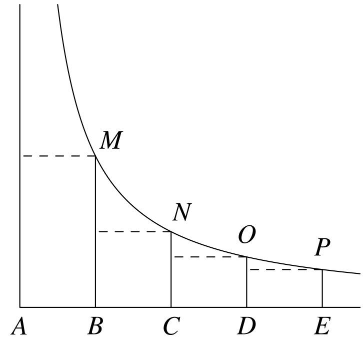
Efter beviset fortsätter Bernoulli med att, ”om det är tillåtet att göra ett hopp in i geometrin”, studera en hyperbel där asymptoterna är vinkelräta. Han konstaterar att divergensen av den harmoniska serien medför att området mellan en hyperbelgren och de båda asymptoterna är oändligt stort. Vi hänvisar till figur 15.10 med bildtext.

Två av den tidens främsta matematiker visar på olika sätt att den harmoniska serien är divergent. Det är anmärkningsvärt att deras bevis är betydligt mer komplicerade än det som Oresme levererade trehundra år tidigare.

Både Jacob och Johann Bernoulli kunde visa att en annan serie, nämligen

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \text{etc.}$$

är konvergent och att dess summa är mindre än 2. De lyckades däremot inte beräkna det exakta värdet. Problemet att bestämma seriens exakta värde formulerades av Pietro Mengoli 1644 och har kommit att kallas *Baselproblemet*. Det löstes av Leonhard Euler och vi presenterar hans lösning i nästa avsnitt.



Figur 15.10: På bilden visas en del av en hyperbelgren samt hyperbelns båda asymptoter. Hyperbelns medelpunkt är A. Punkterna B, C, D, E etc. är punkter sådana att $AB = BC = CD = DE =$ etc. Då är enligt teorin för kägelsnitt ordinatorna BM, CN, DO, EP etc. omvänt proportionella mot AB, AC, AD, AE, etc. Då alla rektanglarna i figuren har samma bas så är summan av deras areor proportionella mot summan $1/1 + 1/2 + 1/3 + 1/4+$ etc. Eftersom den harmoniska serien är divergent är dess summa större än varje givet tal och det gäller i än högre grad arean mellan hyperbelgrenen och asymptoten. Den sistnämnda arean är alltså oändlig.

15.5.4 Eulers lösning av Baselproblemet

Leonhard Euler presenterade sin lösning av Baselproblemet inför Vetenskapsakademin i S:t Petersburg den 5 december 1735. Han visade att

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.} = \frac{\pi^2}{6}$$

Euler var då bara 28 år och resultatet gav eko i den matematiska världen. Hans lösning visade prov på fantasi och algebraisk fingerfärdighet. Han tänjde på gränserna och resonemangen uppfyller inte dagens krav på stringens. Kanske hade han en känsla att några generaliseringar var väl djärva, eftersom han var noga med att kontrollera resultatet numeriskt innan han presenterade det för vetenskapssamhället. Att hans metoder var korrekta visades mer än hundra år senare av Weierstrass.

Euler utgick ifrån utvecklingen av $\sin x$ som är

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \text{etc.}$$

Han dividerar båda leden med x och får

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \text{etc.}$$

Denna funktion har nollställena π, $-\pi$, 2π, -2π, 3π, -3π, etc. Euler generaliserar nu faktorsatsen till funktioner med oändligt många nollställen. Eftersom högerledet i utvecklingen av $\sin x/x$ är lika med 1 drar han slutsaten att vi har

$$\begin{aligned}\frac{\sin x}{x} &= \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{2\pi}\right)\left(1 - \frac{x}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{3\pi}\right) \text{ etc.} \\ &= \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \text{ etc.}\end{aligned}$$

Euler bestämmer nu koefficienten för x^2 till

$$-\frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{4\pi^2} - \frac{1}{9\pi^2} - \text{etc.} = -\frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \text{etc.}\right)$$

och identifierar den med motsvarande term i serieutvecklingen som är $-1/3! = -1/6$. Alltså har vi att

$$\frac{1}{\pi^2}\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \text{etc.}\right) = \frac{1}{6}$$

d.v.s.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \text{etc.} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Euler visade senare att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{och} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{495}$$

och att man med hans metoder kunde beräkna

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

när $s = 2k$ är ett jämnt heltal. Euler lyckades däremot inte bestämma summan när s är udda.

Studiet av funktionen $\zeta(s)$ utvidgades till inte bara reella s utan också komplexa. Dirichlet och Riemann visade under 1800-talet att den hade stor betydelse inom talteorin och är ett av de mest centrala problemen som fortfarande är olöst. Det kallas *Riemanns ζ-hypotes* som säger att alla icke-reella nollställen till funktionen $\zeta(s)$ har realdelen $1/2$.

Eulers lösning av Baselproblemets innebar ett genombrott och gav honom en hög status bland samtidens matematiker. Han skulle bli en av de mest produktiva vetenskapsmännen någonsin och det är knappast någon överdrift att påstå att Euler var 1700-talets störste matematiker.

15.6 Eulers *Introductio in analysin infinitorum*

Ett av mest betydelsefulla verken för matematikens utveckling är Eulers *Introductio in analysin infinitorum* (”Introduktion till analys av det oändliga”). I det formulerar Euler många av de egenskaper hos elementära funktioner som är centrala delar av grundläggande analyskurser. Han inför också en rad beteckningar som nu blivit standard. Verket består av två böcker. Den första är algebraisk och i den spelar serier en stor roll. Den andra är geometrisk och kurvor av olika slag analyseras och kategoriseras. Det är framför allt den första delen som innehåller delar som har blivit standard i matematikundervisning på gymnasier och högskolor. Vi skall därför i huvudsak studera delar av den.

En engelsk översättning, *Introduction to Analysis*, av **Ian Bruce** finns tillgänglig på `http://www.17centurymaths.com`. Den inleds med en översikt över kapitlens innehåll. Parallellt med den engelska översättningen finns den latinska ursprungstexten. Eulers text är förhållandevis modern och dagens student kan säkert känna igen sig i många delar. Vi skall ta upp delar av hans framställning av exponentialfunktionen, logaritmfunktionen och de trigonometriska funktionerna samt hans definition av funktionsbegreppet.

15.6.1 Begreppen variabel och funktion

I det första kapitlet definierar Euler begrepp som variabel och funktion. Han säger att

> ”En variabel är en obestämd eller universell storhet, som i sig innehåller alla bestämda värden.”

och

> ”En funktion av en variabel är ett analytiskt uttryck av något slag sammansatt av denna variabel och av konstanta tal och storheter.”

Euler noterar att en funktion också är en variabel. Det är anmärkningsvärt att Euler tillåter flervärda funktioner och han återkommer till funktionsbegreppet i den andra boken som behandlar kurvor. Definitionen är ett steg mot dagens precisering av begreppet funktion.

15.6.2 Exponential- och logaritmfunktioner

I den första bokens sjätte kapitel introducerar Euler exponential- och logaritmfunktionerna – i den ordningen. Napier och Briggs hade konstruerat sina logaritmtabeller utan tillgång till exponentialfunktionen. Eulers framställning ansluter sig mycket nära till den i vår tids läroböcker – eller snarare tvärtom. Dagens behandling av exponential- och logaritmfunktionen har Eulers framställning som modell. Framställningen i *Introductio in analysin infinitorum* är föredömligt klar. Den är lättläst och delar borde utan vidare kunna läsas av dagens studenter. Euler avslutar kapitlet med några konkreta tillämpningar där en av dem är beräkning av ränta på ränta. Vi tar upp ett exempel som är litet mer fantasifullt. Observera att Euler betecknar logaritmer med basen 10 med l.

> ”Människosläktet skall enligt Bibeln ha förökats utifrån de sex personer som överlevde den stora flodvågen. Antag att antalet personer efter tvåhundra år har stigit till 1 000 000. Med hur stor andel har befolkningen ökat per år?
>
> Vi sätter den sökta andelen till $1/x$. Då kommer befolkningen efter två sekler att vara lika med
> $$6 \cdot \left(\frac{x+1}{x}\right)^{200} = 1000000$$
> vilket ger
> $$\frac{x+1}{x} = \left(\frac{1000000}{6}\right)^{\frac{1}{200}}.$$
> Därför är
> $$l\frac{x+1}{x} = \frac{1}{200} l \frac{1000000}{6} = \frac{1}{200} \cdot 5{,}2218487 = 0{,}0261092$$
> och genom att bestämma det tal vars logaritm är lika med högerledet får vi
> $$\frac{x+1}{x} = \frac{1061963}{1000000} \quad \text{och} \quad 1000000 = 61963x$$
> vilket approximativt ger
> $$x = 16.$$
>
> Det är därför tillräckligt att befolkningen ökar med $1/16$ per år för att uppnå det önskade antalet; denna ökning verkar inte särskilt stor med tanke på invånarnas långa liv. Men om befolkningen skulle öka med samma andel under 400 år skulle antalet invånare stiga till
> $$1000000 \cdot \frac{1000000}{6} = 166666666666$$
> och med deras försörjningsbehov kommer inte jordklotet längre att vara sig likt.”

I nästa kapitel härleder Euler serieutvecklingar av exponential- och logaritmfunktionerna. Här skiljer sig framställningen avsevärt från dagens. Euler använder inte resultaten från Taylor och MacLaurin där utvecklingarna ges med hjälp av derivator eller fluxioner. Överhuvudtaget är det svårt att finna begrepp som differentialer och integraler i *Introductio in analysin infinitorum*. Eulers härledning uppfyller knappast dagens krav på stringens men den är fantasifull och resultatet är korrekt. Framställningen konkretiseras med numeriska exempel och det verkar som om Euler genom dem fick bekräftelse på att hans resonemang ledde rätt. Vi skall mycket översiktligt beskriva hans tillvägagångssätt.

Euler utgår från att $a^0 = 1$ och han antar att $a > 1$. Om ω är ett oändligt litet tal så är

$$a^{\omega} = 1 + \psi$$

där ψ också är ett oändligt litet tal. Han sätter $\psi = k\omega$ och bildar

$$a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i.$$

Han sätter $i = z/\omega$ där z är ett ändligt tal.[3] Eftersom ω är oändligt litet så är i oändligt stort. Han använder nu binomialteoremet och får

$$a^z = \left(1 + \frac{kz}{i}\right)^i = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(i-1)}{1 \cdot 2i}k^2z^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2i \cdot 3i}k^3z^3 + \text{etc.}$$

Eftersom i är ett oändligt stort är enligt Euler

$$\frac{i-1}{i} = \frac{i-2}{i} = \frac{i-3}{i} = \text{etc.} = 1$$

och vi får den bekanta utvecklingen

$$a^z = 1 + kz + \frac{k^2z^2}{1 \cdot 2} + \frac{k^3z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

där k är en konstant som beror på a. För ett värde på a är $k = 1$ och han inför beteckningen e för detta a. Vi har då

$$\mathrm{e}^z = 1 + z + \frac{z^2}{1 \cdot 2} + \frac{z^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \text{etc.}$$

Euler beräknar värdet på konstanten e och får

$$\mathrm{e} = 2{,}71828182845904523536028.$$

På liknande sätt visar nu Euler att

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}$$

om basen för logaritmen är just talet e. Euler kallar sådana logaritmer för naturliga eller hyperboliska. För detaljerna hänvisas till Ian Bruces översättning.

[3] Här är i inte en beteckning för den imaginära enheten utan för ett oändligt stort tal. i är första bokstaven i "infinitorum".

15.6.3 Trigonometriska funktioner

Efter att ha behandlat exponential- och logaritmfunktionerna övergår Euler i kapitel 8 till de trigonometriska funktionerna och han härleder samband mellan dessa båda typer av funktioner. Han inleder kapitlet på följande sätt:

> ”Efter att ha undersökt logaritmer och exponentiella storheter måste cirkelbågar och sinus och cosinus av dessa undersökas därför att de utgör andra typer av transcendenta funktioner, men också på grund av de logaritmer och exponenter av dessa som uppstår när de tillämpas på imaginära storheter.”

Studiet av de trigonometriska funktionerna börjar med orden:

> ”Därför kan vi sätta radien till denna cirkel och hela sinus=1 och det är klart att omkretsen av denna cirkel inte kan uttryckas exakt med rationella tal; men en approximation av halva omkretsen av denna cirkel har visat sig vara
>
> = 3.14159 26535 89793 (Euler ger totalt 127 decimaler) . . .
>
> och för enkelhet skull skriver jag detta tal som
>
> $$\pi,$$
>
> så att π är halva omkretsen av en cirkel med radien = 1, eller π är längden av bågen som motsvarar 180°.”

Här införs alltså den välbekanta beteckningen för förhållandet mellan cirkeln omkrets och diameter.

Euler definierar de trigonometriska funktionerna utifrån enhetscirkeln. Han skriver upp formlerna för $\sin(y+z)$, $\sin(y-z)$, $\cos(y+z)$ och $\cos(y-z)$ utan bevis. Han anser tydligen att de bör vara välbekanta för läsaren. Han använder dem för att bevisa en rad andra formler och några av dem som t.ex. formlerna för dubbla vinkeln är bekanta för dagens gymnasieelever. Han skriver upp den trigonometriska ettan

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

och använder den som utgångspunkt för att i sina studier införa komplexa tal. Vi kan ju skriva

$$\cos^2 x + \sin^2 x = (\cos x + \sqrt{-1}\sin x)(\cos x - \sqrt{-1}\sin x).$$

Observera att Euler här använder beteckningen $\sqrt{-1}$, som han senare skulle beteckna med i. I *Introductio in analysin infinitorum* betyder i, som vi tidigare nämnt, ett oändligt stort tal.

Med hjälp av formlerna för $\sin(y+z)$ och $\cos(y+z)$ visar nu Euler först likheterna

$$(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)(\cos z + \sqrt{-1}\sin z) = \cos(y+z) + \sqrt{-1}\sin(y+z),$$
$$(\cos y - \sqrt{-1}\sin y)(\cos z - \sqrt{-1}\sin z) = \cos(y+z) - \sqrt{-1}\sin(y+z)$$

och med hjälp av dem

$$\cos ny + \sqrt{-1}\sin ny = (\cos y + \sqrt{-1}\sin y)^n,$$
$$\cos ny - \sqrt{-1}\sin ny = (\cos y - \sqrt{-1}\sin y)^n.$$

Han får då att

$$\cos ny = \frac{(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)^n + (\cos y - \sqrt{-1}\sin y)^n}{2},$$
$$\sin ny = \frac{(\cos y + \sqrt{-1}\sin y)^n - (\cos y - \sqrt{-1}\sin y)^n}{2\sqrt{-1}}.$$

Han gör nu samma typ av resonemang som då han härledde serietutvecklingen av exponentialfunktionen. Han sätter $z = ny$, låter y vara oändligt litet och n oändligt stort samt använder binomialteoremet. När y är oändligt litet så är $\sin y = y$ och $\cos y = 1$ och han får de välkända utvecklingarna

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{1\cdot 2} + \frac{z^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{z^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \text{etc.},$$
$$\sin z = z - \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{z^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \frac{z^7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7} + \text{etc.}$$

Ur dessa likheter kan han sedan härleda det vi idag kallar Eulers formler

$$\cos z = \frac{e^{\sqrt{-1}z} + e^{-\sqrt{-1}z}}{2},$$
$$\sin z = \frac{e^{\sqrt{-1}z} - e^{-\sqrt{-1}z}}{2\sqrt{-1}}.$$

Euler härleder fler serieutvecklingar och använder dem till att bestämma π. Han visar bl.a. att

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \text{etc.}$$

som var ett välkänt resultat som Euler tillskriver Leibniz, men som visats tidigare av den skotske matematikern **James Gregory** (1638–75).

Introductio in analysin infinitorum är ett innehållsrikt verk och vi har bara refererat och kommenterat en liten del. Som vi nämnt tidigare är det svårt att i boken finna de centrala begreppen differential och integral från kalkylen. Euler ville tydligen härleda sina resultat utan dem. Han skulle senare publicera två omfattande verk *Institutiones calculi differentialis* (”Grunderna i differentialkalkylen”) (1755) och *Institutiones calculi integralis* (”Grunderna i integralkalkylen”) (1768), som hade stort inflytande på utvecklingen av infinitesimalkalkylen.

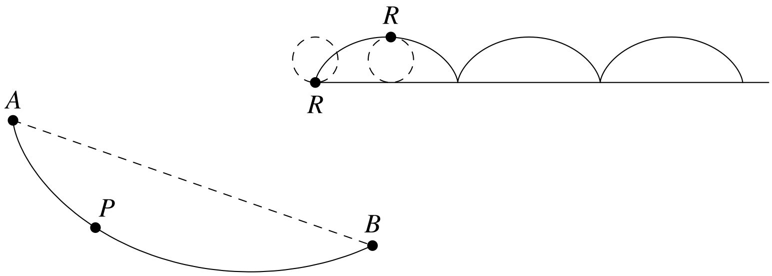
15.7 Matematik och fysik

Infinitesimalkalkylen innebar att fysikens lagar kunde ges en matematisk form. Samtidigt kom problemställningar inom fysiken att medverka till att skapa nya begrepp och metoder inom matematiken. Samspelet mellan matematik och fysik innebar en utveckling av båda ämnena. Det mest slående exemplet är naturligtvis Newtons *Principia* men det följdes av en rad viktiga arbeten. Flera i den matematiska släkten Bernoulli liksom Euler bidrog med viktiga arbeten om hydrodynamik. Lagrange omformulerade Newtons lagar, Laplaces *Traité de mécanique céleste* var ett storartad försök att genom matematiken ge en sammanhängande bild av universum och Fourier studerade värmeledning genom att utveckla en teknik som kom att bli revolutionerande. Senare under 1800-talet utvecklades elektromagnetismen genom att den kunde formuleras matematiskt. 1900-talets nya fysik med relativitetsteori och kvantmekanik är otänkbar utan avancerad matematik.

Vi skall ge några problem från fysiken som gett upphov till nya matematiska teorier och inleder med ett klassiskt exempel, det s.k. *brachistochronproblemet*, som ledde till det som kallas *variationskalkyl*. Vi fortsätter med att studera problem som beskrivs med hjälp av de tre klassiska partiella differentialekvationerna vågekvationen, Laplaces ekvation och värmeledningsekvationen.

15.7.1 Brachistochronproblemet

Johann Bernoulli ställde i den tyska tidskriften *Acta Eroditorum* följande problem som en utmaning till ”de mest briljanta matematikerna i världen”: ”Två punkter A och B är givna i ett vertikalt plan. Vilken kurva skall en punkt P följa för att komma från A till B på kortast möjliga tid om punkten bara påverkas av gravitationen?”.



Figur 15.11: Den stora kurvan är den sökta. I övre högra hörnet visas hur punkten R på den rullande cirkeln beskriver en cykloid. Den sökta kurvan är en förstorad del av en spegling av cykloiden. Cykloiden hade studerats tidigare. Den namngavs av Galilei 1599. Den franske matematikern **Giles de Roberval** visade 1634 att arean under en cykloid är tre gånger arean av cirkeln som generar den och den brittiske arkitekten **Christopher Wren** visade 1658 att cykloidens längd är fyra gånger den genererande cirkelns diameter.

Problemet löstes av Newton, Leibniz, Jacob Bernoulli, l’Hopital och **Ehrenfried von Tschirnhaus** och alla lösningarna utom l’Hopitals publicerades i *Acta Eroditorum*.

En första tanke är att punkten måste följa den kortaste vägen, d.v.s. sträckan mellan A och B. Vid närmare eftertanke skulle ett brantare förlopp i början kunna uppväga en eventuell uppförsbacke i slutet. Så är också fallet. Punkten skall följa en *cykloid*, som är den kurva som en fix punkt R på en cirkel beskriver om cirkeln rullar längs en rät linje som i figuren längst upp till höger i figur 15.11. Det är den undre kurvan som löser brachistochronproblemet och den är en förstorad del av spegelbilden av den övre.

Problemet kom alltså att kallas *brachistochronproblemet*. Namnet ”brachistochron” kommer från grekiskan, ”brachistos” betyder ”kortast” och ”chronos” betyder ”tid”. Det är ett optimeringsproblem men skiljer sig från dem vi tidigare diskuterat, där vi söker en punkt som ger ett maximum eller minimum. Här söker vi en kurva och det gör situationen mer komplex. Jacob Bernoulli gav en lösning som visade på en metodik som skulle kunna användas mer generellt. Den kom att kallas variationskalkyl och vidareutvecklades senare av Euler och Lagrange. Mycket förenklat antar man att den kurva man söker är $y = y(x)$ och tänker sig att den varieras med hjälp av en parameter ϵ till $y = y(x, \epsilon)$, tecknar den storhet man vill optimera och utnyttjar att i ett maximum eller minimum är derivatan med avseende på ϵ lika med noll.

Detta leder till ett samband mellan $y(x)$ och dess derivator, en differentialekvation, och med hjälp av den kan man bestämma $y(x)$.

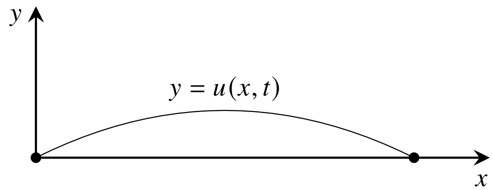
Brachistochronproblemet är ett exempel på hur ett problem från fysiken kan ge upphov till en ny matematisk teori som i sin tur kan användas för att tackla mer generella fysikaliska problem.

15.7.2 Några partiella differentialekvationer

Matematiska formuleringar av fysikaliska lagar och problem som t.ex. brachistochronproblemet leder ofta till differentialekvationer. Den obekanta är en funktion och man känner samband mellan den obekanta funktionen och dess derivator. För att hantera problem från verkligheten räcker det i regel inte med att studera funktioner av en variabel. Ofta beror den funktion man söker av flera variabler som t.ex. de tre rumskoordinaterna, tiden, utgångslägen och utgångshastigheter. Den sökta funktionen skall deriveras med avseende på fler variabler och derivatorna kallas *partiella derivator* och differentialekvationerna *partiella differentialekvationer*. Vi skall ta upp tre partiella differentialekvationer som exempel på hur de kan användas för att beskriva fysikaliska fenomen. De är vågekvationen, som beskriver rörelserna hos en svängande sträng, Laplaces ekvation, som beskriver vissa jämviktsproblem, samt värmelednings- eller diffusionsekvationen, som beskriver hur temperaturen varierar i ett ledande material.

Vågekvationen Innan vi går in på historiken ger vi en modern framställning av ekvationen.

Antag att en sträng är spänd mellan två punkter. Strängen sätts i rörelse och kommer i svängning och vi antar att svängningarna är små. Vi kan tänka på en gitarrsträng eller en pianosträng. Vi vill beskriva strängens utseende vid en tidpunkt t och antar att den kan beskrivas med funktionen $y = u(x,t)$ som i figur 15.12.



Figur 15.12: Ekvationen för en svängande sträng.

För att bestämma $u(x,t)$ betraktar vi en liten del $u(x+\Delta x, t) - u(x,t)$ av strängen vid tidpunkten t. De krafter som verkar på den är spänningen i strängen som genom en lag av Robert Hooke är ungefär lika med $k\partial^2 u/\partial x^2(x,t)\Delta x$ där k är en konstant. Enligt Newtons lagar är kraften lika med massan multiplicerad med accelerationen och den produkten är ungefär $\rho\Delta x \partial^2 u/\partial t^2$ där ρ är strängens densitet. Vi får alltså att $u(x,t)$ skall uppfylla ekvationen

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)$$

som kallas *vågekvationen*. I det följande antar vi att $k/\rho = 1$ och betraktar alltså ekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t).$$

Med hjälp av en koordinattransformation kan man visa att den allmänna lösningen kan skrivas

$$u(x,t) = f(x+t) + f(x-t)$$

där $f(x)$ är en godtycklig funktion. Formeln kallas *d'Alemberts formel*.

Det är alltså många funktioner som satisfierar vågekvationen. Men alla kan inte vara en lösning till problemet med den svängande strängen. Vi förutsatte från början att strängens ändpunkter var fasta och det ger att $u(0,t) = u(1,t) = 0$ om vi förutsätter att strängens längd är 1. Ett sådant villkor kallas ett *randvillkor*. Vidare bör utgångsläget – ett *begynnelsevillkor* – vara fastlagt. Vi kan t.ex. dra upp strängen och släppa den från vila, som t.ex. en gitarrsträng, eller utgå från ett nolläge och ge den en knuff, som t.ex. en pianosträng. Om vi betraktar det sistnämnda fallet så är funktionen $u(x,t) = \sin n\pi x \sin n\pi t$, där n är ett heltal, en lösning vilket läsaren själv kan kontrollera. Då bör också den oändliga serien

$$u(x,t) = a_1 \sin \pi x \sin \pi t + a_2 \sin 2\pi x \sin 2\pi t + a_3 \sin 3\pi x \sin 3\pi t + \text{etc.},$$

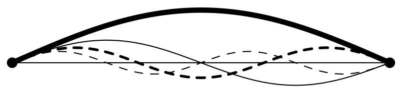
där a_1, a_2, a_3, etc. är konstanter, vara en lösning förutsatt att serien konvergerar tillräckligt snabbt. Det är för övrigt enkelt att med trigonometriska formler visa att serien ovan kan skrivas enligt d'Alemberts formel. Nu visar det sig att om vi känner utgångshastigheten $\partial u/\partial t(x,0)$ så kan man bestämma koefficienterna a_n. Om vi istället studerar problemet om utgångshastigheten är lika med noll så kan vi byta ut produkterna $\sin n\pi x \sin n\pi t$ mot $\sin n\pi x \cos n\pi t$. Lösningarna kan alltså i båda fallen uttryckas som summor av trigonometriska funktioner.

Problemet med den svängande strängen blev kort efter kalkylens genombrott en naturlig utmaning för flera matematiker. Den som först tog sig an problemet var Brook Taylor i två artiklar 1713 och 1714. Han antar att i varje punkt är accelerationen proportionell mot kurvans krökning. De ekvationer han härleder är i princip ekvivalenta med vågekvationen men han använde sig inte av partiella derivator. Han finner att rörelsen av en punkt är en enkel pendelrörelse och att den är sinusformad.

År 1727 föreslog Johann Bernoulli sin son Daniel att ta upp Taylors problem. Året därefter publicerade han själv en artikel i ämnet och kom till slutsatsen att rörelsen måste vara *trochoides socia* eller "följeslagare till cykloiden", vilket var Robervals namn på sinuskurvan.

År 1747 publicerade Jean le Rond d'Alembert artikeln *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration* ("Undersökningar om den kurva som bildas av en spänd sträng som satts i vibration"). Han inleder med att påstå att han skall visa att den sökta kurvan kan anta oändligt många fler former än de som beskrivs av "följeslagarna till cykloiden", d.v.s. sinuskurvor. Han härleder vågekvationen på ungefär samma sätt som vi gjort tidigare men med andra beteckningar. Han gör i princip en variabelsubstitution och kommer fram till det vi kallar d'Alemberts formel. Eftersom $f(x)$ är en godtycklig funktion så menar d'Alembert att det finns fler lösningar än de som beskrivs med trigonometriska funktioner. Euler ger sig in i diskussionen om den svängande strängen i en artikel 1749 och utgående från d'Almeberts formel studerar han några specialfall som visar att lösningen kan vara en summa av sinusfunktioner.

Ett nytt perspektiv på problemet med den svängande strängen ger Daniel Bernoulli i en artikel från 1752. Han utgår från Taylors påstående att den beskrivs av sinusfunktioner. Han använder sig av bilder från musiken och menar att svängningarna kan anses vara sammansatt av flera enkla vågor, som alla har de två ändpunkterna som noder. Den enklaste har bara två noder och ger grundtonen. Nästa har tre noder och ger en överton av grundtonen. Därefter



Figur 15.13: Grundtonen ges av den våg som är fet och heldragen, den första övertonen av den som är heldragen, de tredje av den som fet och streckad samt den fjärde av den som streckad.

kan strängen ge upphov till övertoner med fyra, fem, sex etc. noder. Situationen illustreras i figur 15.13. De olika vågorna överlagras och Daniel Bernoulli menar att han på detta sätt kan generera alla lösningar till vågekvationen och att Taylor i grunden har rätt. Detta står i strid med d'Alemberts påstående. Lösningen skulle ges under 1800-talet med arbeten av Fourier, Cauchy, Dirichlet och Weierstrass där preciseringen av funktionsbegreppet kom att bli en viktig del.

D. J. Struik ger i *A Source Book in Mathematics, 1200–1800* en detaljerad genomgång av de olika artiklarna och har översatt valda delar av dem. Läsaren hänvisas till detta arbete.

Laplaces ekvation Vi börjar också detta avsnitt med att presentera ekvationen i mer moderna termer och anknyter till vågekvationen. Antag att vi betraktar ett svängande membran istället för en svängande sträng eller om vi använder musikaliska termer ett trumskinn istället för en gitarr- eller pianosträng. Ett område i xy-planet skall sättas i svängning i z-axelns riktning. Vid en tidpunkt t kan membranet beskrivas av ytan $z = u(x, y, t)$ där (x, y) ligger i det betraktade området. Man kan då visa att vid små svängningar så uppfyller funktionen $z = u(x, y, t)$ differentialekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Om vi nu anser att membranet är i vila så är $\partial^2 u/\partial t^2 = 0$ och u som nu bara beror på (x, y) uppfyller ekvationen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

För en vanlig trumma innebär det att $u(x, y) = 0$ för de aktuella punkterna (x, y) och den funktionen uppfyller självklart denna ekvation. Antag att membranet istället är fäst vid en ställning på områdets rand som kan beskrivas med en kurva som inte ligger i ett plan. Då kommer membranet vara en yta som är mer komplicerad men som uppfyller vår differentialekvation. Differentialekvationen kallas *Laplaces ekvation*. Det visar sig att lösningarna uppfyller starka krav. En lösning till Laplaces ekvation i ett begränsat område D har t.ex. alltid sitt största eller minsta värde på randen av D. Om t.ex. D är en cirkel så antas största och minsta värdena på periferin.

Ekvationen har fått namn efter Laplace och den förekommer också i hans stora verk *Traité de mécanique céleste*, bl.a. då han studerar vätskors rörelse. Den har kommit att få stor betydelse inom elläran. Potentialen $U(x, y)$ i ett elektrisk fält satisfierar Laplaces ekvation i ett område som saknar elektriska laddningar. Det är genom arbeten om potentialteori av Gauss och George Green som studiet av Laplaces ekvation började ta fart. Man har infört beteckningen

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

där Δ är en differentialoperator som kallas *Laplaceoperatorn*. Lösningarna till $\Delta u = 0$ kallas *harmoniska funktioner*. Det finns ett starkt samband mellan harmoniska funktioner och s.k.

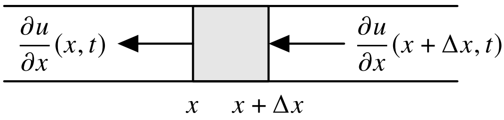
analytiska funktioner – komplexvärda funktioner av en komplex variabel som kan utvecklas i en potensserie kring varje punkt i sitt definitionsområde.

Studiet av harmoniska funktioner har varit och är omfattande. De kan naturligt generaliseras till funktioner av fler än två variabler. En besläktad ekvation är *Poissons ekvation* som kan skrivas

$$\Delta u(x, y) = f(x, y)$$

där $f(x, y)$ är en känd ekvation. En potentialfunktion i ett elektriskt fält i ett område där det finns laddningar uppfyller Poissons ekvation.

Värmeledningsekvationen År 1822 publicerade den franske matematikern och fysikern Joseph Fourier *Théorie analytique de la chaleur* (”Analytisk teori om värme”). Verket är epokgörande. Han härleder den partiella differentialekvation som beskriver värmeledningen i ett homogent medium och han visar hur man kan utveckla funktioner som en oändlig summa av sinus- och cosinusfunktioner – de vi idag kallar fourierserier.



Figur 15.14: Värmeflödet i homogen ledande stav.

Vi betraktar värmeledning i en homogen stav och antar att temperaturen vid tiden t i punkten x är $u(x, t)$. Värmemängden i en liten del mellan x och $x + \Delta x$ är proportionell mot $u(x, t)$ och Δx. Hastigheten med vilken värmemängden avtar är då $k \cdot \Delta x \cdot \partial u/\partial x(x, t)$ där k är en konstant. Men vi kan teckna denna hastighet på ett annat sätt och vi hänvisar till figur 15.14. Inflödet vid tiden t genom ytan vid punkten $x + \Delta x$ är $c \cdot \partial u/\partial x(x + \Delta x, t)$ och utflödet vid x är $c \cdot \partial u/\partial x(x, t)$ där c är en konstant. Förändringshastigheten av värmeflödet kan därför också tecknas

$$c \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x, t)\right)$$

som är ungefär lika med

$$c \cdot \Delta x \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t).$$

Sätter vi nu de båda uttrycken för värmemängdens förändringshastighet lika får vi

$$K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

där K är en ny konstant. Denna ekvation kallas *värmledningsekvationen*.

Fourier studerar inte bara värmeledningen i en stav utan också i en ring, en sfär, en kub och ett prisma. Han måste då arbeta med två rumskoordinater och i värmeledningsekvationens vänsterled byts $\partial^2/\partial x^2$ mot Laplaceoperatorn $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$.

Om vi återvänder till den endimensionella staven så beror naturligtvis lösningen på hur processen startar. Vi kan anta att ändpunkterna är isolerade och inte släpper igenom någon värme. Om vi känner temperaturfördelningen vid tiden $t = 0$ så bör lösningen vara entydigt bestämd. Dessa villkor kan formuleras

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = 0 \quad \text{och} \quad u(x, 0) = f(x)$$

där L är stavens längd och $f(x)$ är en känd funktion. I fortsättningen antar vi för enkelhets skull att $L = 1$ och att konstanten K i ekvationen också är lika med 1.

Fourier söker nu enkla lösningar av formen $u(x,t) = g(x)h(t)$ och finner att $u(x,t) = \mathrm{e}^{-nt} \cos n\pi x$ löser värmeledningsekvationen och uppfyller villkoren i stavens ändpunkter. Detsamma gäller då

$$u(x,t) = a_0 + a_1 \mathrm{e}^{-t} \cos \pi x + a_2 \mathrm{e}^{-2t} \cos 2\pi x + a_3 \mathrm{e}^{-3t} \cos 3\pi t + \text{etc.}$$

där a_0, a_1, a_2, a_3, etc. är konstanter. Fourier påstår nu att dessa konstanter kan väljas så att begynnelsevillkoret $u(x,0) = f(x)$ är uppfyllt eftersom varje funktion $f(x)$ kan skrivas

$$f(x) = a_0 + a_1 \cos \pi x + a_2 \cos 2\pi x + a_3 \cos 3\pi x + \text{etc.}$$

Genom att multiplicera båda leden med $\cos n\pi x$ och integrera från 0 till 1 kan han bestämma a_n till

$$a_0 = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{och} \quad a_n = 2\int_0^1 f(x) \cos n\pi x \,\mathrm{d}x \quad \text{om } n = 1, 2, 3, \ldots$$

eftersom

$$\int_0^1 \cos n\pi x \cos m\pi x \,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{om} \quad n \neq m \quad \text{och} \quad \int_0^1 \cos^2 n\pi x \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}.$$

Med hjälp av denna teknik kan man visa att det finns diskontinuerliga funktioner som kan skrivas som en oändlig summa av trigonometriska funktioner. Ett exempel är den funktion $f(x)$ som är lika 0 då $0 \leq x < 1/2$ och lika med 1 då $1/2 \leq x \leq 1$. Det motsvarar ett utgångsläge hos staven där den ena halvan har en konstant temperatur och den andra halvan en annan konstant temperatur. Seriens summa blir lika med $1/2$ då $x = 1/2$.

Fouriers påstående att varje funktion kan skrivas som en summa av trigonometriska funktioner är inte sant. Det är nödvändigt att funktionen uppfyller vissa villkor. Fouriers resultat ställer emellertid frågan om funktionsbegreppet på sin spets. Det visade sig att det finns funktioner som inte går att utvecklas i en trigonometrisk serie. Samtidigt finns det diskontinuerliga funktioner som har en sådan utveckling. Dessa funktioner ingick knappast i det funktionsbegrepp som då var accepterat bland de flesta matematiker.

Théorie analytique de la chaleur finns i sin helhet tillgänglig på Internet både i original och i engelsk översättning.

15.8 Analysens grunder stärks

15.8.1 Några banbrytande arbeten

Utvecklingen av analysen innebar att allt effektivare verktyg skapats men det medförde också att grundläggande problem blottats. Funktionsbegreppet var otydligt och oklarheterna med begrepp som det oändligt lilla och det oändligt stora blev allt svårare att bortse från. Hur bestämmer man summan av en oändlig serie och när existerar den? Den unge norske matematikern Niels Henrik Abel, som var verksam i början av 1800-talet, påstod att det inte fanns någon oändlig serie som beräknats på ett tillfredsställande sätt. Problemen förstärktes genom konstruktion av funktioner med märkliga egenskaper. I en artikel om fourierserier från

1829 införde Lejeune Dirichlet en funktion som är definierad för alla tal mellan 0 och 1 och som är lika med 1 för alla rationella tal och 0 för alla irrationella. Funktionen kallas nu för *Dirichletfunktionen* och kan fås som ett gränsvärde, nämligen

$$\lim_{k\to\infty}\left(\lim_{j\to\infty}\left(\cos(k!\pi x)\right)^{2j}\right).$$

I en föredragning inför vetenskapsakademin i Berlin 1872 presenterade Karl Weierstrass en funktion som är kontinuerlig överallt men som inte har derivata i någon punkt. Funktionen definieras genom fourierserien

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

där $0 < a < 1$ och $ab > 1 + 3\pi/2$. Vi kan t.ex. välja $a = 1/2$ och $b = 10$. Motsvarande kurva är kontinuerlig men saknar tangent i varje punkt (se figur 9.1). En liknande kurva, den s.k. *snöflingekurvan* konstruerades 1904 av den svenska matematikern Helge von Koch (se figur 13.41). Det var knappast Dirichletfunktionen eller snöflingekurvor som Euler hade i tankarna när han hade formulerat sitt funktionsbegrepp några decennier tidigare.

De som framför andra skulle ta itu med att bygga upp analysen var fransmannen Augustin Louis Cauchy och tysken Karl Weierstrass. Båda gjorde det väsentligen i form av föreläsningar. Kanske är det inte så konstigt att pedagogiska frågor var en av anledningarna till att tänka igenom grunderna. Det är svårt att undervisa systematiskt om grunden är oklar. År 1821 gav Cauchy ut läroboken *Cours d'analyse* som hjälp till studenterna som följde hans föreläsningar vid École Polytechnique. Weierstrass gav vid universitetet i Berlin föreläsningsserier med titlarna *Introduktion till analysen 1859/60*, *Intergralkalkyl 1860/61* och *Den allmänna teorin för analytiska funktioner 1863/64*. Den sistnämnda serien finns översatt till engelska och publicerad på Springer Verlag. En översikt finns på Internet. De båda förstnämnda finns bara som återfunna anteckningar av studenter. Samtidigt som Cauchy och Weierstrass utformade den moderna analysen så var de frontfigurer i skapandet av teorin för analytiska funktioner där man studerar komplexvärda funktioner av en komplex variabel.

Innan vi går närmare in på Cauchys och Weierstrass arbeten skall vi göra några kommentarer kring funktionsbegreppet och ge den precisering som nu används i matematikundervisningen.

15.8.2 Funktionsbegreppet

I *Introductio in analysin infinitorum* definierar Euler en funktion av en variabel som ”ett analytiskt uttryck av något slag sammansatt av denna variabel och av konstanta tal och storheter”. Med den definitionen finns det funktioner där ett värde på variabeln x kan ge fler funktionsvärden. Begreppet ”analytiskt uttryck” är också diffust. Rimligen bör fourierserier vara analytiska uttryck liksom det gränsvärde som ger upphov till Dirichletfunktionen. Det var, som vi tidigare nämnt, knappast sådana funktioner som Euler hade i tankarna. Det blev Dirichlet som formulerade den definition som vi idag använder. Han skrev 1837:

> ”. . . om ett entydigt ändligt y svarar mot varje x på så sätt att när x kontinuerligt genomlöper ett interval från a till b så varierar också $y = f(x)$ kontinuerligt, så säges y vara en kontinuerlig funktion av x i detta intervall. Det är inte alls nödvändigt att y skall ges av samma uttryck i hela intervaller och det är inte heller nödvändigt att det skall ges med hjälp av matematiska operationer.”

Begreppet kontinuitet skulle senare formaliseras med hjälp av gränsvärdesbegreppet. Från Dirichlets definition av funktionsbegreppet till dagens mer generella är inte steget långt.

> Om A och B är två mängder så är f en funktion från A till B och till varje x i A ordnas precis ett $y = f(x)$ i B.

15.8.3 Cauchys *Cours d'analyse*

Cours d'analyse är ett av de viktigaste verken i analysens historia. Det skrevs som tidigare nämnts som underlag för en föreläsningsserie vid École Polytechnique och intentionen var att modernisera undervisningen i analys. Boken består av tolv kapitel och sju appendix. Den tar upp grundläggande begrepp om funktioner och serier. Stort utrymme ägnas åt komplexvärda funktioner av komplexa variabler. Cauchy behandlar också partialbråkuppdelning, rekursiva formler samt symmetriska, alternerande och homogena funktioner. Appendixen ägnas bl.a. åt grundläggande räknelagar, trigonometriska formler, olikheter, numerisk bestämning av rötter, dubbelserier och oändliga produkter. Boken omfattar emellertid inte differential- och integralkalkyl. Cauchy hade uppenbarligen tänkt att publicera en andra del men det blev aldrig av.

Vi skall ta upp tre områden som kan vara av principiellt intresse när det gäller att ge analysen en fastare grund. Vi skall först studera några definitioner som ligger till grund för framställningen och som handlar om obegränsat små och stora storheter. Vi skall ge ett exempel hur Cauchy visar en sats som gäller gränsvärden då variabeln går mot oändligheten. Till slut skall vi ta upp Cauchys framställning av oändliga seriers konvergens och divergens.

Definitioner av gränsvärde och kontinuitet Redan i det första kapitlet inför Cauchy begreppet gränsvärde. Han säger att:

> ”När en variabel konvergerar mot ett fixt värde är det ofta praktiskt att notera det genom en speciell beteckning. Vi gör det genom att sätta förkortningen
>
> $$\lim$$
>
> före den ifrågavarande variabeln.”

Han säger t.ex. att om x är en variabel som går mot 0 så gäller att

$$\lim A^x = 1 \quad \text{och} \quad \lim \sin x = 0.$$

Ibland kan uttrycket konvergera mot flera värden och det markerar Cauchy med två parenteser. Uttrycket $\lim((1/x))$ antar t.ex. två värden ∞ och $-\infty$ medan uttrycket $\lim((\sin(1/x)))$ antar oändligt många värden mellan -1 och 1.

I det andra kapitlet, som har rubriken ”Om oändligt små och oändligt stora storheter och om kontinuitet”, diskuterar Cauchy begreppen det oändligt lilla och det oändligt stora. Han skriver:

> ”Vi säger att en variabel blir oändligt liten när dess numeriska värde minskar obegränsat på ett sådant sätt att den konvergerar mot gränsvärdet 0.”

> ”Vi säger att en variabel blir oändligt stor när dess numeriska värde ökar obegränsat på ett sådant sätt att den konvergerar mot gränsvärdet ∞.”

I samma kapitel inför Cauchy begreppet kontinuitet. Han säger att en funktion $f(x)$ av variabeln x, som varierar i ett intervall, är kontinuerlig om skillnaden $f(x+\alpha)-f(x)$ är en oändligt liten storhet om α är oändligt liten.

Han går igenom de vanliga elementära funktionerna och konstaterar att de är kontinuerliga. Han formulerar den sats som säger att en kontinuerlig funktion antar mellanliggande värden och han motiverar den geometriskt. Det är inte ofta Cauchy på det sättet använder geometriska resonemang och boken saknar helt figurer. Ett analytiskt bevis ges i ett appendix.

Ett mycket kort avsnitt handlar om gränsvärde av differenskvoten

$$\frac{f(x+\alpha)-f(x)}{\alpha}$$

och han visar i stort sett bara att det är lika med $2x$ om $f(x)=x^2$. Ett systematiskt studium av differenskvoter var förmodligen tänkt att behandlas i en kommande föreläsningsserie. *Cours d'analyse* skulle vara en bas för vidare studier av differential- och integralkalkyl.

Gränsvärde då variabeln går mot oändligheten. Ett exempel. Cauchys definitioner av gränsvärde och kontinuitet innebär knappast att mystiken kring det oändligt lilla och det oändligt stora skingras men han har infört beteckningar och namn som ger struktur åt problematiken. Det är en bit kvar till den ϵ-δ-definition som ger gränsvärdesbegreppet konkretion. Han är emellertid inte långt från den och i en sats i det andra kapitlet bevisar han en sats där han använder tekniken med ϵ och i detta fall ω. Han bevisar följande sats:

> Om skillnaden $f(x+1)-f(x)$ konvergerar mot ett tal k för växande värden på x, så konvergerar kvoten $f(x)/x$ mot samma gränsvärde.

Vi skisserar Cauchys bevis för det fall då k är ändligt.

> Låt ϵ vara ett positivt tal som kan göras godtyckligt litet. Eftersom $f(x+1)-f(x)$ konvergerar mot k så finns ett tal h så stort att om x är större än eller lika med h så ligger den skillnad vi betraktar mellan $k-\epsilon$ och $k+\epsilon$. alltså ligger skillnaderna
>
> $$f(h+1)-f(h),\quad f(h+2)-f(h+1),\quad \ldots,\quad f(h+n)-f(h+n-1)$$
>
> mellan dessa båda tal och det medför i sin tur att deras aritmetiska medelvärde gör det. Alltså ligger också
>
> $$\frac{f(h+n)-f(h)}{n}$$
>
> mellan $k-\epsilon$ och $k+\epsilon$. Cauchy inför beteckningarna
>
> $$\frac{f(h+n)-f(h)}{n}-k=\alpha \quad \text{och} \quad h+n=x$$
>
> och får efter en del räkningar att
>
> $$\frac{f(x)}{x}=\frac{f(h)}{x}+\left(1-\frac{h}{x}\right)(k+\alpha)$$
>
> Eftersom både $f(h)/x$ och h/x konvergerar mot 0 då x växer obegränsat och då α ligger mellan $-\epsilon$ och $+\epsilon$, så kommer gränsvärdet av $f(x)/x$ ligga mellan $k-\epsilon$ och $k+\epsilon$. Då vi kan välja ϵ godtyckligt litet så konvergerar alltså
>
> $$\frac{f(x)}{x}$$
>
> mot k då x växer obegränsat.

Cauchy använder sedan resultatet till att bl.a. visa att $\ln x/x$ konvergerar mot 0 då x växer obegränsat. Genom att använda logaritmlagarna får han att

$$\ln(x+1) - \ln x = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

som konvergerar mot 0 eftersom $1/x$ går mot 0 och logaritmfunktionen är kontinuerlig.

Serier Kapitel 9 i *Cours d'analyse* ägnas åt konvergenta och divergenta serier. Medan t.ex. Euler inriktade sig på att beräkna summor av oändliga serier studerar Cauchy konvergensfrågor. Han ger en tydlig definition av begreppet konvergens av en serie, något som knappast funnits tidigare. Han säger att den oändliga serien

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$$

med termerna $u_1, u_2, u_3, \ldots$ är konvergent om den talföljd

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n,$$

som bildas av seriens delsummor konvergerar mot ett tal s, som kallas *seriens summa*. Hans framställning av serier skiljer sig väsentligen inte från de som ges i de flesta av dagens grundläggande läroböcker i analys. Han studerar den geometriska serien, han visar att om en serie är konvergent så konvergerar dess termer mot noll, han formulerar det som nu kallas *Cauchys konvergensprincip* och som säger att varje ändligt avsnitt

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}$$

går mot 0 då n går mot ∞.

Cauchy bevisar rot- och kvotkriterierna för konvergens av serier där termerna är positiva. Han studerar serier där varannan term är positiv och varannan negativ och visar att om absolutbeloppen av termerna i en sådan serie avtar mot 0 så är serien konvergent. Ett längre avsnitt ägnas åt potensserier.

Även om Cauchys framställning är föredömligt klar så gör han felslut. Han påstår bl.a. att om termerna i en konvergent serie är kontinuerliga funktioner av x så är seriens summa också en kontinuerlig funktion av x. Detta är inte sant. Fourier visade att det finns trigonometriska serier vars summa inte är kontinuerlig. Felslutet beror på att definitionen av kontinuitet är otydlig. För att slutsatsen skall vara korrekt måste ett nytt begrepp likformig konvergens införas. Cauchys bevis av konvergensprincipen som är uppkallad efter honom är också ofullständigt. Det skulle krävas att begrepp som gränsvärde och kontinuitet konkretiseras och fördjupas för att ge analysen en stabil bas.

15.8.4 Karl Weierstrass – den moderna analysens fader

Det blev den tyske matematikern Karl Weiestrass som skulle bli förgrundsfiguren när det gällde att skapa en fastare grund för analysen. I några epokgörande föreläsningsserier vid universitetet i Berlin mellan 1859 och 1864 byggde han upp analysen från grunden. Hans egna manuskript finns, som vi tidigare nämnt, inte bevarade men man har föreläsningsanteckningar från studenter.

Några av svagheterna i analysen hade varit resonemangen kring det oändligt lilla och det oändligt stora. De saknade den precision som var nödvändig för att förklara många av de problem som uppstod i och med att analysen utvecklades och frågeställningarna blev alltmer komplexa. Varför kan summan av en serie där termerna är kontinuerliga funktioner vara diskontinuerlig? Hur förklarar man att det finns funktioner som är kontinuerliga men saknar derivata i varje punkt? Hur kan gränsvärdet av sammansättningar av elementära funktioner vara en Dirichletfunktion?

Centralt i sammanhanget är definitionen av gränsvärde och kontinuitet. Cauchys definitioner är inte tillräckligt precisa och konkreta. Weierstrass gjorde följande definition av kontinuitet:

> En funktion $f(x)$ är kontinuerlig i punkten x_0 om det till varje $\epsilon > 0$ finns ett $\delta > 0$ sådant att $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ för alla x för vilka $|x - x_0| < \delta$.

Vi har här förutsatt att $f(x)$ är definierad i en omgivning till x_0. Om $f(x)$ t.ex. skulle vara definierad i ett intervall och x_0 är en av ändpunkterna får man göra modifikationer. Definitionen kan också modifieras för att precisera begreppet gränsvärde både då x går mot ett tal a och då x går mot ∞.

Idén bakom definitionen är inte ny. Den har sina rötter i Eudoxos uttömningsprincip som formulerades på 300-talet före Kristus. Många studenter har stött sin panna blodig mot den. Förmodligen för att de inte förstått dess värde. I många fall klarar man sig utmärkt med en mer intuitiv uppfattning av kontinuitet och gränsvärde. Analysen hade genomgått en stark utveckling under mer än ett sekel utan ϵ-δ-definitionen. Man kan ofta stödja sig på geometriska bilder, men när det visar sig att de geometriska bilderna inte räcker till måste man ha skarpare verktyg. Vi kan t.ex. se att när Cauchy skall visa att $\ln x/x$ går mot 0 då x går mot ∞, vilket inte är självklart för en student, så hamnar han i en situation där han behöver stödja sig på en sats som han i sin tur visar med ϵ-ω-teknik.

Låt oss återvända till serier vars termer är kontinuerliga funktioner. Vi antar att serien

$$s(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$

konvergerar för varje x och att termerna $u_k(x)$ är kontinuerliga. I definitionen på kontinuitet beror δ naturligtvis på ϵ men också på punkten x_0 och på funktionen $f(x)$. Om vi tillämpar definitionen på varje term $u_k(x)$ så beror för ett givet $\epsilon > 0$ vårt δ som skall vara större än 0 på k. Vi kan skriva $\delta = \delta_{x,k}$. Men för varje x är antalet $\delta_{x,k}$ oändligt och kan bli hur små som helst. Det behöver alltså inte finnas något δ strängt större än 0 som gäller för alla k. Weierstrass inför nu ett nytt begrepp likformig konvergens. Han säger att serien med termerna $u_k(x)$ konvergerar likformigt i ett interval I mot $s(x)$ om det till varje $\epsilon > 0$ finns ett tal ω som är oberoende av x sådant att

$$\left| s(x) - \sum_{k=1}^{n} u_k(x) \right| < \epsilon$$

för alla $n > \omega$ och för alla x i I.

Det är nu relativt enkelt att visa att summan av en serie, vars termer är kontinuerliga funktioner av en variabel x i ett intervall I, och som konvergerar likformigt i I, är kontinuerlig i I.

De föreläsningar där Weierstrass gav en säkrare grund för analysen är inte tillgängliga på Internet. Men ett antal satser och begrepp bär hans namn och de visar arten och vidden av hans påverkan på analysen. Vi skall ta upp några av dem.

Weierstrass majorantsats säger följande:

> Antag att $u_k(x)$ är funktioner av x och att a_k är positiva tal sådana att $|u_k(x)| \leq a_k$ för alla x i ett intervall I. Då gäller att om serien
>
> $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$$
>
> är konvergent så är serien
>
> $$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$$
>
> likformigt konvergent i intervallet I.

Satsen är ett viktigt hjälpmedel, eftersom likformig konvergens av en serie vars termer är funktioner av x innebär, att man kan dra viktiga slutsatser om seriens summa.

Bolzano-Weierstrass sats säger att i varje oändlig begränsad talföljd finns minst en oändlig konvergent delföljd.

Ett enkelt exempel är följden $a_n = (-1)^n$ som är begränsad men inte konvergent. Talen i följden hoppar mellan -1 och 1. Det finns emellertid uppenbarligen konvergenta delföljder som t.ex. $a_2, a_4, a_6, \ldots$ där alla talen är lika med 1. Exemplet är som sagt enkelt, men talen i en oändlig följd kan hoppa omkring litet hur som helst på tallinjen. Satsen garanterar att om den är begränsad, dvs. om alla talen i följden ligger mellan två tal b och B, så kan man alltid välja ut en delföljd som konvergerar. Om talföljden inte är begränsad kan man givetvis inte dra en sådan slutsats. Talföljden n^2 har ingen konvergent delföljd. Alla delföljder går mot oändligheten.

Bolzano-Weierstrass sats kan verka abstrakt och esoterisk. Den bevisades redan 1817 av den österrikiske filosofen och matematikern Bernhard Bolzano som en hjälpsats i ett bevis av att en kontinuerlig funktion antar mellanliggande värden. Weierstrass visade den på nytt ungefär femtio år senare. Han såg satsens betydelse och upphöjde den från hjälpsats till sats. Den kan användas för att bevisa många andra viktiga resultat som t.ex. Cauchys konvergensprincip. Bolzano-Weierstrass sats och Cauchys konvergensprincip är i någon mening ekvivalenta och de är fundamentala för att beskriva grundläggande egenskaper hos de reella talen. När analysen under 1900-talet blir mer abstrakt och kommer att handla om vektorrum av olika typer spelar följder som uppfyller Cauchys konvergensprincip en stor roll.

Weierstrass approximationssats säger att varje kontinuerlig funktion $f(x)$ på ett slutet begränsat intervall $a \leq x \leq b$ kan approximeras likformigt med ett polynom $p(x)$, dvs. till varje $\epsilon > 0$ finns ett polynom $p(x)$ sådant att $|f(x) - p(x)| < \epsilon$ där $p(x)$ beror på ϵ men inte på x.

Polynom är en enkel typ av funktioner eftersom de är uppbyggda enbart av additioner, subtraktioner och multiplikationer. Satsen har därför stor principiell betydelse inom beräkningsteknik.

Weierstrass arbeten med att ge analysen en säkrare grund kom i slutändan till stor del att handla om egenskaper hos de reella talen. De naturliga talen blev en utgångspunkt och utifrån dem var det inte så svårt att konstruera hela tal och rationella tal. Det var svårare att konstruera de reella talen med hjälp av de rationella, en svårighet som pythagoréerna tvåtusen år tidigare erfarit då de upptäckte att $\sqrt{2}$ var irrationellt. Flera försök till sådana konstruktioner gjordes under slutet av 1800-talet och början av 1900-talet. Den mest funktionella skapades av Richard Dedekind som såg ett reellt tal som ett snitt i de rationella talen, som ju ligger tätt på tallinjen men inte fyller upp den.

Den grund för analysen som Weierstrass m.fl. utformade är fortfarande aktuell och hans definition av gränsvärde ligger till grund för de flesta akademiska läroböcker i analys. År 1966 publicerade **Abraham Robinson** boken *Non-standard Analysis*. Robinson, som var född i Polen och som arbetat vid universitet London, Toronto och Jerusalem samt vid University of California, Los Angeles, var huvudsakligen intresserad av tillämpad matematik. I sin bok formulerar han en stringent teori för räkning med infinitesimaler. Den verkar emellertid haft begränsat inflytande.

15.8.5 Integralbegreppet

Precisering av begrepp som gränsvärde och kontinuitet är centrala för att ge analysen en stabil grund. Begrepp som summan av en oändlig serie och derivata definieras med hjälp av gränsvärde. Men hur är det med integralbegreppet? Intuitivt är integralen

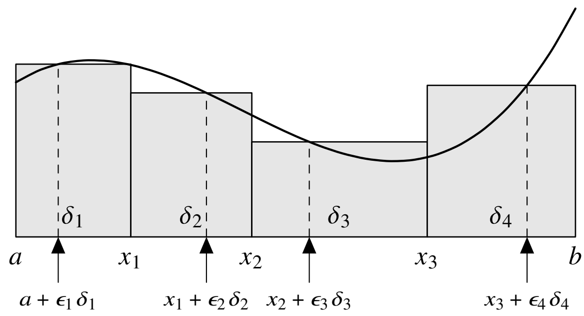
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

lika med arean av området mellan kurvan $y = f(x)$ och x-axeln där de delar som ligger under x-axeln räknas negativt. När alltmer egendomliga funktioner bildas genom t.ex. gränsprocesser är den naturliga frågan om alla dessa har en integral. Till och med kontinuerliga funktioner kan vara så komplicerade att det kan ifrågasättas hur integralen skall beräknas. Den som först gav en stringent definition av begreppet integrerbarhet var Bernhard Riemann och som i många andra fall var det studiet av Fourierserier som ställde frågan på sin spets och som fick honom att införa det begrepp som vi idag kallar Riemannintegralen. I artikeln *Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe* (”Om framställningen av en funktion med en trigonometrisk serie”) från 1854 ägnas ett avsnitt åt att definiera begreppet integrerbarhet.

Riemann påpekar att det finns oklarheter inom integralkalkylen speciellt när det gäller omfattning och giltighet. Han vill täppa till den luckan och skriver:

> ”Alltså för det första: Vad skall man mena med $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$?
>
> För att fastlägga det tar vi i storleksordning tal $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ mellan a och b och betecknar $x_1 - a$ med δ_1, $x_2 - x_1$ med $\delta_2, \ldots, b - x_{n-1}$ med δ_n och med ϵ positiva äkta bråk [bråk mellan 0 och 1]. Värdet av summan
>
> $$S = \delta_1 f(a + \epsilon_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \epsilon_2\delta_2) + \delta_3 f(x_2 + \epsilon_3\delta_3) + \ldots + \delta_n f(x_{n-1} + \epsilon_n\delta_n)$$
>
> kommer då att bero på intervallen δ och storheterna ϵ. Har den nu den egenskapen att den, hur än δ och ϵ väljs, konvergerar mot ett samma värde A då δ blir obegränsat litet så kallas detta värde $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
>
> Om den inte har denna egenskap så saknar $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ mening.”

Figur 15.15 får illustrera Riemanns definition. En funktion är alltså integrerbar i Riemanns mening om den kan approximeras med summor av rektangelareor. Det är en naturlig definition.



Figur 15.15: I figuren har vi delat in intervallet i fyra delintervall. Vi får fyra rektanglar med baserna δ_1, δ_2, δ_3 och δ_4 och höjderna $f\,(a+\epsilon_1\,\delta_1)$, $f\,(x_1+\epsilon_2\,\delta_2)$, $f\,(x_2+\epsilon_3\,\delta_3)$ respektive $f\,(x_3+\epsilon_4\,\delta_4)$. I figuren är funktionen positiv. Om den är negativ så kommer motsvarande rektanglars areor att räknas negativt. När alla δ blir mycket små kommer antalet rektanglar att bli mycket stort. Om funktionen är så enkel som i figuren kommer summan av rektanglarnas areor att närma sig arean mellan funktionskurvan och x-axeln.

Det ligger nära till hands att approximativt beräkna arean mellan en funktionskurva och x-axeln med hjälp av rektanglar vars areor lätt kan bestämmas. Det visar sig att att en funktion som är kontinuerlig på intervallet $a \leq x \leq b$ också är integrerbar över intervallet men det finns funktioner som är integrerbara men inte kontinuerliga.

En funktion som inte är integrerbar i Riemanns mening är Dirichlets funktion. Den är definierad på intervallet $0 \leq x \leq 1$ och den är lika med 1 för alla rationella tal och lika med 0 för alla irrationella. Hur vi än delar in intervaller i delintervall kommer varje intervall att innehålla både rationella och irrationella tal. Vi kan välja alla punkterna $x_{j-1} + \epsilon_j \delta_j$ rationella och då är $S = 1$ men vi kan också välja dem irrationella och då är $S = 0$. Summan S konvergerar inte mot ett värde A och följaktligen är inte funktionen integrerbar.

Integralbegreppet är från början kopplat till areor och områdena vars area skall beräknas är begränsade av krökta kurvor. Det är då naturligt att approximera dem med areor av områden vars areor vi kan beräkna som t.ex. rektanglar. Riemanns definition bygger på det. Det visar sig emellertid längre fram att Riemanns definition har brister. Satser blir onödigt komplicerade och måste förses med en rad undantag. Definitionen är alltför enkel och är i längden opraktisk. Ett nytt integralbegrepp infördes av den franske matematikern Henri Lebesgues och det undanröjde många av de problem som var förknippade med riemann-integralen, men utvidgningen av integralbegreppet skedde på bekostnad av enkelheten. Med det nya integralbegreppet är Dirichlets funktion integrerbar och dess integral är lika med 0, vilket är rimligt. Även om både de rationella och irrationella talen är oändligt många så visar det sig att de irrationella är betydligt fler enligt den tyske matematikern Georg Cantors teorier. Integralbegreppet är ytterligare ett exempel på hur ett intuitivt begrepp som från början fungerar utmärkt efter en tid kräver en precision. Definitionen, även om den är strikt, visar sig i det långa loppet vara opraktiskt och ett nytt generellare begrepp måste skapas för att matematiker skall få ett bättre och vassare verktyg. Utvecklingen går från det intuitivt enkla till det mer komplicerade för att förenkla arbetet när matematiken blir mer komplex.

15.9 Några ord om analysens utveckling under 1900-talet

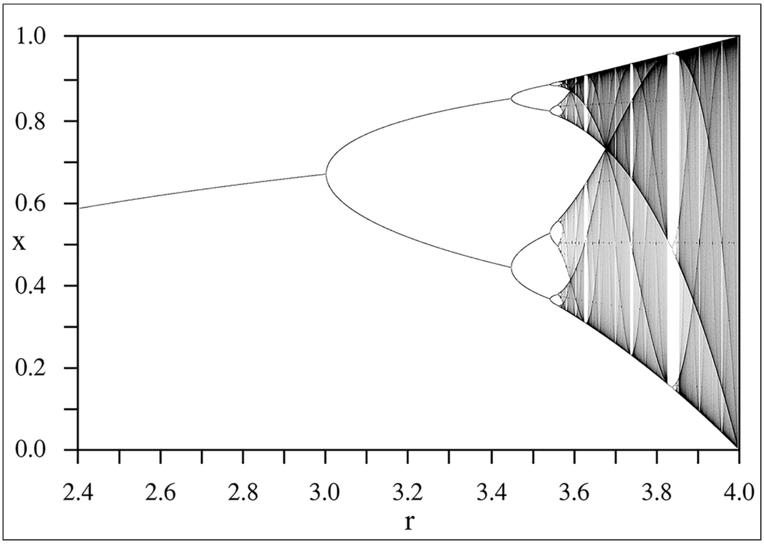
Efter grundläggande arbeten av Weierstrass, Dedekind, Dirichlet, Riemann m.fl. under andra hälften av 1800-talet fick analysen en annan inriktning. Den nya fysiken med relativitetsteori och kvantfysik innebar att områden som differentialgeometri, gruppteori och differentialekvationer kom i fokus. Analysen utvecklades mot ökad abstraktion samtidigt som den integrerades med algebra och geometri. Den norske matematikern Sophus Lie använde gruppteori för att studera differentialekvationer. Den linjära algebran kom att bli ett viktigt hjälpmedel och teorin för oändligtdimensionella vektorrum utvecklades med namn som Hilbert, von Neumann och Banach. Svenska matematiker som Ivar Fredholm och Torsten Carleman bidrog med viktiga arbeten som föregick de abstrakta teorierna. En mer generell teori för partiella differentialekvationer utvecklades av framför allt den svenske matematikern Lars Hörmander. Ett viktigt hjälpmedel för de studierna var den distributionsteori som skapades i mitten av 1950-talet av den franske matematikern **Laurent Schwartz** (1915–2002). En distribution kan ses som en slags generaliserad funktion som bl.a. kan anta oändliga värden och där t.o.m. diskontinuerliga funktioner kan vara deriverbara.

Samtidigt med att analysen gick mot ökad abstraktion för att ge den nya fysiken ändamålsenliga verktyg, utvecklades klassiska områden som analytiska funktioner, harmoniska funktioner och fourieranalys – områden där bl.a. Cauchy och Weierstrass varit förgrundsfigurer. Nordiska matematiker som **Ernst Lindelöf** (1870–1946), **Rolf Nevanlinna** (1895–1980) och **Lars Ahlfors** (1907–96) från Finland, **Harald Bohr** (1877–1951) från Danmark samt Arne Beurling och framför allt Lennart Carleson från Sverige har givit viktiga bidrag till dessa områden.

Under 1950- och 60-talen initierade den amerikanske matematikern och meteorologen **Edward Lorenz** det som senare skulle kallas *kaosteori* och som handlar om system av differentialekvationer där små ofta omätbara förändringar i begynnelsevärdena kan orsaka oförutsägbara förändringar på lång sikt. Lorenz själv talade om fjärilseffekten: ”Kan vindpusten från en fjärilsvinge i Brasilien orsaka en tornado i Texas?”. Kaosteorin har tillämpningar inom många områden som fysik, meteorologi, ekologi och ekonomi. Den har kopplingar till teorin för fraktaler.

I samband med datorernas intåg på 1950-talet kom beräkningstekniken alltmer i fokus. Approximativa metoder för beräkning av integraler, för bestämning av rötter till ekvationer och för att bestämma lösningar till differentialekvationer kom i centrum. Gamla metoder som Simpsons formel för integralberäkning, Newton-Raphsons metod för ekvationslösning och Eulers metod för att lösa differentialekvationer fick ny aktualitet och nya metoder utvecklades. Ett nytt ämne, numerisk analys, skapades först som en del av matematiken och senare som ett eget ämne.

Analysen kom under 1900-talet att utvecklas mot specialisering med många nya grenar och vi har bara tagit upp ett fåtal. En heltäckande beskrivning ligger utanför ramen för denna framställning. Det gör också en fördjupad diskussion av de olika områden vi tagit upp. En sådan skulle bli alltför komplicerad. I kapitel 10 görs i vissa fall något mer ingående framställningar och vi hänvisar läsaren till detta kapitel.



Figur 15.16: Kaos genom bifurkation. Bilden visar hur en kaotisk utveckling kan uppkomma. En talföljd beskriver utvecklingen av en population där populationens storlek efter n generationer och r är en konstant. Om startvärdet är givet så kan man bestämma talföljden. Det visar sig att för ett givet startvärde och vissa r så konvergerar talföljden mot ett bestämt värde. För andra delar talföljden upp sig i två följder som konvergerar mot vart sitt värde, för några delar den upp sig i fyra talföljder som konvergerar mot var sitt värde o.s.v. Figuren visar de olika delningspunkterna eller bifurkationspunkterna där x på den lodräta axeln är gränsvärdena och r representeras på den vågräta axeln. Vi ser att för vissa r kommer situationen bli instabil och storleken på populationen kommer att variera på ett ibland regelbundet och ibland oregelbundet eller kaotiskt sätt. Små förändringar i startvärdet kan åstadkomma stora variationer i populationstillväxten. Exemplet är hämtat från `2CvC3hc` där genomgången är mer utförlig. En populär framställning av kaosteori finns i **James Gleicks** bok från 1987 *Chaos: Making a New Science*. (Bild: `2CvC3hc`)

Kapitel 16

Sannolikhetslära och statistik

Sannolikhetslära och statistik är två områden som ofta kopplas samman. Kursplaner i matematik för grundläggande utbildningar har i regel ett moment med rubriken ”Sannolikhetslära och statistik”. Men historiskt har de helt olika ursprung. Sannolikhetsläran har sina rötter i spel och dobbel. Statistiken var från början ett sätt att beskriva ett lands tillgångar och demografiska struktur. Ordet ”statistik” är besläktat med ord som ”stat”, ”statsman” och ”status”. Hur kan två så till synes väsensskilda områden som hasardspel och statskunskap ge upphov till matematiska teorier som är så beroende av varandra att de i många, kanske de flesta, sammanhang nämns tillsammans?

Vi skall först följa sannolikhetslärans och sedan statistikens utveckling. Därefter tar vi upp hur de båda områdena smälte samman.

16.1 Sannolikhetslärans utveckling

16.1.1 Cardano och hasardspel

Spel verkar ha intresserat människor i alla tider. Det har varit upphov till både glädje och besvikelse. För många är det ett spännande och engagerande tidsfördriv – ett sätt att koppla av från en komplicerad verklighet. För andra kan det vara en förbannelse. Den italienske läkaren, matematikern och astrologen Girolamo Cardano tar upp både spelandets positiva och negativa sidor i verket *Liber de ludo aleae* (”En bok om hasardspel”). Uppenbarligen var Cardano själv en inbiten spelare. Han skriver:

> ”. . . i tider som präglas av stor fruktan och sorg, när även de största av själar är djupt oroade, är hasardspel vida effektivare för att motverka ångest än spel som schack, eftersom det finns en ständig förväntan vad ödet kan ha i beredskap . . .”

men han ser också farorna;

> ”. . . förluster innebär förlorat anseende, speciellt för den som tidigare haft mycket gott renommé; till detta kan läggas tidsförlust [. . .] försummelse av de egna affärerna, faran av att spelandet blir en inrotad vana, tiden som går åt att efter spelet planera hur man kan vinna tillbaka förlusterna och erinra sig hur illa man spelat.”

Cardano skrev *Liber de ludo aleae* i mitten av 1500-talet men den gavs ut först på 1660-talet. Verket består av 32 kapitel. De första ägnas åt att ge fördelar och nackdelar med spelandet ur bl.a. moralisk synpunkt. Huvuddelen av boken ägnas åt att mäta chanserna för olika utfall vid t.ex. tärningsspel.

I Cardanos Italien var handelsräkning viktig. Att räkna pengar, att mäta och att väga var en del av vardagen för många och de första räknelärorna hade funnits ett antal decennier. Det kan då ha varit naturligt att också försöka mäta chanserna att vinna i hasardspel. Ett av många av Cardanos exempel får illustrera hans resonemang.

> Cardano inför begreppet ”krets” för alla möjligheter som man får genom att t.ex. kasta en tärning. Med modern terminologi kallar vi det för ”utfallsrum”. Kastar man en tärning består alltså kretsen av sex olika möjligheter och om man kastar två tärningar består den av 36. Han säger att de udda talen 1, 3 och 5 vid kast med en tärning representerar ”jämspelthet” eftersom de är lika många som de övriga 2, 4 och 6 i kretsen. En jämspelt händelse vid kast med två tärningar innehåller med detta synsätt 18 möjligheter. Han vill mäta graden av jämspelthet av de möjligheter som ger minst en etta vid kast med två tärningar. Cardano finner att antalet sådana möjligheter är 11. En möjlighet är att båda tärningarna visar en etta. Om antalet ögon på de båda tärningarna är olika så kan den ena visa en etta och den andra 2, 3, 4, 5 eller 6. Det ger fem möjligheter. På samma sätt finns det fem möjligheter där den andra tärningen visar en etta. Totalt finns det alltså 11 möjligheter. Eftersom en jämspelt händelse innehåller 18 möjligheter och graden av jämspelthet är 1/2 för en händelse med 9 möjligheter så är graden av jämspelthet för minst en etta något större än $1/2$.

I ett annat exempel undersöker Cardano hur summan av tärningarnas ögon fördelas om man kastar tre tärningar. Samma problem studerar en av de vetenskapliga giganterna, Galileo Galilei, i en artikel ”Angående en undersökning om tärningskast”. Artikeln omfattar endast drygt två sidor i hans samlade verk *Opere* som är på över 600 sidor och det vittnar kanske om att han endast ägnat problemet ett marginellt intresse. Den är skriven någon gång mellan 1613 och 1623.

Liber de ludo aleae publicerades först 1663 nästan hundra år efter Cardanos död. Då hade sannolikhetsläran blivit en en del av matematiken och flera framstående matematiker ägnade sig åt att utveckla området. En engelsk översättning av Cardanos verk är tillgänglig på Internet.

16.1.2 Brevväxlingen mellan Pascal och Fermat – sannolikhetslärans födelse

År 1654 ställde den franske adelsmannen Chevalier de Méré, som var en passionerad spelare och dessutom intresserad av matematik, en fråga till den då trettioettårige matematikern Blaise Pascal: Hur skall insatsen i ett spel fördelas om ett spel måste avbrytas i förtid? Ett exempel får belysa frågeställningen: Anta att man spelar krona och klave till dess antingen krona eller klave kommer upp fyra gånger. Spelare A vinner om krona kommer upp fyra gånger annars vinner spelare B. Av olika skäl måste spelet avbrytas efter fem kast. Då har krona kommit upp tre gånger och klave två. Hur skall insatsen fördelas om båda spelarna satsat lika mycket? För att lösa problemet krävs en analys av hur fortsättningen av spelet kan utfalla och vilka andelar som är positiva för A respektive B.

Pascal var trots sin ungdom etablerad i Paris matematiska kretsar. Han hade redan under tonåren visat prov på stor vetenskaplig begåvning och givit viktiga bidrag både inom fysik och matematik – som sjuttonåring härledde han t.ex. viktiga resultat inom projektiv geometri. Han tog kontakt med Pierre de Fermat för att diskutera de Mérés problem. Fermat var egentligen jurist och hade som sådan en hög ställning i sin hemstad Toulouse. Brevväxlingen mellan

Pascal och Fermat, som väsentligen ägde rum under sommaren 1654, brukar betraktas som sannolikhetslärans födelse.

Korrespondensen är ett intressant exempel på hur en matematisk teori skapas. De båda skribenterna har olika meningar och kommer till olika resultat. De argumenterar och lyssnar på varandras argument och till slut uppnår de samsyn. Pascal skriver i ett av de sista breven: ”Vi är på nytt i samklang med varandra.”.

Korrespondensen finns tillgänglig på Internet under rubriken *Fermat and Pascal on Probability (1654)*. Tyvärr finns inte det första brevet bevarat vilket ger en del tolkningsproblem. Några korta nedslag i korrespondensen får illustrera meningsskiljaktigheterna.

I ett av de första breven studerar Fermat ett problem av samma typ som de Mérés ursprungliga: Två spelare, A och B, spelar krona och klave. Varje gång myntet visar krona får A en poäng och om det visar klave får B en poäng. Den som först kommer till tio har vunnit. De har från början satsat lika stora penningsummor och segraren får hela potten. Antag att A saknar två poäng och B tre då spelet avbryts. Fermat studerar då vad som skulle kunna inträffa i fortsättningen. Spelet måste under alla förhållanden vara avgjort efter ytterligare fyra kast. Tre räcker inte eftersom då kan A ha vunnit en gång och B två gånger. Efter fyra omgångar har antingen B vunnit tre poäng eller så har A vunnit de två poäng han saknar. Fermat skriver ut de olika fall som kan inträffa under de fyra följande omgångarna.

AAAA	*AAAB*	*AABA*	*AABB*
ABAA	*ABAB*	*ABBA*	*ABBB*
BAAA	*BAAB*	*BABA*	*BABB*
BBAA	*BBAB*	*BBBA*	*BBBB*

Av dessa vinner B endast fem (*ABBB*, *BABB*, *BBAB*, *BBBA* och *BBBB*) och A de elva övriga. Om båda spelarna satsat 8 pistoler var d.v.s. totalt 16 så menar Fermat att A skall ha 11 och B 5.

Uppenbarligen kommer inte alla dessa spel att äga rum. Om A vinner de två första spelen så avbryts spelet. Det är ju inte meningsfullt att fortsätta. Pascal hade därför betänkligheter mot Fermats resonemang och vill utforma en teori som utgår från de spel som verkligen inträffar. Han ger en annan metod. Fermat är emellertid kritisk till Pascals resonemang och påpekar uppenbara felaktigheter. Pascal medger att han har haft fel och ger ett nytt förslag och kommer till samma resultat som Fermat men med ett betydligt mer komplicerat resonemang som han sedan kan generalisera. Han hävdar emellertid att även om de får samma resultat då antalet spelare är två så håller inte Fermats resonemang om man istället betraktar motsvarande spel med tre spelare. Pascal visar att de båda metoderna då ger olika resultat. Fermat svarar med att Pascal missuppfattat hans resonemang och resultaten blir desamma med båda metoderna även med tre spelare. Pascal erkänner att han har haft fel och korrespondensen upphör. Fermat gör ett försök att återuppta den. Pascal avböjer artigt och hänvisar till att matematiken inte är så viktig för honom längre. I biografin över Pascal i kapitel 7 citerar vi de rader som visar Pascals desillusionerade syn på matematiken.

Medan Fermats resonemang för dagens läsare verkar klart och enkelt är Pascals betydligt svårare att följa. Men Pascals mer slingriga och komplicerade tankegångar leder honom in på ett område, kombinatorik, som kom att visa sig vara viktiga för sannolikhetslärans utveckling. Inom kombinatoriken behandlas frågeställningar som ”På hur många sätt kan man få tre kronor och fyra klavar vid sju kast med ett mynt?”, ”På hur många sätt kan man få siffersumman tolv vid kast med tre tärningar?”. Pascal behandlar denna typ av problem i *Traité de triangle arithmétique* (”Arbete rörande aritmetisk triangel”). I den utgår han från det vi idag kallar *Pascals triangel* och använder den för att lösa kombinatoriska problem. Artikeln, som publicerades 1654, är uppenbarligen inspirerad av korrespondensen med Fermat.

16.1.3 Huygens bidrag

Även om ordet sannolikhet inte förekommer i Pascals och Fermats korrespondens så finns begreppet med indirekt. Fördelningen av potten vid ett avbrutet spel görs på basis av sannolikheterna för att A respektive B vinner. Brevväxlingen ger inte heller någon systematisk teori om den del av matematiken som idag kallas *sannolikhetslära*. Det blir en holländsk fysiker och matematiker, Christiaan Huygens, som skriver den första sammanhängande framställningen av området. Han verkade under en tid i Paris och han lärde känna Pascal och Fermat. År 1657 publicerade han *De ratiociniis in ludo aleae* ("Att resonera om chanser vid spel"). Arbetet är kort och koncist – det omfattar endast 14 sidor – delvis beroende på att han använder den då relativt nya algebran. Han utgår från ett antal postulat och utifrån dem härleder han tretton propositioner. En del av propositionerna består helt enkelt av konkreta problem som han löser. Han avslutar med fem problem med svar som han överlåter till läsaren att lösa.

En av de grundläggande reglerna, som används ofta, är Proposition III. Han formulerar den på följande sätt:

> "Anta att jag har p möjligheter att tjäna a och q möjligheter att tjäna b. Om varje möjlighet förutsätts ha samma chans så kommer min förväntade förtjänst att vara $(ap+bq)/(p+q)$."

Han exemplifierar regeln och skriver "Med tal: Om jag har 3 möjligheter att få 13 och 2 att få 8 så är mitt förväntade värde 11."

Även om Huygens inte heller använder sig av begreppet sannolikhet så ligger det nära till hands att kalla $p/(p+q)$ och $q/(p+q)$ för chanserna eller sannolikheterna för förtjänsterna a respektive b.

Vi avslutar med en fri översättning av av Proposition XIII.

> "Antag att jag kommer överens med en annan spelare att spela om en summa pengar genom att kasta två tärningar och att förutsättningarna är följande: Om tärningarna visar 7 så vinner jag och om den visar 10 vinner min motspelare. Om resultatet är något annat tal kommer vi överens om att var och en får halva potten. Bestäm våra förväntade andelar av summan.
>
> Eftersom av de 36 möjliga utfallen av kast med två tärningar 6 ger talet 7 och 3 talet 10 återstår det 27 möjligheter, som, om någon av dessa inträffar, medför att ingen av oss varken vinner eller förlorar vilket ger oss $\frac{1}{2}a$ vardera. Om detta inte inträffar så har jag 6 möjligheter att vinna a och 3 möjligheter att förlora d.v.s. att vinna 0. Enligt Proposition III innebär det att den vinst jag kan förvänta är $\frac{2}{3}a$. Därför har jag från början 27 möjligheter att vinna $\frac{1}{2}a$ och 9 möjligheter att vinna $\frac{2}{3}a$, som enligt Proposition III innebär att jag kan förvänta mig att vinna $\frac{13}{24}a$ och min motståndare $\frac{11}{24}a$."

16.1.4 Jacob Bernoulli och De stora talens lag

Den schweiziske matematikern Jacob Bernoulli har Huygens bok som utgångspunkt då han skriver sitt stora verk *Ars conjectandi* ("Konsten att gissa"). Boken publicerades inte under Jacobs livstid. Det var hans brorson Nicolaus som sammanställde arbetet och gav ut det 1713 åtta år efter Jacobs död.

Den första delen av *Ars conjectandi* är en genomgång av Huygens arbete, den andra handlar om kombinatorik och den tredje om hasardspel. Det är emellertid den fjärde och sista delen som är den viktigaste. I den härleder Bernoulli vad som senare skall kallas *De stora talens lag*. Innan vi går närmare in på den fjärde delen av *Ars conjectandi* kan vi notera att Bernoulli inför begreppet sannolikhet men att hans mått skiljer sig från vårt. Sannolikheten för att en händelse skall inträffa mäter Bernoulli genom kvoten mellan antalet gynnsamma och antalet ogynnsamma utfall. Detta mått ligger mycket nära det som användes idag nämligen kvoten mellan antalet gynnsamma och möjliga utfall. Bernoullis mått motsvarar det vi idag kallar odds. Sannolikheten att få en sexa vid kast med tärning är med Bernoullis mått $1/5$ medan den med vårt sannolikhetsbegrepp är $1/6$. Även om Bernoulli mäter sannolikheten på ett annat sätt än vi så påverkar det inte de principiella resonemangen.

Titeln på del 4 i *Ars conjectandi* är ”Tillämpning av föregående lärosatser på civila, moraliska och ekonomiska angelägenheter”. Den inleds med allmänna reflektioner om vad som gör ett argument säkert och hur man mäter dess tillförlitlighet. Han påpekar bl.a. informationens betydelse för att bedöma sannolikheten för en händelse och ger ett exempel:

> ”Antag att tre skepp lämnar hamnen. Efter en tid rapporteras att ett av dem lidit skeppsbrott och förlorats. Frågan ställs: Vilket av dem? Om jag bara tar hänsyn till antalet skepp skulle jag anta att var och en av dem har mött sitt öde med samma sannolikhet. Men eftersom ett av dem var jämförelsevis gammalt och skröpligt, dåligt utrustat med master och segel och med en ung och oerfaren rorsman, så är jag övertygad om att det är detta skepp som gått förlorat och inte de båda andra.”

Han kommer in på sannolikhetsmåttet. Vi känner sannolikheten för att en speciell händelse vid ett försök skall inträffa om vi vet möjliga utfall och antalet som där händelsen inträffar. Sannolikheten för att vi t.ex. skall få summan åtta vid kast med två tärningar är då 5/36 eftersom vi har 5 gynnsamma utfall nämligen $(2,6)$, $(3,5)$, $(4,4)$, $(5,3)$ och $(6,2)$ medan antalet möjliga utfall är 36. Vi bör alltså bedöma sannolikheten till 5/36 eller med Bernoullis mått $5/31$. Om vi nu upprepar försöken ett stort antal gånger och för varje försök antecknar om händelsen inträffar eller inte så kommer kvoten mellan dessa tal att med mycket stor säkerhet ligga mycket nära händelsens sannolikhet i Bernoullis mening. Det betyder alltså att om vi kastar två tärningar ett stort antal gånger så kommer kvoten mellan antalet gånger vi får summan åtta och totala antalet, den s.k. relativa frekvensen, att ligga mycket nära $5/36$. Han formulerar De stora talens lag som säger följande om vi använder vårt sannolikhetsbegrepp:

> Antag att sannolikheten för en händelse vid ett försök är p och att vi upprepar försöket så att utfallen är oberoende av varandra. Då kommer den relativa frekvensen att ligga godtyckligt nära p med en sannolikhet som är godtyckligt nära 1 om bara antalet försök är tillräckligt stort.

Detta, menar Bernoulli, är något som många tar för givet men som han ämnar bevisa matematiskt. Han förutsätter försökens utfall inträffar slumpvis och det innebär att varje utfall har lika stor sannolikhet. Det är menar han en stor begränsning och säger:

> ”Vi har nu nått den punkt där det förefaller som om det för att göra en korrekt gissning om en händelse vilken som helst bara är nödvändigt att beräkna det exakta antalet möjliga fall, och sedan bestämma hur mycket mera sannolikt det är att ett fall kommer att inträffa än ett annat. Här reser sig emellertid genast vår största svårighet, ty denna procedur är tillämplig endast på mycket få fenomen, faktiskt uteslutande på dem som har att göra med hasardspel. [. . .] Men jag undrar, vilken dödlig som skulle kunna utröna antalet sjukdomar, alla möjliga fall inberäknade, som drabbar den mänskliga kroppen i var och en av dess

många delar och vid varje ålder, och som skulle kunna säga hur mycket större trolighet det är att en sjukdom medför döden än en annan – pest än vattusot t.ex., eller vattusot än feber – och på den grunden göra en förutsägelse om förhållandet mellan liv och död i kommande generationer.”

Men om det mått på sannolikhet som används i hasardspel inte är tillämplig på mer komplexa situationer så finns det en väg runt problematiken. Han skriver: ”Det måste i detta sammanhang antagas, att, under liknande villkor, inträffandet (eller icke-inträffandet) av en händelse i framtiden kommer att följa samma mönster som iakttogs för liknande händelser i det förflutna.”. De stora talens lag borde gälla för mer komplicerade försök än de rena hasardspelen. En uppfattning om sannolikheten för en händelse, t.ex. att ett nyfött barn är en flicka, skulle man i så fall kunna få genom att beräkna dess relativa frekvens efter ett stort antal observationer. En konsekvent teori med denna utgångspunkt formulerades 150 år senare av den engelske logikern John Venn i verket *The Logic of Chance* från 1866.

Bernoulli avslutar *Ars conjectandi* med att visa de stora talens lag. Beviset är tekniskt och utnyttjar egenskaper hos binomialkoefficinterna. Han gör också numeriska beräkningar. Antag vi har en urna med 3 000 vita och 2 000 svarta kulor och drar en kula antecknar dess färg och lägger tillbaka den. Sannolikheten för att kulan är vit är varje gång 3/5. Bernoulli visar att det krävs 25 500 observationer för att med säkerheten $10\,000/10\,001$ konstatera att relativa frekvensen ligger mellan $3/5 - 1/50$ och $3/5 + 1/50$.

16.1.5 Två viktiga bidrag från Storbritannien

Abraham de Moivre var född i Frankrike och fick sin grundläggande utbildning där men flydde till England 1688 på grund av förföljelser mot protestanter. Han var då en kompetent matematiker men han fick aldrig någon tjänst vid ett brittiskt universitet. Den banan var stängd för utlänningar. Han fick försörja sig genom att ge privatlektioner. Samtidigt etablerade han kontakter med ledande vetenskapsmän och blev god vän med bl.a. Isaac Newton. Han var också nära vän med Edmond Hailey, som då arbetade med livförsäkringstabeller, och kanske var det vänskapen med honom som kom de Moivre att intressera sig för frågor om sannolikheter. Han hade studerat Huygens och Jacob Bernoullis arbeten och 1718 gav han ut *The Doctrine of Chances: A method of calculating the probability of events in play*.

de Moivre inleder *The Doctrine of Chances* med att definiera begreppet sannolikhet. Han skriver:

”… om vi bildar ett bråk där täljaren är antalet möjligheter där en händelse inträffar och nämnaren är det totala antalet möjligheter där antingen händelsen inträffar eller inte inträffar, så är det bråket ett lämpligt mått på sannolikheten.”

de Moivre använder alltså samma sannolikhetsmått som vi när det gäller hasardspel. Boken består av ett stort antal problem. De formuleras först i mycket konkreta termer och är vad vi ofta kallar sifferexempel. Han varierar sedan uppgiften med nya tal och landar ofta i en generell situation där problemen formuleras och löses algebraiskt. Han hämtar sina problem från olika former av hasardspel som kast med tärning, lottdragning, dra kort ur en kortlek m.m. De blir efter hand allt mer komplicerade och ofta presenteras lösningen med hjälp av summor. Problem XXXV, för att ta ett exempel, lyder som följer:

”Låt a, b, c, d, e, f etc. vara ett antal bokstäver som alla är olika. Ordna dem godtyckligt. Vad är sannolikheten att någon av dem placeras på samma plats som den har i den vanliga bokstavsordningen.”

Han löser problemet då antalet bokstäver är sex och får resultatet

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{6} - \frac{1}{24} + \frac{1}{120} - \frac{1}{720} = \frac{265}{720} = \frac{53}{144}$$

och säger att om antalet bokstäver är fler kan man bara lägga till termer enligt samma mönster. Dagens läsare känner igen början av serieutvecklingen av $1/\mathrm{e}$. Det skall anmärkas att beteckningen e infördes av Euler några decennier efter det att *The Doctrine of Chances* kommit ut.

Det kanske viktigaste avsnittet i *The Doctrine of Chances* är ett av de sista och har den långa rubriken ”En metod att approximera summor av termer i binomialutvecklingen $(a+b)^n$ från vilken härledes några praktiska regler för att uppskatta graden av tillförlitlighet som kan ges åt experiment.”. Inledningsvis nämner han att Bernoulli uppmärksammat problemet men att han inte givit någon enkel metod för att uppskatta avsnitt av binomialutvecklingen när n är stort. Det är alltså något helt nytt som de Moivre gör. Han finner att om n är oändligt stort så är logaritmen av förhållandet mellan en term på avståndet l från utvecklingens mittenterm och mittentermen lika med $-2l^2/n$. Översätter man detta till dagens formelspråk har de Moivre visat att en binomialfördelning kan approximeras med en normalfördelning.

Det kan tilläggas att boken avslutas med tillämpningar på livförsäkringstabeller.

Thomas Bayes var en engelsk presbyteriansk präst. Han studerade teologi och logik vid universitetet i Edinburgh. Han intresserade sig för matematik och gav anonymt ut en skrift där han försvarade Isaac Newtons teorier om fluxioner med anledning av Georg Berkeleys kritik. Under sina sista år blev han intresserad av sannolikhetslära. Några anser att det var de Moivres *The Doctrine of Chances* som väckte hans intresse, andra menar att det var diskussioner av teologisk natur. Efter hans död hittade man ett manuskript om sannolikhetslära som hans gode vän **Richard Price** redigerade och det publicerades 1764 av vetenskapsakademin under titeln *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances*.

Bayes inför vad vi kallar betingade sannolikheter. Han studerar händelser som inte är oberoende av varandra. Proposition 3 lyder:

> ”Sannolikheten att vid två på varandra följande försök två givna händelser inträffar är sannolikheten för den första multiplicerad med sannolikheten för den andra om den första inträffat.”

Om de båda händelserna är A och B kan vi med vår terminologi skriva detta

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B \mid A)$$

som efter några omskrivningar leder det vi dag kallar *Bayes sats*

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A)P(A)}{P(B)}.$$

Bayes arbetar med allmänna frågeställningar som vi illustrerar med ett exempel från hans artikeln. Det handlar om en man som försöker uppskatta förhållandet mellan antalet nitlotter och vinstlotter i ett lotteri. Han observerar att i en serie på elva lotter så är det 1 vinst och 10 nitlotter. Bayes beräknar sannolikheten för att förhållandet mellan nitlotter och vinstlotter ligger mellan $9/1$ och $11/1$. Den är ganska låg bara c:a 7.7 procent. Han fortsätter och beräknar motsvarande sannolikheter om mannen observerar att det är 4 vinstlotter och 40 nitlotter o.s.v.

Sannolikheterna växer och om det på en serie av 11 000 lotter finns 1 000 vinstlotter och 10 000 nitlotter så är sannolikheten att förhållandet mellan nitlotter och vinstlotter ligger mellan $9/1$ och $11/1$ lika med ungefär 97 procent.

En gren av statistiken kallas *bayseansk*. Ett påstående kan subjektivt tillmätas olika grad av tilltro. Sannolikheten för att det är sant varierar med den informationen man har. Bayes sats spelar en avgörande roll. Det finns en diskussion bland statistiker om Bayes själv var baysean eller inte. Någon enighet verkar inte finnas.

16.1.6 Laplaces *Théorie analytique des probabilités*

Flera matematiker gav under 1700-talet viktiga bidrag till sannolikhetsläran och utvecklingen kulminerade med den franske vetenskapsmannen Pierre Simon Laplaces stora verk *Théorie analytique des probabilités* från 1812. Det är ett omfattande verk i två delar. I inledningen finns en historik där Laplace bl.a. tar upp Fermats, Pascals, Huygens, Bernoullis, de Moivres och Bayes arbeten. Det kan noteras att Laplace både i den historiska inledningen och senare i de mer tekniska avsnitten tar upp och behandlar det problem som Chevalier de Méré ställde och som var upphov till korrespondensen mellan Pascal och Fermat.

I den första delen utvecklar han den matematik som han behöver för att ge sannolikhetsläran en matematisk form. Han introducerar en teknik med genererande funktioner där

$$u = y_n t^n + y_{n-1} t^{n-1} + \ldots + y_1 t + y_0$$

är den genererande funktionen till följden $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n$. Följden skall i den andra delen vara sannolikheter. Den teknik Laplace utvecklar används numera ofta inom kombinatorik.

I den andra delen diskuterar han sannolikhetsbegreppet och visar hur man med avancerad matematik kan lösa problem inom sannolikhetsläran. Laplace utgår från tio grundläggande principer. De tre första är följande:

> ”Första principen – Den första av dessa principer är själva definitionen på sannolikhet, vilken som vi sett är förhållandet mellan antalet gynnsamma och totala antalet möjliga fall. [. . .]
>
> Andra principen – Denna definition förutsätter dock att de olika fallen är lika möjliga. Om detta inte är fallet, måste man först bestämma deras inbördes sannolikheter, vilkas exakta värdering är en av de känsliga punkterna i sannolikhetsteorin. Sannolikheten kommer då att bli summan av möjligheterna för varje gynnsamt fall. [. . .]
>
> Tredje principen – En av de viktigaste punkterna i sannolikhetsläran, och den som ofta brukar leda till villfarelse, är det sätt på vilket dessa sannolikheter ökar eller minskar, då de kombineras med varandra. Om händelserna är oberoende av varandra är sannolikheten för deras samtidiga förekomst produkten av deras sannolikheter var för sig.”

En av de övriga sju principerna handlar om hur sannolikheten för en händelse förändras om vi vet att en annan händelse inträffat och är väsentligen hämtad från Bayes arbete.

I ett viktigt avsnitt diskuterar han minsta kvadratmetoden som används för att anpassa t.ex. en rät linje till en följd av observationer där varje observation måste antas ha ett fel. Han visar att den metoden är den optimala om man antar att felen vid observationerna är normalfördelade. Han diskuterar också tillämpningar inom områden som naturvetenskap, demografi, etik och juridik. När det gäller demografiska frågor diskuterar han hur man med de statistiska data som finns kan bestämma sannolikheter för olika händelser t.ex. att ett nyfött barn är en pojke eller flicka. De stora talens lag spelar naturligtvis en avgörande roll.

I diskussionerna kring sannolikhetslärans tillämpningar inom etik och juridik ligger latent behovet av ett nytt sannolikhetsbegrepp.

Théorie analytique des probabilités är tekniskt och kräver att läsaren är förtrogen med den tidens matematik. I *Essai philosophique sur les probabilités* från 1814 ger han en mer lättillgänglig version av grundtankarna och tillämpningarna. Ursprunget till arbetet är en föreläsning han hållit för den tidens lärarkandidater.

I ett inledande kapitel om sannolikhet beskriver han några av de filosofiska utgångspunkter som ligger till grund för arbetet. Redan på andra sidan finns ett ofta citerat stycke där Laplace ger en mekanistisk syn på världen. Vi har citerat det i kapitel 8 men citerar det på nytt:

> ”Vi bör således betrakta universums nuvarande tillstånd som följden av dess föregående tillstånd och som orsaken till de kommande. Tänker vi oss ett intellekt som kan uppfatta alla krafter som besjälar naturen och tillståndet av alla de delar varav den är uppbyggd – ett tillräckligt omfattande intellekt för att kunna analysera alla dessa data – skulle det i samma formel kunna innefatta rörelserna hos universums största kroppar och dess lättaste atomer. För detta intellekt skulle ingenting vara ovisst och framtiden liksom det förgångna skulle ligga öppen inför dess ögon.”

Den mänskliga intelligensen kan, även om kunskapen om omvärlden hela tiden utvecklas, inte helt genomskåda orsakssammanhangen. Den kan inte alltid förutse vilka händelser som skall inträffa utan är ofta begränsad till att göra någon form av uppskattning av sannolikheterna för de olika utfallen. Sannolikhet är något relativt. Han säger: ”Sannolikhetsteorin är delvis förbunden med denna okunnighet, delvis med vår kunskap.”.

Laplace har genom *Théorie analytique des probabilités* sammanfattat och utvecklat tankegångar från de matematiker som tidigare varit verksamma inom området. Arbetet är ett av sannolikhetslärans mest betydelsefulla verk.

16.1.7 Ett annat sannolikhetsbegrepp

I matematiken är sannolikhetsbegreppet från början knutet till hasardspel där alla utfallen betraktas som lika sannolika. Som både Bernoulli och Laplace påpekar så innebär detta en avsevärd begränsning för sannolikhetslärans tillämpbarhet. De stora talens lag ger en möjlighet att lösa problematiken. Om ett försök upprepas så kommer den relativa frekvensen för en händelse att stabilisera sig kring ett tal och det talet kallar vi händelsens sannolikhet. Statistiska underlag kommer då att spela en stor roll. Om vi observerar att av tusen nyfödda barn i en region är 484 av dessa flickor så är det rimligt att sätta sannolikheten att ett nyfött barn är en flicka till 0.484.

När vi i dagligt tal använder ordet ”sannolikhet” eller ”chans” har det emellertid oftast en betydligt vagare betydelse. Det finns händelser som vi inte kan upprepa men som vi betraktar som mer eller mindre sannolika och där vi ofta ger ett mått på sannolikheten. Att en kärnkraftsolycka inträffar med en viss procents sannolikhet är inte möjligt att verifiera vare sig genom antagandet om likformighet eller genom att utföra upprepade försök. När en läkare ger en diagnos så är det alltid med en viss osäkerhet och den anges ibland med ett tal mellan 0 och 1. Bakom diagnosen ligger ofta en kombination av medicinsk kunskap och erfarenhet, men man kan knappast tala om att sannolikhetsmåttet har sin grund i upprepade försök och stabiliteten hos de relativa frekvenserna. Karakteristiskt för denna typ av sannolikhetsbedömningar är att de förändras när informationen ökar.

En som tidigt kritiserade det snäva sannolikhetsbegrepp som det presenterades inom matematiken var John Maynard Keynes – en engelsk filosof och ekonom vars teorier användes av Franklin D. Roosevelt i det ekonomiska program, The New Deal, som skulle råda bot mot USA:s kris efter den stora börskraschen. Keynes intresserade sig inte bara för ekonomi utan för en rad andra områden. I arbetet *A Treatise on Probability* från 1921 skriver han:

> ”Elever som studerar sannolikhet i den mening, som författare till böcker med titlar som ’Wahrscheinlichkeitsrechnung’ eller ’Calcul des Probabilité’ [Sannolikhetskalkyl] avser, kommer möjligen att som jag själv komma i kontakt med områden som de är bekanta med. Men för att göra ett allvarligt försök att hantera fundamentala svårigheter som alla studerande av matematiska sannolikheter har mött, måste vi börja från början (eller nästan från början) och behandla ämnet brett. Så snart matematisk sannolikhet tenderar att endast bli algebra eller att låtsas vägleda våra beslut, möter det omedelbart problem mot vilka dess egna vapen är maktlösa. Och även om vi senare ämnar använda sannolikhet i snäv mening, måste det vara värdefullt att känna till dess betydelse i ett vidare sammanhang.”

Den tolkning av sannolikhetsbegreppet som Keynes förespråkar kallas *subjektiv*. Sannolikhet är en grad av övertygelse och den modifieras med hänsyn till graden av kunskap. En strikt matematisk uppbyggnad av denna teori är abstrakt och tekniskt avancerad där Bayes sats är central. Ett exempel får illustrera tankegångarna och hur viktigt det är att även det subjektiva sannolikhetsbegreppet måste behandlas med logisk konsekvens. Exemplet är hämtat från boken *Vetenskapsteori för sanningssökare* (2013) som är skriven av de båda filosoferna **Nils-Eric Sahlin** och **Johannes Persson**. Det visa hur lätt det kan vara att dra felaktiga slutsatser och hur viktigt det är att kritiskt granska de resonemang som leder till slutsatserna. Att sannolikheten är subjektiv innebär inte man får göra avsteg från logiskt korrekta resonemang.

> ”En läkare gör bedömningen att sannolikheten för att en kvinna ur en given grupp har bröstcancer är 0,01. Han gör också bedömningen att sannolikheterna för att en kvinna som har respektive inte har bröstcancer visar positivt resultat på ett test är 0,8 respektive 0,1. Det är rimligt att tänka sig att läkarens subjektiva bedömningar grundar sig på statistiskt material kombinerat med egna erfarenheter.
>
> Anta att en kvinna vid testet visar positivt resultat. Vad är sannolikheten för att hon har bröstcancer? Frågan ställdes till en grupp försökspersoner – alla läkare. Av dem svarade 95 procent att sannolikheten är mellan 0.7 och 0.8. Sannolikhetstolkningarna må vara subjektiva men de är felaktiga utifrån den givna informationen. Den korrekta uppskattningen av sannolikheten är ungefär 0.075 d.v.s. tio gånger lägre och vi kan beräkna den på följande sätt: Anta för enkelhets skull att populationen är på 1000 kvinnor. Av dessa uppskattas 1 procent d.v.s. 10 ha bröstcancer och av dem visar 80 procent d.v.s. 8 positivt resultat. Av de 990 som bedöms inte ha bröstcancer beräknas 10 procent d.v.s. 99 visa positivt resultat. Totalt visar alltså $10 + 99 = 109$ positivt resultat och av dem har 8 bröstcancer. Sannolikheten för att en kvinna i gruppen har bröstcancer om resultatet är positivt är alltså $8/109$ som är ungefär lika med 0.075.”

16.1.8 Kolmogorovs axiomsystem

Under 1800-talet gavs flera viktiga bidrag till sannolikhetsläran och vi kan särskilt nämna den franske matematikern **Siméon Poisson** som i en artikel *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile* (”Undersökningar om sannolikheten för dom i brottsmål och civilrättsliga frågor”) från 1837 införde det vi idag kallar Poissonfördelningen. Den används inom det som kallas *köteori*. Det kan t.ex. handla om att uppskatta antalet personer som besöker en akutmottagning under ett givet tidsintervall.

Ett epokgörande arbete som gav sannolikhetsläran en fastare grund var den ryske matematikern Andrej Kolmogorovs arbete *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung* som publicerades 1933 och översattes till engelska under titeln *Foundations of the Theory of Probability*. Boken är inget bidrag till sannolikhetsläran i den meningen att den ger några nya resultat. Det är inte Kolmogorovs mening. Han ger en struktur åt ämnesområdet på samma sätt som Euklides en gång gav struktur åt geometrin. Genom att använda begrepp från mängdläran formulerar han ett antal postulat som skall ligga till grund för teorin. En bakgrund till Kolmogorovs arbete är Lebesgues teorier om integraler och mått. Han säger i förordet: ”Efter Lebesgues publikationer om sina undersökningar så blev analogierna mellan måttet av en mängd och sannolikheten för en händelse, och mellan integralen av en funktion och det förväntade värdet av en stokastisk variabel uppenbara.”. Vi ger en förenklad version av de grundläggande begreppen och postulaten.

Ett försök kan utfalla på olika sätt och mängden av försökens alla utfall eller elementära händelser kallar Kolmogorov utfallsrum som han betecknar med E. En delmängd av utfallsrummet kallas en *händelse*. Om vi kastar två tärningar består utfallsrummet av 36 olika utfall. Om vi anger temperaturen på en given plats i grader Celsius består utfallsrummet i princip av alla reella tal större än -273, som är den absoluta nollpunkten. Exempel på händelser är i det förra fallet ”siffersumman är 10” och i det andra ”temperaturen ligger mellan 20 och 40 grader Celsius”. Antag nu att A och B är två händelser. Med hjälp av begrepp från mängdläran kan nu händelsen ”minst en av händelserna A och B inträffar” tecknas $A \cup B$ och händelsen ”båda händelserna A och B inträffar” tecknas $A \cap B$. Om i fallet med temperaturmätning A och B är händelserna $15 \leq u \leq 30$ respektive $20 \leq u \leq 40$ där u är temperaturen så är $A \cup B$ händelsen $15 \leq u \leq 40$ och $A \cap B$ händelsen $20 \leq u \leq 30$.

Kolmogorovs postulat kan nu något förenklat och kortfattat formuleras på följande sätt:

> Antag att vi till varje delmängd A av E har ordnat ett positivt tal $P(A)$ sådant att $P(E) = 1$ och som uppfyller $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ om A och B inte har några gemensamma element. Vi kallar då P för en sannolikhetsfunktion och $P(A)$ för sannolikheten för A.

Med postulaten som grund utvecklar nu Kolmogorov sannolikhetsläran. Han inför begrepp som betingad sannolikhet, oberoende händelser, diskreta och kontinuerliga stokastiska variabler, fördelnings- och frekvensfunktioner och förväntade värden och han formulerar och bevisar satser som Bayes sats och De stora talens lag.

Kolmogorovs epokgörande arbete från 1933 har blivit standard och idag utgår de flesta läroböcker i sannolikhetslära från hans axiom och byggs upp enligt hans intentioner. Den blev också grunden för många framställningar av statistik. Men innan vi går in på det skall vi förflytta oss några hundra år tillbaka i tiden och studera hur statistiken blev en vetenskap.

16.2 Statistik

16.2.1 Londons dödslängder

> ”Jag är född och uppväxt i London, och jag har alltid lagt märke till att de flesta av dem, som regelbundet varje vecka läser ’Dödslängderna’, inte ägnade större intresse för dem än att de bara kastade en blick längst ner för att se hur antalet begravningar ökat eller minskat och sedan såg på olycksfallen efter något ovanligt och märkvärdigt som hänt under den gångna veckan, så att de skulle kunna ta denna uppgift som en text som kunde läggas ut vid nästa sammankomst bland vänner. Under tider av pest ser man hur sjukdomen tilltar eller avtar, och därigenom kan de rika avgöra om det är nödvändigt att de flyttar från staden, och hantverkarna kan se efter hur affärerna kommer att bli för deras olika varor.”

Så börjar John Graunts banbrytande verk från 1662 om *Natural and Political Observations Made upon the Bills of Mortality* (”Naturhistoriska och politiska iakttagelser rörande Londons dödslängder”). Arbetet brukar räknas som det första försöket att tolka fenomen och sociala beteenden med utgångspunkt från numeriska data. Litet senare i förordet beskriver Graunt tankarna bakom arbetet.

> ”Jag försåg mig, kort sagt med så mycket material av detta slag, som församlingarna kunde ställa till förfogande. Då jag reducerat dessa till tabeller (varav kopior här återgivits), kunde jag få en överblick över det hela, så att jag lättare kunde jämföra ett år med ett annat, en årstid med en annan, eller en församling eller en annan del av staden med en annan med avseende på begravningar, dop och alla sjukdomar och olycksfall som inträffat under respektive del. Jag började då granska de fördomar, åsikter och antaganden, som jag grundat på några få dödslängder. Men inte endast detta, utan jag kom även fram till nya sådana, föranledd av mina tabeller.”

John Graunt var en framgångsrik affärsman – från början en ”kramhandlare” som sålde varor som knappar och nålbrev. Han hade ingen akademisk utbildning men studerade flitigt på sin fritid. Han var allmänt omtyckt och respekterad och anlitades ofta som skiljedomare. Han var en sällskapsmänniska med ett rikt kontaktnät. En av hans vänner var **William Petty**, som mycket tack vare Graunts inflytande blev professor i musik vid universitetet i Oxford. Petty undervisade också i anatomi men hans stora insatser låg inom nationalekonomi. Hans viktigaste verk är *Political Arithmetick* från 1682. Det är epokgörande inom ekonomin i den meningen att Petty inte grundar sina teorier på filosofiska spekulationer utan på insamlade data. Många tror att det är Petty som givit Graunt idéerna till arbetet om Londons dödslängder och att Graunt gjort grovjobbet. Men storheten hos arbetet om Londons dödslängder beror till stor del på Graunts noggranna och tålmodiga arbete. Han känner emellertid som autodidakt en stor osäkerhet på hur hans arbete skall tas emot inom akademin. I slutet av företalet skriver han: ”Ty därigenom har jag, som en dum skolgosse, kommit för att läsa upp min läxa inför världen (denna griniga och retliga lärare) och fört med mig ett ris varmed jag blir agad för varje misstag jag begått.”

Kung Karl II blev så imponerad av verket att han såg till att Graunt blev invald i Royal Society.

16.2.2 Demografiska undersökningar och livförsäkringstabeller

Trettio år efter det att Graunts arbete publicerats gav den tyske prästen Caspar Neumann ut en liknande undersökning över dödligheten i sin hemstad Breslau. Han skickade manuskriptet till Leibniz, som vidarebefordrade det till Royal Society där Edmond Halley fick ögonen på det. Halley hade redan som tjugoåring gjort sig känd i vetenskapliga kretsar och hans stora intresse var astronomi. Men Halleys intresse begränsades inte till astronomin. Han skrev artiklar inom många vitt skilda områden och det var inte främmande för honom att ge sig i kast med ett arbete om dödslängder i en stad i Tyskland. Han studerade Neumanns arbete noggrant och publicerade 1693 en artikel med titeln *An estimate of the degrees of the mortality of mankind, drawn from curious tables of the births and funerals at the city of Breslaw; with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives* (”En uppskattning av människosläktets dödlighet, baserad på märkliga längder över födslar och begravningar i staden Breslau; jämte ett försök att fastställa priset på livräntor”). Halley hade konstruerat de första livförsäkringstabellerna. Neumanns manuskript, som arbetet bygger på, har dessvärre gått förlorat. Endast titelbladet finns kvar.

Neumanns data användes också av den tyske prästen **Johann Peter Süssmilch**. Han kompletterade dem med egna observationer och publicerade år 1741 *Die Göttliche Ordnung In Den Veränderungen Des Menschlichen Geschlechts, Aus Der Geburt, Dem Tode Und Der Fortpflanzung* ("Den gudomliga ordningen rörande människans kön, födelse, död och fortplantning") – ett arbete som anses vara nyskapande inom demografin. Ett av resultaten är att det på 1 000 flickor föds 1 068 pojkar.

16.2.3 Statistik blir ett akademiskt ämne

Det var alltså i England och Tyskland som intresset för att med numeriska data beskriva ett lands demografi och resurser uppstod. I England var det framför allt genom William Petty med sin *Political Arithmetick*. I Tyskland fanns en motsvarande utveckling där **Hermann Conring** (1606–81) spelade en avgörande roll. Conring var en av den tidens ledande intellektuella. Han var professor i Helmstedt först i medicin och sedan i politik. Några decennier efter Conrings död tog **Gottfried Achenwall** (1719–72) upp hans tankar och utvecklade dem. Achenwald var professor i filosofi och juridik vid det berömda universitetet i Göttingen där han var initiativtagare till att ett nytt universitetsämne som fick namnet statistik inrättades 1747. Han gav några år senare ut en lärobok i ämnet, som fick stor spridning. Boken innehåller en beskrivning av olika länders jordbruk, industri och handel med utgångspunkt från numeriska data. Statistik hade nu etablerats som egen disciplin.

16.2.4 Utvecklingen i Sverige

Sverige kom redan under 1700-talet att systematiskt bygga upp en organisation för att hantera statistiskt material. År 1749 inrättades Tabellverket med uppgift att sammanställa befolkningsstatistik för hela riket. Grunden hade lagts redan genom 1686 kyrkolag med dess krav på kyrkobokföring. En befolkningsräkning genomfördes samma år som Tabellverket inrättades.

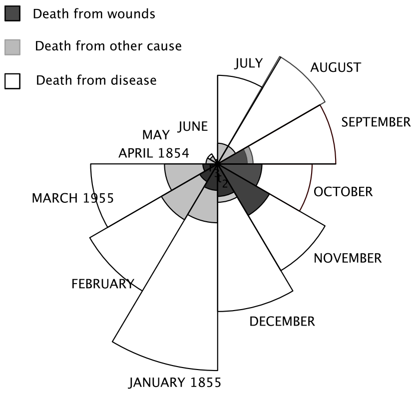
Den som fick ansvaret för att sjösätta Tabellverket var Per Wargentin som 1748 utsågs till Vetenskapsakademins sekreterare – en post han skulle inneha i 34 år. Wargentin var astronom och matematiskt skolad. Han hade studerat både Graunts och Süssmilchs arbeten. Genom att kombinera den engelska traditionen med den tyska och utnyttja det omfattande primärmaterial, som fanns genom kyrkobokföringen, utvecklade han en statistik som var nyskapande och som blev internationellt uppmärksammad. Både Achenwall och hans efterföljare **August von Schlözer** följde med intresse hur en enhetlig tabellstatistik för en hel stat växte fram.

Tabellverkets betydelse minskade under Gustaf III:s regeringstid men intresset för statistik fick en renässans under 1800-talet. År 1856 ersattes Tabellverket med Kungliga statistiska centralbyrån som idag har akronymen SCB.

16.2.5 Konsten att presentera statistiskt material – två pionjärer

Florence Nightingale är legendarisk. Hennes arbete för att minska soldaternas lidande under Krimkriget 1853–56 har gjort henne odödlig. Hon var inte bara en duktig sjuksköterska med stor empati utan också en skicklig organisatör som objektivt kunde analysera den situation som rådde på sjukhuset i Scutari där hon arbetade.

Redan som barn var Florence Nightingale intresserad av matematik men motarbetades av sina föräldrar som inte tyckte att matematikstudier var något för flickor. Till slut föll de till föga och en av hennes lärare var en av den tidens ledande algebraiker James Joseph



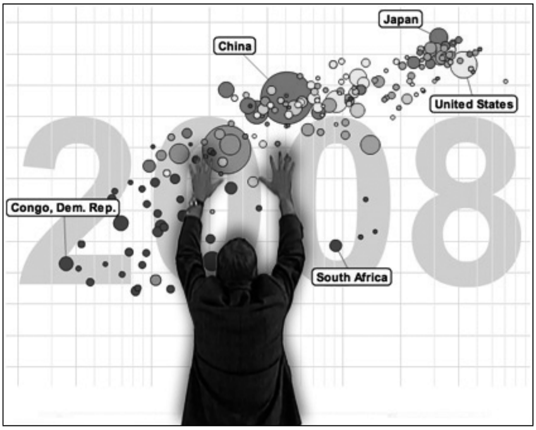
Figur 16.1: Figuren är återskapad av ett diagram som finns på Internet `https://www.uh.edu/engines/epi1712.htm`. Diagrammet åskådliggör dödsorsakerna bland soldaterna i Krimkriget under perioden från april 1854 t.o.m. mars 1855. Under de tre första månaderna är antalet döda jämförelsevis mycket litet. Diagrammet visar att antalet döda på grund av sjukdomar är betydligt fler än antalet som dött av de skador de fått under strid.

Sylvester. Hon blev intresserad av statistik som hon studerade för Adolphe Quetelet – en belgisk vetenskapsman som lärt sig sannolikhetslära av bl.a. Laplace. Enligt vittnesmål från sina syskon ägnade sig Florence åt att föra statistik av olika slag på sina resor.

Statistiken blev ett viktigt redskap i hennes arbete som föreståndare för sjuksköterskorna i Scutari. Hon observerade att den vanligaste dödsorsaken bland soldaterna inte var de skador de fått i kriget utan sjukdomar. För att övertyga ledningen om detta förde hon statistik. Hon misstänkte emellertid att de som hon ville påverka inte skulle ägna hennes tabeller något större intresse och därför illustrerade hon resultaten med en typ av diagram, som har kommit att kallas *coxcombdiagram* och som på ett slående sätt visade resultaten av hennes undersökningar. Ett sådant finns avbildat i figur 16.1. Hennes arbete fick avsedd effekt och resurser skapades för att förbättra de sanitära förhållandena så att uppkomsten och spridning av sjukdomar kunde förhindras.

Florence Nightingale förstod tidigt vikten av att illustrera statistiska data så att resultaten skulle framgå med önskad tydlighet. Hon var en pionjär när det gällde att presentera statistiskt material. Drygt ett sekel efter hennes insatser hade datatekniken utvecklats och det innebar en revolution för statistiken inte minst när det gäller presentationsteknik. En av dem som förstod att utnyttja det nya mediet var en svensk läkare, som utvecklade metoder för att på ett pedagogiskt sätt illustrera komplexa demografiska sammanhang.

Hans Rosling (1948–2017) var en svensk läkare och statistiker. Han utvecklade under slutet av 1900-talet programvara för att göra statistik rörande globala frågor om sociala, ekonomiska och miljörelaterade problem lättillgängliga och enkla att förstå. Inom en stiftelse, *Gapminder*, utvecklade han tillsammans med sin son **Ola Rosling** och svärdotter **Anna Rosling Rönnmark** programmet *Trendanalyzer*. Roslings programvara har betytt mycket för att förstå de långsamma trenderna när det gäller mänsklighetens överlevnadsvillkor och resultaten är mer positiva än de flesta profetior. Han påpekar bl.a. att hastigheten i befolkningsökningen är i



Figur 16.2: Hans Rosling förklarar globala trender med hjälp av programvaran som utvecklats i stiftelsen *Gapminder*. (Bild: `3cXX5Bf`)

avtagande. Rosling har anlitats fler internationella organisationer som FN och WHO. Presentationerna är dynamiska så den intresserade läsaren uppmanas att t.ex. följa en förevisning på `https://www.youtube.com/watch?v=bG24Q0r1VZ0`.

16.3 Två ämnen möts

Statistiken har alltså sitt ursprung inom samhällsvetenskapen. Genom kvantitativa data som struktureras så att det blir möjligt att skapa överblick och se trender har statsmakten fått ett verktyg för att genomföra lämpliga åtgärder. Men statistiken används också inom många andra områden inte minst inom naturvetenskap och medicin. Genom upprepade observationer av ett fenomen kan man se nya samband och pröva redan etablerade. Observationerna är av olika skäl behäftade med fel och man kan inte vänta sig en exakt överensstämmelse med teorierna.

Statistik används alltså i många olika sammanhang och användningen reser frågor. Hur säker kan man vara på att de slutsatser man drar av det statistiska materialet är sanna? Statistiken saknade länge en teoretisk bas. En av pionjärerna i arbetet med att ge statistiken säkrare grundvalar var Ronald Fisher. Han var under drygt tio år anställd som statistiker vid Rothamsted Agricultural Experiment Station – det äldsta institutet för jordbruksforskning i Storbritannien. I inledningen till arbetet *Statistical Methods for Research Workers* från 1925 framhåller han att statistik skall betraktas som en del av tillämpad matematik. De gemensamma dragen i många tillämpningar har ofta förbisetts mycket beroende på att man försummat att utveckla den underliggande matematiska teorin.

Inom statistiken handlar det om att dra slutsatser utifrån information som är ofullständig. För att studera en stor population måste man göra ett hanterligt urval, för att studera ett kontinuerligt förlopp kan man endast göra ett begränsat antal observationer och för att få en överblick över stora informationsmängder vill man förse dem med karakteristiska mått. Ur de data man på detta sätt skaffat sig vill man dra mer generella slutsatser. Det är då väsentligt att på något sätt mäta sannolikheten för att slutsatserna skall vara sanna. Sannolikhetsteorin blir den naturliga matematiska grunden för statistiken.

Sannolikhetsläran har, som den behandlats av Fermat, Pascal, Bernoulli, de Moivre och

Laplace, huvudsakligen ägnats åt problem inom hasardspel även om det förekommer undantag. Både Bernoulli och Laplace diskuterar sannolikhetslärans tillämpbarhet utanför hasardspel där De stora talens lag spelar en nyckelroll. Antalet utfall har emellertid i de allra flesta varit ändligt även om framför allt de Moivre arbetar med oändliga utfallsrum är de alltid diskreta och innehåller aldrig ett helt intervall. I verkligheten ställs ofta andra krav. Om vi gör upprepade mätningar av t.ex. längden hos skolelever i ett land så är visserligen antalet elever ändligt men det är svårt från början ange vissa möjliga längder. Vi vill gärna arbeta med att utfallen ligger inom ett helt intervall. Sannolikhetsläran måste omformuleras så att den kan användas i mer generella sammanhang. Detta gjorde Kolmogorov i sitt grundläggande arbete från 1933 som inspirerats av integrations- och måtteori och som använder begrepp som diskreta och kontinuerliga stokastiska variabler samt frekvens- och fördelningsfunkioner

Det blev den svenske statistikern Harald Cramér som genom ett klassiskt verk *Mathematical Methods of Statistics* (1946) formulerade en matematisk teori för statistik som bygger på modern sannolikhetsteori. Här finner man de flesta av de begrepp som användare av statistik möter som t.ex. korrelation, regression, signifikanstester och konfidensintervall.

Kapitel 17

Diskret matematik

Datateknik och datavetenskap har under slutet av 1900-talet blivit universitetsämnen i kraft av den starka utvecklingen av informationsteknologin. För att datorn skall kunna bearbeta problem måste det finnas algoritmer som skall programmeras och för att förenkla programmeringsarbetet har det skapats och skapas olika programspråk. Algoritmernas komplexitet blir föremål för studier. Samtidigt som man gärna vill att de skall vara enkla och överblickbara måste de kunna lösa problemen på rimlig tid. Enkla program kan medföra att datorns arbete tar alltför lång ibland orimligt lång tid.

Den moderna informationstekniken är digital. Det innebär att de matematiska processerna måste vara diskreta. Kontinuerliga förlopp måste diskretiseras om de skall bearbetas av datorer. Många av de algoritmer som behövs skapades redan på 1600- och 1700-talet är från början diskreta och arbetar stegvis. Viktiga exempel är Newton-Raphsons metod för att lösa ekvationer och Eulers stegmetod för att bestämma lösningar till differentialekvationer. De behöver emellertid ofta modifieras för att snabba upp processerna och vidare kräver nya problem nya algoritmer. Ett nytt ämne, Numerisk analys, bildades för att studera dessa frågor.

De nya ämnesområden som uppstod kring informationstekniken krävde en annan typ av matematik än den som dittills varit dominerande inom grundläggande akademisk utbildning och gymnasieutbildning. Den hade dominerats av analys och studiet av kontinuerliga processer. Grundläggande kunskaper i analys är naturligtvis fortfarande viktiga. De utgör en matematisk allmänbildning som även professionella datavetare måste kunna förstå och tillämpa. Men andra områden av matematiken blir minst lika betydelsefulla för den som vill specialisera sig inom modern informationsteknik. Datatekniken bygger ytterst på formell logik och den spelar också en stor roll vid utvecklandet av programspråk. Mängdläran har försett arbetet med att ge struktur åt databaser ett effektivt språk. För att uppskatta algoritmers effektivitet och komplexitet krävs kunskaper inom kombinatorik. Många algoritmer bygger på rekursiva processer; ett värde a_n bestäms med hjälp av de tidigare värdena a_1, a_2, …, a_{n-1}. Rekursion och dess motpol induktion är matematiska begrepp som är oundgängliga för programvarukonstruktörer. De äldsta datorernas styrka testades ofta genom deras förmåga att lösa talteoretiska problem. Studiet av delbarhetsegenskaper hos de hela talen och inte minst av primtalen har också blivit viktigt för att utveckla datasäkerheten. För att garantera en säker överföring av data mellan olika media spelar kodteori med bl.a. självrättande koder en stor roll. Abstrakt algebra i form av teorin för ändliga kroppar visar sig i det sammanhanget var ett effektivt hjälpmedel.

Som ett svar på kraven på en typ av matematik för de som vill specialisera sig mot informations- och kommunikationsteknologi utvecklades kurser med rubriken Diskret matematik. De kom att innehålla talteori, kombinatorik, rekursion och induktion, formell logik och mängdlära samt delar av abstrakt algebra. Diskret matematik har blivit ett ordinarie inslag i kursutbudet på akademisk nivå och ingår nu också i gymnasieutbildningen.

17.1 Talteori

Talteori är en del av aritmetiken. Vi har i kapitlet om aritmetik betonat det rent räknetekniska medan talteori handlar om egenskaper hos heltalen där begrepp som delbarhet och primtal spelar en stor roll liksom olika former av ekvationer. Talteorin är tillsammans geometrin de båda äldsta delarna av den mer teoretiskt inriktade matematiken och vi har därför valt att låta den inleda kapitlet om diskret matematik.

Man kan redan i de babyloniska kilskriftstavlorna ana ett mer teoretiskt intresse för heltalen. Kvadrater spelar en stor roll för babylonierna när det gäller multiplikation. En av de mest berömda lertavlorna, *Plimpton 322*, innehåller en tabell på pythagoreiska tal d.v.s. heltal a, b och c som uppfyller $a^2 + b^2 = c^2$. Även om babylonierna förmodligen hade goda kunskaper om de hela talen så är det den talteori, som utvecklades under antiken, den tidigaste som vi har en djupare kännedom om.

17.1.1 Antiken

För en av antikens största matematiker Pythagoras var universums byggstenar tal och dessa tal var för honom och hans anhängare heltal. Pythagoras var en talmystiker och han såg mönster hos och samband mellan tal. Euklides ägnar fyra av de tretton böckerna *Elementa* åt talteori. Ett av de klassiska problemen inom talteorin, Fermats gåta, som löstes 1995, har sina rötter i Fermats studier av Diofantos arbeten. Vi illustrerar antikens intresse för talteori genom att studera några exempel från Pythagoras talmystik från 500-talet före Kristus, Euklides *Elementa* från 300-taler före Kristus och Diofantos *Arithmetica* från 200-talet efter Kristus.

Pythagoras talmystik Som vi tidigare sagt var universum enligt Pythagoras och hans anhängare ytterst uppbyggt av heltal. Han klassificerade dem på olika sätt och gav talen olika egenskaper. Jämna tal var kvinnliga och udda manliga. Han studerade *triangeltal*, *kvadrattal* och s.k. *gnomoner*. De visas i figur 17.1. Hans namn är framför allt förknippat med Pythagoras sats som säger att i en rätvinklig triangel med kateterna a och b och med hypotenusan c gäller att $a^2 + b^2 = c^2$. Heltal som uppfyller denna ekvation kallas *pythagoreiska* och har studerats under sekler.

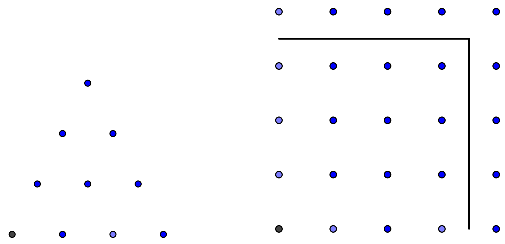
Talteori i Euklides *Elementa* Det är böckerna 7, 8, 9 och 10 som behandlar talteoretiska frågor. Även om innehållet är talteoretiskt så är språket geometriskt. Heltalen representeras i resonemangen av sträckor. Vi ger först några av de definitioner som inleder bok 7.

Definition 1. En enhet är det på grund av att alla saker kan kalla den ett.

Definition 2. Ett tal är en mängd av enheter.

Definition 3. Ett mindre tal är en del av ett större tal när det mäter det större.

Definition 5. Ett större tal är en multipel av ett mindre när det kan mätas med det mindre.



Figur 17.1: I den vänstra figuren visas triangeltalet $10 = 4 + 3 + 2 + 1$. Nästa triangeltal får vi genom att lägga till en rad med fem prickar och det är alltså 15. Ett godtyckligt triangeltal är ett tal som kan skrivas $1 + 2 + 3 + \ldots + n$. I högra figuren visas de två kvadrattalen $4^2 = 16$ och $5^2 = 25$. Det senare har vi konstruerat genom att till det första lägga en gnomon med $2 \cdot 4 + 1 = 9$ prickar. De olika kvadrattalen kan konstrueras från talet 1 representerat av en prick genom att successivt lägga till gnomoner med 3, 5, 7, 9, 11, ... prickar.

Definition 9. Ett primtal är ett tal som bara kan mätas av enheten.

Definition 12. Tal är relativt prima om de bara har enheten som som gemensam mätare.

Definition 22. Ett perfekt tal är ett tal som är summan av sina delar.

Definitionerna är mycket allmänt hållna och knyts t.ex. inte till några geometriska objekt. Det är i bevisen som man använder sig av ett geometriskt språk. Definitionen av enhet känns nästan som en cirkeldefinition – man definierar något med hjälp av det som skall definieras.

Inom talteorin och dess tillämpningar är det ett ofta förekommande problem att bestämma största gemensamma delaren till två heltal. Metoden som används kallas *Euklides algoritm* och i *Elementa* bevisas den redan i de båda första propositionerna i bok 7. Det visar hur grundläggande den är för fortsättningen. Den första propositionen behandlar Euklides algoritm då de båda talen är relativt prima och den andra då de inte är det. Denna uppdelning kan synas märkligt för dagens läsare men har förmodligen sin grund i att Euklides inte betraktade enheten som ett tal. Vi tittar lite närmare på beviset av proposition 2 och ger en översättning av den version som finns på nätet `https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/elements/`. Vi har förenklat texten i ett avseende. Euklides skriver t.ex. att ett tal CF mäter talet AE och menar att ett helt antal CF är lika med AE. Talet CF kan alltså användas som en ny enhet om vi vill mätas just AE. Med vår terminologi innebär det att CF delar AE och vi använder den i beviset. Vissa förklarande tillägg har gjorts och de har satts inom parentes. I figuren har två lika stora sträckor markerats för att resonemanget skall vara lättare att följa.

Proposition 2. Att finna största gemensamma delaren till två tal som inte är relativt prima.

Låt AB och CD vara två givna tal som inte är relativt prima. Då söks den största gemensamma delaren till AB och CD.

Om nu CD delar AB så är CD den största gemensamma delaren eftersom CD delar sig själv. Det måste också vara det största eftersom inget tal större än CD delar CD.

Men om CD inte delar AB så, när den minsta av talen AB och CD kontinuerligt subtraheras från den andra, kommer det att finnas ett tal över (Euklides tänker sig uppenbarligen att denna procedur upprepas) och detta tal måste dela det tidigare (som blev över).

En enhet kan inte vara rest eftersom då skulle AB och CD vara relativt prima.

Därför är något tal kvar som delar det föregående.

Figur 17.2: Figur till Euklides algoritm.

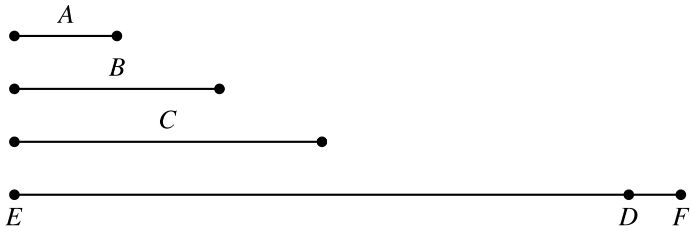
> Låt nu *CD*, som delar *BE*, lämna resten *EA* som är mindre än *CD* själv, låt *EA*, som delar *DF* lämna resten *FC* som är mindre än *EA* själv, och låt *CF* dela *AE*.
>
> Eftersom *CF* delar *AE* och *AE* delar *DF* så delar *CF* också *DF*. Men *CF* delar sig själv alltså delar *CF* hela *CD*.
>
> Men *CD* delar *BE* och därför delar också *CF* talet *BE*. Men *CF* delar *EA* och därför delar *CF* hela *AB*.
>
> Men *CF* delar också *CD* och delar därför både *AB* och *CD*. Därför är *CF* en gemensam delare av både *AB* och *CD*.
>
> Jag påstår nu att den också är den största.
>
> Om *CF* inte är den största gemensamma delaren till *AB* och *CD* så finns ett tal *G* som är större än *CF* som också är delare till både *AB* och *CD*.
>
> Men eftersom *G* delar *CD* och *CD* delar *BE* så delar *G* också *BE*. Men *G* delar också hela *AB* och därför också resten *AE*
>
> Men *AE* delar *DF* och därför delar *G* också *DF*. Men *G* delar hela *CD* och därför också resten *CF*. Alltså delar *G* något som enligt antagandet är mindre än sig själv vilket är orimligt.
>
> Därför delar inget tal större än *CF* båda *AB* och *CD*. Därför är *CF* den största möjliga delaren till *AB* och *CD*.

Framställningen är kanske inte så lätt att förstå för dagens läsare. Vi formulerar om resonemanget med våra beteckningar och med de värden som är aktuella i figur 17.2.

$$\begin{aligned} AB &= 2CD + AE \\ CD &= AE + CF \\ AE &= 6CF \end{aligned}$$

Vi kan nu upprepa Euklides resonemang med vår terminologi. Vi följer ekvationerna nerifrån och upp: CF delar AE och därmed också $AE + CF = CD$ som i sin tur medför att CF delar $AB = 2CD + AE$. Alltså är CF en gemensam delare till AB och CD. För att visa att CF är den största gemensamma delaren följer vi ekvationerna uppifrån och ner. Antag att G är en större gemensam delare. Eftersom G delar både AB och CD så delar det också $AE = AB - 2CD$ och vidare också $CF = CD - AE$. Men det är orimligt eftersom vi antog att G är större än CF. Alltså är CF den största gemensamma delaren.

Euklides beskriver algoritmen och visar att den fungerar för tal där det krävs ett litet antal steg, i detta fall tre, och låter läsaren dra slutsatsen att metoden fungerar också om det är flera steg. Det är samma sak när han visar att det finns oändligt många primtal. Han antar att A, B och C är primtal och visar att det måste finnas ännu ett primtal förutom dessa tre. Han låter DE vara det minsta tal som delas av alla tre talen A, B och C. Sedan lägger han enheten DF till DE.



Figur 17.3: Figur till beviset för att det finns oändligt många primtal.

Om EF är ett primtal så är det större än A, B och C och då är EF ytterligare ett primtal.

Om EF inte är ett primtal så har Euklides tidigare visat att EF delas av ett primtal G. Men G kan inte vara något av talen A, B och C ty i så fall skulle G vara delare till DE och eftersom det delar EF skulle det också dela enheten DF vilket är omöjligt. Alltså är G ett primtal som inte är lika med något av talen A, B och C. Påståendet är därmed visat.

Definition 22 handlar om perfekta tal. Ett heltal är perfekt om summan av dess positiva delare, som är mindre än det givna heltalet, är lika med talet själv. Exempel på perfekta tal är 6 eftersom $3 + 2 + 1 = 6$ och $28 = 14 + 7 + 4 + 2 + 1$. Under antiken kände man också till att 496 och 8 128 är perfekta. Den sista propositionen som ha nummer 36 i bok 9 visar att om $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{p-1} = 2^p - 1$ är ett primtal så är $2^p(2^p - 1)$ perfekt. Beviset är alltför komplicerat för att tas upp här.

Vi låter dessa tre resultat spegla den talteori som finns i *Elementa* och hänvisar till `https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/elements/`. Primtalen har en central ställning i *Elementa* och de kom att intressera flera av antikens matematiker. En av dem är Eratosthenes, som var verksam på 200-talet f.Kr. Han uppfann den metod som kallas *Eratosthenes såll* och som är en enkel algoritm för att bestämma primtal.

Diofantos verkade i Alexandria omkring 250 e.Kr. Hans stora verk är *Arithmetica* som omfattade tretton böcker varav bara sex finns bevarade. Den består av ett stort antal exempel med lösningar och skiljer sig från andra antika matematiska arbeten genom att det inte är geometriskt. Problemen är aritmetiska och leder till ekvationer som kan ha en eller flera lösningar. *Arithmetica* räknas som ett av de verk som banade väg för algebran och vi har tagit upp delar av det i kapitel 14. Många problem handlar om kvadrattal och i avsnittet om *Arithmetica* i kapitel 14 tog vi upp det problem som inspirerade Fermat till att formulera sin berömda förmodan. Vi ger ett annat exempel inom samma område som också visar att Diofantos studerade problem med flera lösningar.

> Att dela upp ett tal som är summan av två kvadrater i två andra kvadrater.
>
> Givet talet $13 = 2^2 + 3^2$.
>
> Eftersom rötterna till dessa kvadrater är 2, 3 så tag $(x + 2)^2$ som den första kvadraten och $(mx - 3)^2$ som den andra (där m är ett heltal) t.ex. $(2x - 3)^2$. Därför är
>
> $$(x^2 + 4x + 4) + (4x^2 + 9 - 12x) = 13$$
>
> eller
>
> $$5x^2 + 13 - 8x = 13.$$
>
> Därför är $x = \frac{8}{5}$ och de önskade kvadraterna är $\frac{324}{25}$, $\frac{1}{25}$.

Vi har här utnyttjat Heaths tolkning av *Arithmetica* där han inte bara översatt Diofantos arbete från grekiskan utan också skrivit om det med modern notation.

17.1.2 Något om utvecklingen efter antiken fram till 1600-talet

Efter romarrikets fall kom centrum för utvecklingen av matematiken att flyttas från Alexandria till Bagdad. Det blev de arabiska vetenskapsmännen som kom att förvalta och vidareutveckla det antika arvet med impulser utifrån t.ex. införandet av det hinduarabiska decimalsystemet. Utvecklingen av algebran med Al Khwarizmis *Hisab al-jabr w'al-muqabalah* som ett banbrytande arbete kom att stå i förgrunden. Några av de arabiska matematikerna intresserade sig för talteori och bidrog med avancerade resultat. Thabit ibn Quarra, som var verksam omkring år 850, gjorde undersökningar av s.k. *vänskapliga tal*. Två heltal kallas vänskapliga om summan av det ena talets delare förutom talet själv är lika med det andra talet och vice versa. Talen 220 och 284 är vänskapliga. Delarna till 220 är 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 och 110 vars summa är 284 och delarna till 284 är 1, 2, 4, 71 och 142 vars summa är 220. Thabit lyckades visa att om

$$p = 3 \cdot 2^{n-1} - 1, \quad q = 3 \cdot 2^n - 1 \quad \text{och} \quad r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1,$$

där n är ett positivt heltal, är primtal så är

$$2^n pq \quad \text{och} \quad 2^n r$$

vänskapliga tal. Det finns emellertid vänskapliga tal som inte kan skrivas på detta sätt. Flera arabiska matematiker skulle ägna sig åt att undersöka vänskapliga tal.

En av de främsta vetenskapsmännen under den islamska guldåldern för vetenskap och kultur var Alhazen som verkade kring år 1000. Han bidrog till utveckla talteorin och använde sig då av det vi kallar Wilsons sats som säger att om p är ett primtal så är $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-1)+1$ delbart med p.

Både Thabits och Alhazens resultat visar att de hade djupa kunskaper inom talteori och att de var tekniskt skickliga matematiker. René Descartes skulle i början av 1600-talet ta upp deras resultat och i viss mån vidareutveckla dem.

I Fibonaccis *Liber Abaci* från 1202 infördes i Europa det hinduarabiska decimalsystemet och de algoritmer som hänger samman med det. Ett kapitel ägnas åt talteori och det innehåller bl.a. en beskrivning av Fibonaccitalen. Under 1400- och 1500-talen domineras matematiken av räkneläror, som sprider kunskap om decimalsystemet till yrkesmän av olika slag, av bildkonstens utnyttjande av geometrin, av ekvationslösning och av sökandet efter en världsbild som stämmer med astronomiska observationer. Talteorin stod inte i centrum, men vissa tumregler av talteoretisk natur underlättade kontrollen av räkningarna. Ett exempel är att ett tal är delbart med tre precis då siffersumman är det.

17.1.3 Fermat ger viktiga bidrag till talteorin

Juristen Pierre de Fermat brukar kallas världens främste amatörmatematiker. Vi har tidigare beskrivit hans bidrag inom analys och hans korrespondens med Pascal om sannolikhetsteoretiska problem. Han var också en av de få matematiker under 1600-talet som hade stort intresse för talteori. I korrespondensen med Pascal om problem inom hasardspel försökte han förgäves få Pascal intresserad av talteoretiska frågeställningar men misslyckas. Kanske speglar detta den tidens inställning till talteori. Det fanns områden som ansågs viktigare.

Fermat formulerade en rad påståenden om heltalen. Några bevisade han, andra visades senare och en del visade sig vara felaktiga. Vi ger några exempel.

Tvåkvadratsteoremet – en av talteorins vackraste satser Fermat påstod och visade följande sats:

> Ett udda primtal p kan skrivas $p = 4k + 1$ där k är ett heltal då och endast då $p = x^2 + y^2$ där x och y är heltal.

Vi kontrollerar att påståendet är sant för de första primtalen på formen $4k + 1$:

$$5 = 2^2 + 1^2, \quad 13 = 2^2 + 3^2, \quad 17 = 1^2 + 4^2 \quad \text{och} \quad 29 = 2^2 + 5^2.$$

Det är relativt lätt att visa att om $p = x^2 + y^2$ så måste p vara av formen $4k + 1$ där k är ett heltal. För att kvadratsumman skall vara ett udda tal måste ett av talen x och y vara jämnt och det andra udda. Med den ledningen kan läsaren själv visa att $p = x^2 + y^2 = 4k + 1$ för något heltal k.

Omvändningen är svårare och Fermat gav för ovanlighetens skull ett bevis som tyvärr innehåller luckor. Euler kunde senare komplettera det.

Fermats lilla sats – ett värdefullt resultat Ett berömt resultat av Fermat är det som ofta kallas *Fermats lilla sats*. Den formulerades i ett brev 1640 och lyder som följer:

> Om p är ett primtal och a är ett godtyckligt heltal så är p delare till $a^{p-1} - 1$ förutsatt att p inte delar a.

Fermats lilla sats medför alltså att t.ex. 17 är en delare till $100^{16} - 1$ och att 23 är en delare till $2016^{22} - 1$. Talen 17 och 23 är ju primtal och 17 och 23 är inte delare till 100 respektive 2016. Satsen är för den oinvigde komplicerad till sitt innehåll och verkar dessutom sakna all praktisk betydelse. Det är uppenbart att påståendet är så komplext att det kräver ett bevis för att vi skall tro på det. Fermat bevisade aldrig själv satsen. Det gjorde Leibniz ett halvsekel senare. Från början hade satsen endast teoretiskt intresse. Det är ett vackert och överraskande resultat. På senare tid har talteorin fått en stor betydelse inom kryptering och Fermats lilla sats är ett viktigt hjälpmedel inom den verksamheten. Satsen med bevis är nu standard inom grundläggande kurser i talteori.

Fermatprimtal och en mindre lyckad hypotes Fermat upptäckte flera samband som han trodde gällde generellt. Ibland var han lyckosam, som i fallet med Fermats lilla sats. Ibland var han mindre lyckosam. I ett brev till Pascal som är daterat 29 augusti 1654, tar han upp en typ av primtal som senare skulle komma att kallas *Fermatprimtal*. Han skriver:

> ”Reflektera, om du finner det lämpligt, kring följande sats: De kvadrerade potenserna av 2 adderade med 1 är alltid ett primtal. Det vill säga
>
> Kvadraten på 2 adderat med 1 ger 5 som är ett primtal;
>
> Kvadraten på kvadraten ger 16 som adderat med 1 ger 17, ett primtal;
>
> Kvadraten på 16 ger 256 som adderat med 1 ger 257, ett primtal;
>
> Kvadraten på 256 ger 65 536, som adderat med 1 ger 65 537, ett primtal;
>
> och så i oändlighet.

> Detta är en egenskap vars sanning jag ber om svar från er. Beviset är mycket svårt och jag försäkrar er att jag ännu inte klarat det helt. Jag vill inte visa er det förrän jag har fullbordat det.”

Vad Fermat påstår är att talen

$$2^{2^n} + 1$$

är primtal för alla heltal $n \geq 1$. Det stämmer för $n = 1, 2, 3$ och 4 och det får Fermat att tro att det stämmer för alla positiva heltal n. Gissningsvis tyckte han att det inte kan vara en tillfällighet att det stämmer så väl för de första heltalen. Nästa heltal i serien är

$$2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297$$

och det är inte helt enkelt att avgöra om detta tal är primtal eller inte, åtminstone inte om man som Fermat saknade maskinella hjälpmedel. Euler, som inte heller hade tillgång till den typen av teknik, visade 1732 att talet inte är ett primtal. Vi har nämligen att

$$2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417.$$

Några fler primtal i serien än de fyra första har man inte hittat. Tyvärr är det så. I modern kryptering är det viktigt att finna stora primtal. Om Fermat hade haft rätt så skulle man haft ett effektivt hjälpmedel men hans förmodan är alltså felaktigt.

Att försöka hitta uttryck som ger primtal sysselsatte inte bara Fermat. Hans samtida Marin Mersenne studerade tal på formen $2^p - 1$ där p är ett primtal. För de första primtalen p är också $2^p - 1$ primtal och man trodde att samma sak gällde för alla p, men redan för $p = 11$ spricker hypotesen eftersom $2^{11} - 1 = 2\,047 = 23 \cdot 89$. Primtal av typen $2^p - 1$ kallas *Mersenneprimtal*.

Fermats stora sats – en korrekt hypotes med ett svårfångat och svårförståeligt bevis

I en rätvinklig triangel är enligt Pythagoras sats summan av kvadraterna på de båda kortare sidorna, kateterna, lika med kvadraten på den längsta sidan, hypotenusan. Det är en av de mest berömda satserna i matematiken och den har varit känd i flera tusen år. Vi kan formulera den på följande sätt: Om kateterna har längderna x och y och hypotenusan längden z uttryckt i någon längdenhet så uppfyller x, y och z ekvationen

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

Talen $x = 3$, $y = 4$ och $z = 5$ uppfyller ekvationen liksom $x = 5$, $y = 12$ och $z = 13$. Om heltalen x, y och z uppfyller ekvationen kallas de pythagoreiska. Det finns, som vi tidigare nämnt, tabeller på pythagoreiska tal på lertavlor från Babylonien. Den grekiske matematikern Diofantos, som levde på 200-talet e.Kr., studerade i problemsamlingen *Arithmetica* bl.a. pythagoreiska tal. Det var *Arithmetica* som Fermat läste när han gjorde den anteckning i marginalen som kom att ge generationer av matematiker huvudbry. Han skrev att om man istället studerade ekvationen

$$x^n + y^n = z^n$$

för $n \geq 3$ så saknas positiva heltalslösningar och han tillade: ”Jag har hittat ett underbart bevis för det men det får inte plats i marginalen.”.

Påståendet kallas *Fermats stora sats* eller *Fermats förmodan*. Något enkelt bevis har man inte funnit. Man lyckades visa att satsen är sann för ett stort antal n och trots tappra försök kunde man inte hitta något motexempel. Under mer än trehundra år försökte många framstående matematiker förgäves lösa problemet. Till slut lyckades den engelske matematikern Andrew Wiles år 1995 konstruera ett bevis, som emellertid är mycket komplicerat och som använder begrepp och teorier som var helt obekanta på Fermats tid. Så om Fermat verkligen hade lyckats bevisa sin förmodan så måste det ha varit på ett helt annat sätt. Det troliga är att hans bevis inte hållit för en närmare granskning.

17.1.4 Euler utvecklar vidare

Euler var som vi tidigare nämnt 1700-talets största matematiker. Hans produktion var enorm och han gav viktiga bidrag till snart sagt varje område inom matematiken däribland talteorin. Det är uppenbart att han känt till och låtit sig inspireras av Fermats insatser. Vi ger några exempel.

Tvåkvadratsteoremet Euler kompletterade Fermats bevis av tvåkvadratsteoremet, som säger att ett primtal är av formen $4k + 1$ där k är ett heltal då och endast då det är summan av två heltalskvadrater. Fermats idé var att anta att det finns ett primtal $4k + 1$ som inte är summan av två heltalskvadrater och visa att i så fall finns det ett mindre primtal av samma form som inte heller är lika med en sådan summa. Genom att fortsätta en sådan nedåtgående process kom han till en motsägelse. Problemet med Fermats bevis är att det är mycket otydligt hur han konstruerar talen utifrån utgångspunkten. Euler kunde råda bot på det.

Fermatprimtal Vi har tidigare nämnt att Euler visade att Fermat hade fel när han påstod att alla tal av typen $2^{2^n} + 1$ är primtal och gav en faktoruppdelning för $2^{2^5} + 1$ – en imponerande prestation under en tid då det saknades mekaniska räknehjälpmedel.

Generalisering av Fermats lilla sats och Eulers φ-funktion Ett av Fermats viktigaste bidrag till talteorin är det som kallas *Fermats lilla sats* och som säger att primtalet p delar $a^{p-1} - 1$ för varje heltal a som inte är delbart med p. Fermat såg sambandet men det bevisades senare, som vi nämnt, av Leibniz. Euler generaliserade det. Om n är ett godtyckligt positivt heltal så bildade han funktionen $\varphi(n)$ = antalet positiva heltal mindre än eller lika med n och som är relativt prima till n.

Vi har att $\varphi(6) = 2$ eftersom de enda talen mindre än eller lika med 6 som är relativt prima till 6 är 1 och 5. Vidare har vi t.ex. $\varphi(5) = 4$, $\varphi(8) = 4$, $\varphi(9) = 6$ och $\varphi(11) = 10$. Uppenbarligen gäller att $\varphi(p) = p - 1$ om p är ett primtal.

Euler formulerade följande generalisering av Fermats lilla sats:

> Varje positivt heltal n är delare till $a^{\varphi(n)} - 1$ för alla heltal a som är relativt prima till n.

Funktionen $\varphi(n)$ kallas *Eulers φ-funktion* och har en rad intressanta egenskaper bl.a. gäller att $\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$ om m och n är relativt prima. Euler visade också följande formel för $\varphi(n)$:

Om $n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k}$ där $p_1, p_2, \ldots, p_k$ är olika primtal så är

$$\varphi(n) = n\Big(1 - \frac{1}{p_1}\Big)\Big(1 - \frac{1}{p_1}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{1}{p_k}\Big).$$

Eulers φ-funktion har visat sig vara ett effektivt hjälpmedel inom talteorin.

Fermats stora sats Euler intresserar sig också för Fermats stora sats och visar den för $n = 3$, han visar alltså att ekvationen $x^3 + y^3 = z^3$ saknar positiva heltalslösningar. Han använder sig precis som Fermat av metoden med en nedåtgående process. Hans bevis visade sig också ha luckor som man senare kunde täppa till.

17.1.5 Några talteoretiska problem som aktualiserades under 1600- och 1700-talen

Fermat såg mönster och samband hos heltalen men gav i regel inga bevis. Andra matematiker som Leibniz och Euler kunde senare bevisa eller motbevisa dem. Det fanns emellertid gamla talteoretiska problem som matematiker som Fermat, Euler och Lagrange intresserade sig för. Vi ger några exempel.

Pells ekvation har en lång historia. Problemet formulerades redan av den indiske matematikern **Brahmagupta** på 600-talet och handlar om att finna positiva heltalslösningar till ekvationen

$$nx^2 + 1 = y^2$$

där n är ett positivt heltal. Det är uppenbart att om $n = 1$ så saknar ekvationen lösningar. Två på varandra följande positiva heltal kan inte båda vara kvadrater. Det innebär att om n själv är en kvadrat så saknas också lösningar. Om vi testar $n = 2$, 3, 5 och 6 så får vi följande lösningar $(x, y) = (2, 3)$, $(x, y) = (4, 7)$, $(x, y) = (4, 9)$ respektive $(x, y) = (2, 5)$. Naturligtvis kan de olika ekvationerna ha flera lösningar. Det visar sig att för vissa n är de minsta heltal som löser ekvationen mycket stora. De minsta lösningarna till ekvationen $97x^2 + 1 = y^2$ är t.ex. $x = 6\,377\,352$, $y = 62\,809\,633$.

Ekvationen har felaktigt fått sitt namn efter den engelske matematikern **John Pell** (1611–85). Euler som intresserade sig för problemet hade läst en artikel om ekvationen av **William Brouncker** (1620–84) och trodde att det egentligen var Pell som låg bakom den.

Problemet har anknytning till ett boskapsproblem som Arkimedes ställde. Diofantos behandlade också problem som liknade Pells ekvation. Det var emellertid i Indien som problemet studerades för första gången ingående. Efter Brahmaguptas inledande arbeten gav **Bhaskara II** (1114–85) och **Narayana** (c:a 1340–c:a 1400) viktiga bidrag. För att kunna hantera den komplexitet som det innebär att lösningarna kan vara mycket stora formulerade de generella samband som underlättade sökandet.

Matematikerna i Europa tog upp problemet under 1600-talet utan att känna till utvecklingen i Indien. Det var Fermat som först lanserade det och försökte bestämma lösningar till ekvationen $61x^2 + 1 = y^2$, samma ekvation som Bhaskara II hade studerat femhundra år tidigare. Flera andra matematiker studerade problemet bl.a. John Wallis och ovan nämnde William Brounckner. Wallis ägnar ett kapitel åt ekvationen i sin *Treatise on Algebra* som kom ut 1685. I ett supplement till Eulers *Algebra* behandlar Lagrange problemet stringent. Han visar att ekvationen har heltalslösningar för varje positivt heltal n som inte är en heltalskvadrat och härleder ett samband mellan den minsta lösningen till en ekvation $nx^2 + 1 = y^2$ och utvecklingen av $\sqrt{n}$ som kedjebråk.

Ekvationen har principiellt intresse inom beräkningstekniken. Det visar sig att den metod med kedjebråk som utvecklades av bl.a. Lagrange för vissa värden på n inte fungerar i praktiken i den meningen att lösningarna inte ens med snabba datorer kan bestämmas inom rimlig tid.

En artikel om Pells ekvation finns på nätet på *MacTutor History of Mathematics Archive*. Den refererar i sin tur till H. W. Lenstra *Solving the Pell Equation* från *Notices of the AMS Volume 48, Number 2*, som rekommenderas för den intresserade. I den visas bl.a. hur Arkimedes boskapsproblem kan kopplas till Pells ekvation. Lenstras artikel finns tillgänglig på Internet.

Wilsons sats säger att om p är ett primtal så är p en delare till $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-1) + 1$. Vi kontrollerar satsen för de första primtalen 2, 3, 5 och 7 och beräknar $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (p-1) + 1$ till 2, 3, 25 respektive 721 som är delbara med 2, 3, 5 respektive 7. Talen blir sedan snabbt mycket stora och någon form av allmänt resonemang krävs för att inse att satsen är sann för alla primtal p.

Den arabiske vetenskapsmannen Alhazen, som verkade på 900-talet, nämnde sambandet och använde det. I Europa nämner Leibniz satsen i en av sina skrifter men bevisar den inte. Den engelska matematikern Edward Waring (1736–98) publicerade satsen och namngav den efter sin elev John Wilson (1741–93) som hade återupptäckt den. Varken Wilson eller Waring gav något bevis utan det blev som i många andra fall Lagrange som gav ett strängt matematiskt bevis för Wilsons sats.

Wilsons sats är idag ett självklart moment i kurser i talteori. Det finns flera bevis och de använder i regel moduloräkning som Gauss införde i *Disquisitiones Arithmeticae* från 1801.

Warings problem handlar om huruvida det är möjligt att varje positivt heltal n kan skrivas som en summa av ett antal heltalskvadrater där antalet inte får överstiga ett fixt tal. Vi kontrollerar de första heltalen:

$$\begin{gathered} 1 = 1^2, \quad 2 = 1^2 + 1^2, \quad 3 = 1^2 + 1^2 + 1^2, \quad 4 = 2^2, \quad 5 = 1^2 + 2^2, \\ 6 = 1^2 + 1^2 + 2^2, \quad 7 = 1^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2, \quad 8 = 2^2 + 2^2, \quad 9 = 3^2. \end{gathered}$$

Uppenbarligen måste antalet heltalskvadrater vara minst fyra och frågan inställer sig: Kan varje positivt heltal skrivas som en summa av högst fyra heltalskvadrater? Den frågan ställde redan Diofantos på 200-talet. Edward Waring aktualiserade problemet 1770 och samma år visade Lagrange att en sådan framställning är möjligt i vad som ibland kallas *fyrakvadratsteoremet*.

Waring utvidgade problemställningen och frågade sig om man på liknande sätt kan skriva varje positivt heltal som en summa av kuber på positiva heltal och i boken *Meditationes Algebraicae* från 1776 påstod han utan bevis att varje positivt heltal är summan av högst nio kuber. Denna hypotes bevisades först 1909 av den tyske matematikern **Arthur Wieferich**.

En naturlig fråga som Waring också ställde är: Kan varje positivt heltal n skrivas som en summa av högst m stycken k-potenser av positiva heltal? Att detta var möjligt visade Hilbert 1909. Om vi betecknar det minsta m för vilket en sådan uppdelning för ett givet k är möjlig med $g(k)$ så ger inte Hilberts bevis någon uppskattning av $g(k)$. Vi vet emellertid att $g(2) = 4$ och $g(3) = 9$. År 1985 visade **R. Balasubramanian**, **F. Dress** och **J.-M. Deshouillers** att $g(4) = 19$ d.v.s. att varje positivt heltal kan skrivas som en summa av högst 19 heltal som är potenser av ordningen 4.

Matematiker som G. H. Hardy och J. E. Littlewood från England, **I. M. Vinogradov** (1891–1983) från Ryssland och **S. A. Ramanujan** (1887–1920) från Indien gav viktiga bidrag till studiet av Warings problem.

Goldbachs förmodan är en hypotes att varje jämnt tal, som är större än eller lika med fyra, kan skrivas som summan av två primtal. Vi kontrollerar att påståendet är sant för några slumpvis valda tal, t.ex. $36 = 31 + 5$, $108 = 11 + 97$ och $212 = 13 + 199$. Christian Goldbach, som inte var matematiker till professionen utan sedermera blev professor i historia vid ryska akademin, kunde inte bevisa sin hypotes utan skrev ett brev år 1742 till Euler och hoppades att Euler kunde det, men så var inte fallet. Waring formulerade hypotesen oberoende av Christian Goldbach (1690–1764) i sin bok från 1776.

Goldbachs hypotes är fortfarande obevisad och det finns de som tror att den inte går att bevisa utifrån de vanliga lagarna för hela tal. **Olivier Ramaré** visade 1995 att varje jämnt tal större än eller lika med fyra kan skrivas som en summa av högst sex primtal.

17.1.6 Gauss *Disquisitiones Arithmeticae*

Under 1600- och 1700-talet började matematiker alltmer intressera sig för talteoretiska problem. Men problemen var isolerade från varandra och inte delar av en helhet. Man får gå så långt tillbaka som till böckerna 7–10 i Euklides *Elementa* för att hitta en logisk uppbyggd teori om de hela talen. Fermats olika problem, Pells ekvation, Wilsons sats och Warings problem hade inte infogats in en teoretisk byggnad. Bevisen av påståendena stod ofta Lagrange för.

Det var Carl Friedrich Gauss, som med sitt stora verk *Disquisitiones Arithmeticae* (”Aritmetiska undersökningar”) från 1801, gav en sammanhängande teori om de hela talen där samband mellan olika satser blir tydliga. Boken består av två delar. Det är i den första delen som Gauss bygger upp talteorin från grunden och den har stått och står modell för de flesta framställningar av ämnet. I den andra delen behandlar Gauss problem som då låg vid forskningsfronten och han avslutar boken med konstruktion av regelbundna månghörningar och deras samband med Fermatprimtal. En tysk översättning av *Disquisitiones Arithmeticae* gjord av **H. Maser** finns tillgänglig på nätet. Citaten är översättningar av den tyska versionen.

I första kapitlet inför Gauss vad han kallar moduloräkning. Han skriver:

> ”Om talet a är delare till skillnaden mellan talen b och c så kallas b och c kongruenta efter a, i annat fall inkongruenta. Talet a kallar vi modul. Vart och ett av talen b och c kallas i första fallet rester i andra fallet icke-rester.”

Varje heltal b har en rest c modulo a för vilken $0 \leq c \leq a - 1$ och som Gauss kallar minsta rest.

Han inför beteckningen $b \equiv c \mod a$ om b är kongruent med c modulo a eller bara $b \equiv c$ om det är uppenbart vilken modulen är. Han skriver upp några elementära satser för moduloräkning t.ex.

> Om $A \equiv a$ och $B \equiv b$ så är $A + B \equiv a + b$, $A - B \equiv a - b$ och $AB \equiv ab$.

Gauss avslutar det första kapitlet med vad han kallar ”Några tillämpningar” och visar med hjälp av moduloräkning hur man kan kontrollera att ett tal i decimalform är delbart med 9 eller med 3.

> ”På satserna som givits i detta kapitel grundar sig mycket av det som lärts ut i aritmetik t.ex. regler för att undersöka om ett givet tal är delbart med 9, 11 eller något annat heltal. Alla heltal som är potenser av 10 är kongruenta med enheten efter modulen 9. Om ett givet tal har formen $a+10b+100c+\ldots$, så har det samma minsta rest modulo 9 som $a+b+c+\ldots$. Av detta är det uppenbart att när de enskilda siffrorna i decimalframställningen av talet utan hänsyn till ordningen adderas har denna summa och det givna talet samma minsta

> rest och om summan är delbar med 9 så är också det givna talet det och omvänt. Detsamma gäller om delaren är 3. . . .”

I andra kapitlet visar Gauss aritmetikens fundamentalsats som säger att varje heltal kan skrivas som en produkt av primtal på ett och endast ett sätt bortsett från ordningen. Han visar också att om a och modulen m är relativa prima så är ekvationen $ax \equiv b$ lösbar för varje tal b. Satsen är central för fortsättningen. I tredje kapitlet studerar Gauss rester av potenser och här bevisar han både Fermats lilla sats och Wilsons sats, och bevisen blir med moduloräkning relativt enkla och genomskinliga. De blir konsekvenser av mer allmänna samband. Vi skall skissera beviset av Fermats lilla sats d.v.s. att primtalet p är en delare till $a^{p-1} - 1$ om p inte delar heltalet a.

> Gauss noterar först att modulo p har följden $1, a, a^2, a^3, \ldots$, där a är relativt prima med p, högst $p - 1$ olika minsta rester. Det måste alltså finnas två minsta rester som är lika d.v.s. $a^m \equiv a^n$ där $m < n$. Då är $a^{n-m} \equiv 1$ där $0 < n - m < p$ enligt en huvudsats i kapitel 2. Det finns alltså ett $0 < t < p$ sådant att $a^t = 1$.
>
> I nästa steg visar Gauss att om p är ett primtal och t är det minsta heltalet $0 < t < p$ sådant att $a^t \equiv 1$ så är t antingen lika med $p - 1$ eller så är är t en delare till $p - 1$. Om $t = p - 1$ så är det inget att visa och vi utgår från att $t < p - 1$. De minsta resterna $1, a, a^2, \ldots, a^{t-1}$ modulo p är alla olika, för om två är lika så följer av satser i kapitel 2 att t inte är det minsta talet för vilket $a^t \equiv 1$. Han kallar komplexet av dessa rester för A. Han väljer en rest β utanför A och bildar komplexet B av $\beta, \beta a, \beta a^2, \ldots, \beta a^{t-1}$ och visar med hjälp av en huvudsats i kapitel 2 att alla dessa minsta rester är olika och att ingen av dem finns i A. Alltså är antalet minsta rester i B lika med t. Om det nu inte finns fler minsta rester utanför A och B så är $p - 1 = 2t$ och t delar $p - 1$. Om det finns fler minsta rester upprepar vi resonemanget och skapar ett tredje komplex C med t olika rester där ingen ingår i vare sig A eller B o.s.v. Till slut har vi bildat ett helt antal komplex med t minsta rester vardera som utgör alla rester $1, 2, \ldots, p - 1$ och det betyder att t är en delare till $p - 1$.
>
> Nu följer Fermats lilla sats tämligen enkelt. Eftersom $\frac{p-1}{t}$ är ett heltal och $a^t \equiv 1$ så så kan vi upphöja båda leden med $\frac{p-1}{t}$ och får $a^{p-1} \equiv 1$ vilket i sin tur innebär att p är en delare till $a^{p-1} - 1$.

Någon läsare ser kanske likheterna med beviset för Lagranges sats för grupper som säger att antalet element i en undergrupp till en ändlig grupp är en delare till antalet element i hela gruppen. Gruppbegreppet formulerades några decennier efter utgivningen av *Disquisitiones Arithmeticae*. Det skall också noteras att det Gauss kallar ”komplex” kallar vi idag för ”mängd”.

Genom att införa moduloräkning och visa några grundläggande egenskaper kan Gauss ersätta komplicerade resonemang med räkningar. Lagarna för moduloräkning påminner om räknelagarna för vanliga tal men det finns undantag. Så kan t.ex. $b \cdot c \equiv 0 \mod a$ trots att varken b eller c är ekvivalenta med 0 modulo a. (Välj t.ex. $a = 6$, $b = 2$ och $c = 3$.) Moduloräkning innebär en ökad abstraktion men sambandet mellan talteoretiska satser blir tydligare och området blir mer överblickbart.

Vi har gjort några urval av resultaten i de tre första kapitlen i *Disquisitiones Arithmeticae*. De fyra följande innehåller diskussioner kring kvadratiska rester och andragradsekvationer för rester modulo ett tal m. Det sista kapitlet ägnas, som vi förut nämnt, åt konstruktioner med passare linjal av regelbundna månghörningar och Gauss visar att sådana är möjliga om p är ett Fermatprimtal t.ex. 17.

Disquisitiones Arithmeticae för talteorin framåt i två avseenden. Den infogar kända satser i ett logiskt sammanhängande system och den utvidgar teorin med nya resultat. Framställningen är också mycket pedagogisk. Allmänna resonemang föregås ofta av konkreta exempel och de olika stegen i bevisen är tydligt redovisade. Verket har varit och är en förebild för läroböcker i talteori. En av mina studenter, som fått till uppgift att gå igenom delar av *Disquisitiones Arithmeticae*, sade vid redovisningen: ”Varför skriver man egentligen nya läroböcker om grundläggande talteori. Gauss framställning är ju oöverträffad.”.

17.1.7 Lejeune Dirichlet, analytisk talteori och algebraiska strukturer

En arvtagare till Gauss Lejeune Dirichlet var nästan trettio år yngre än Gauss. Redan på gymnasiet studerade han *Disquisitiones Arithmeticae* och han hade med den när han började sina universitetstudier. Verket var en ständig följeslagare och inspirationskälla för Dirichlet, som utvecklade arvet från Gauss. Han blev ett namn i matematiska kretsar när han 1825 bevisade Fermats stora sats för $n = 5$ d.v.s. att ekvationen $x^5 + y^5 = z^5$ saknar positiva heltalslösningar.

Analytisk talteori År 1837 bevisade Dirichlet en hypotes som formulerats av Gauss nämligen att om a och d är relativt prima så innehåller den aritmetiska talföljden a, $a + d$, $a + 2d$, $a + 3d$, ... oändligt många primtal. Han använde sig då av metoder från reell och komplex analys och anses därigenom vara grundare av det som kallas *analytisk talteori*. Några av de problem som kom att behandlas med metoder från analytisk talteori är:

Primtalssatsen som säger att om vi betecknar antalet primtal $\leq x$ med $\pi(x)$ så gäller

$$\frac{\pi(x)}{x/\ln x} \to 1 \text{ då } x \to \infty.$$

Påståendet formulerades av Adrien-Marie Legendre år 1797 eller 1798 och senare mer precist av Gauss även om han aldrig publicerade frågeställningen. Satsen visades av Jaques Hadamard och Charles Jean de la Vallée-Poussin oberoende av varandra och deras lösningar publicerades samma år 1898. Dessförinnan hade Dirchlet, **Pafnuty Chebyshev** och Bernhard Riemann givit viktiga bidrag som bidrog till problemets lösning.

Riemanns zeta-funktion är utvidgningen av Dirichlet-serien

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

till komplexa talplanet. I en artikel från 1859, *Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Grösse* (”Om antalet primtal mindre än en given storhet”), på bara nio sidor visar Riemann på zeta-funktionens betydelse för förståelsen av fördelningen av primtal. Att zeta-funktionen har med primtalsfördelning att göra kan man ana genom följande omskrivning som en gång Euler gjort

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod \frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}}$$

där produkten tas över alla primtal p.

Primtalstvillingar kallas två på varandra följande udda primtal t.ex. 3 och 5, 5 och 7, 11 och 13, 17 och 19 o.s.v. En gammal fråga är om antalet primtalstvillingar är ändligt eller oändligt. Frågan är obesvarad men med hjälp av analytisk talteori har den kinesiske matematikern **Chen Ingrun** (1933–96) visat att det finns oändligt många primtal p sådana att $p + 2$ antingen är ett primtal eller produkten av två primtal. Chen har också visat resultat som kan vara ett steg fram mot lösningen av Goldbachs förmodan.

Algebraiska strukturer Läsåret 1856–7 höll Dirichlet i Göttingen en föreläsningsserie om talteori. Den sammanställdes senare och gavs ut av Dedekind i flera upplagor den första 1863 med titeln *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Om man studerar innehållsförteckningen ser man att den är inspirerad av Gauss *Disquisitiones Arithmeticae*. Dirichlet studerar inte bara delbarhetsegenskaper hos de hela talen. Tidigare hade Gauss infört en typ av komplexa heltal $a+\mathrm{i}\,b$ där a och b är heltal som nu kallas *Gaussiska heltal*. De är speciellt intressanta vid studiet av kvadratiska rester och kvadratiska uttryck vilket faktoriseringen $a^2+b^2 = (a+\mathrm{i}\,b)(a-\mathrm{i}\,b)$ kan ge en antydan om. Dirichlet vill bygga upp en teori för heltal som omfattar både de vanliga och de gaussiska. Han leds då till att betrakta algebraiska strukturer som kroppar, grupper och ideal.

Ett system A av reella eller komplexa tal är en kropp, säger Dirichlet, om summor, differenser, produkter och kvoter av två tal i A alltid tillhör A förutsatt att kvoterna är definierade d.v.s. att nämnarna är skilda från 0. I en fotnot motiverar han valet av namn:

> ”Detta namn skall, liksom i naturvetenskapen, i geometrin och i det mänskliga samhällslivet, beteckna ett system som äger ett mått av fullständighet, fullkomlighet, avskildhet, varigenom det kan betraktas som en organisk helhet, som en naturlig enhet.”

Dirichlets undersökningar leder honom till Galois teorier och därmed till gruppbegreppet som definieras som system av permutationer. Ett system Π av permutationer av n element kallas en grupp om sammansättningen av två permutationer också ligger i Π. Det kan anmärkas att eftersom vi arbetar med permutationer kommer med detta enkla krav enhetspermutationen automatiskt att tillhöra Π liksom inversen till varje permutation i Π.

Banbrytande är introduktionen av ideal, som Dirchlet definierar på följande sätt:

> ”Varje system m i en kropp eller i ett område kallas ett ideal om det uppfyller följande villkor:
>
> 1. m består av idel hela tal och är slutet under addition och subtraktion.
> 2. Om λ är ett tal i m så är också varje tal som är delbart med λ innehållet i m.”

Idealbegreppet kom att få stor betydelse för studiet av delbarhet i mer allmänna strukturer.

17.1.8 Fermats stora sats bevisad

Fermats hypotes att ekvationen $x^n + y^n = z^n$ inte har några positiva heltalslösningar har sedan den formulerades i mitten av 1600-talet varit en utmaning för matematiker med intresse för talteori. Många delresultat har givits. Euler visade den t.ex. för $n = 3$ och Dirichlet för $n = 5$. Ett generellt bevis gavs 1995, som vi tidigare nämnt, av den engelske matematikern Andrew Wiles i en en artikel med titeln *Modular elliptic curves and Fermat's last theorem* i tidskriften *Annals of Mathematics*. Vi har tidigare beskrivit den något törnbeströdda vägen till ett korrekt bevis och de avancerade teorier som beviset grundar sig på. Vi skall inte upprepa det men vill med ett slumpvis valt citat ur artikeln visa hur komplext beviset är och djupet av de algebraiska kunskaper som krävs för att förstå det.

> ”... With these hypothesis there are unique lokal $R_D \to O$ homomorphisms of O−algebras which takes the universal deformation to (the class of) $\rho_{f,\lambda}$. Ler p_D = ker : $R_D \to O$. Let K be the field of fractions of O and $U_f = (K/O)^2$ with the Galois-action taken from $\rho_{f,\lambda}$. ...”

Beviset av den sats som Fermat formulerade för över 350 år sedan är komplicerat. Förmodligen kommer det att förenklas och gissningsvis pågår ett sådant arbete. Men så enkelt som det Fermat trodde sig ha funnit kommer det med säkerhet aldrig att bli. Men arbetet fortsätter och det känns naturligt att så här i början av 2000-talet avsluta ett historiskt avsnitt om talteori med att konstatera att detta klassiska problem är löst.

17.2 Kombinatorik

Det enklaste och mest naiva sättet att beskriva kombinatorik är som en gren av matematiken som söker svar på frågor av typen ”På hur många sätt kan ...?”. Det är också ofta underförstått att vi arbetar med ändliga mängder. Under senare år har emellertid området utvidgats och i en recension av en bok om grafteori i *Bulletin of the American Mathematical Society* (1979) skriver den ryske matematikern **Leon Mirsky**:

> ”Som jag ser det, är kombinatorik ett område av sammankopplade studier, som har någonting gemensamt, men som ändå är vitt skilda när det gäller mål, metoder och graden av samband mellan dem.”

Till kombinatorik räknas nu också studier av mönster, konfigurationer och uppställningar där man inte bara räknar antalet möjligheter utan också undersöker existens och egenskaper i allmänhet. En förenande faktor har varit att studiet gällt ändliga mängden men numera kan även oändliga mängder vara föremål för kombinatoriska studier.

Vi skall i vår framställning koncentrera oss på de problem som gäller att bestämma enumeration eller antalet uppräkningar i någon mening, problem inom grafteori och vissa frågor kring algoritmers komplexitet.

17.2.1 Enumeration

Tidig utveckling i och utanför Europa De första kombinatoriska problemen som finns dokumenterade är från *Rhindpapyrusen* som dateras till 1600 f.Kr. Det handlar om att beräkna antalet kombinationer av 1 och 2 för att uppnå en given summa. Många av de tidiga problemen är av samma typ och ofta har de språklig bakgrund. Den romerske författaren **Plutarchos** (c:a 46–120) nämner i en av sina skrifter att den grekiske filosofen **Xenocrates** (396–314 f.Kr.) försökt bestämma antalet stavelser i det grekiska språket – ett relativt svårt kombinatoriskt problem. Det antal han uppgav tyder emellertid på att han bara gjort en kvalificerad gissning.

I verket *Chandah Sutra* från 200-talet f.Kr. studerar den indiske matematikern **Pingala** hur versmått med ett fixt antal stavelser kan varieras. Han skiljer på tunga och lätta stavelser. Han bestämmer t.ex. för ett givet antal stavelser n totala antalet möjligheter och han bestämmer också antalet möjligheter med p tunga och $n - p$ lätta stavelser. Verket kommenterades av **Halayudah** på 1000-talet efter Kristus och hans kommentarer innehåller bl.a. en presentation av vad vi idag kallar Pascals triangel.

I *Bhagavati Sutra* behandlas ett grundläggande kombinatoriskt problem: Hur många möjliga kombinationer av en, två, tre, fyra, fem, . . . smaker kan bildas av de sex smakerna sött, skarpt, kärvt, surt, salt och bittert. Idéerna i *Bhagavati Sutra* utvecklades av senare indiska matematiker.

Det klassiska kinesiska verket *I Ching* (”Bok om förändringar”) som går tillbaka till 1000−750 f.Kr. beräknas antalet möjliga hexagram som består av sex vågräta heldragna eller streckade sträckor. Resultatet blir $2^6 = 64$ möjligheter.

Inspirerade av indiska arbeten tog matematiker i mellanöstern upp frågor om möjliga kombinationer av bokstäver som bildar stavelser och de behandlade också Pascals triangel.

Utvecklingen i Europa Det är sannolikhetsläran som ger impulser till mer djupgående studier av kombinatoriska problem. Pascal leds genom korrespondensen med Fermat till det han kallar en aritmetisk triangel och dess samband med det vi idag kallar kombinationer och med binomialutvecklingen. Hans arbete *Traité du Triangle arithmétique, avec quelques autres petits traités sur le même matière* (”Arbete om den aritmetiska triangeln med några andra mindre arbeten inom samma område”) skrevs förmodligen 1654 men publicerades först 1665 efter hans död. Den franska originalartikeln finns på Internet. En engelsk översättning finns i D. J. Struik *A Source Book in Mathematics, 1200–1800*.

Artikeln inleds med en bild av den aritmetiska triangeln och en beskrivning av hur den är konstruerad. I figur 17.4 har vi ritat upp den på samma sätt som Pascal, men för åskådlighetens skull har vi utelämnat bokstavsbeteckningar som Pascal använder för beskrivningar av olika egenskaper hos triangeln.

Den översta vågräta raden och den lodräta kolumnen längst till vänster består av ettor. Triangeln konstrueras sedan så att talet i varje ruta är summan av talet i rutan omedelbart ovanför och talet i rutan omedelbart till vänster. Efter att ha beskrivit konstruktionen formulerar Pascal ett antal egenskaper hos triangeln bl.a. att den är symmetrisk med avseende på den diagonala linjen i figuren. Därefter övergår han till att studera tillämpningar och då framför allt inom sannolikhetslära och hasardspel. Det är tydligt att den aritmetiska triangeln är inspirerad av de problem som han studerade i korrespondensen med Fermat.

Pascal visar också hur triangeln kan användas för att bestämma antalet kombinationer av k element ur n. Pascal gör inte något allmänt resonemang utan studerar ett exempel som är typiskt. Han visar att antalet kombinationer av 2 element ur 4 är lika med summan av antalet kombinationer av 1 element ur 3 och antalet kombinationer av 2 element ur 3. Han formulerar det samband vi skriver

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Genom detta samband och triangelns konstruktion kan man i den aritmetisk triangeln avläsa antalet kombinationer av k element ur n givna. Närmare förklaring görs i bildtexten till figur 17.4.

En sista tillämpning är binomialutvecklingen. Pascal upptäcker att om man följer hypotenusorna i de olika trianglarna så får man binomialutvecklingen. En av hypotenusorna innehåller t.ex. talen 1, 4, 6, 4, 1 som är koefficienterna till utvecklingen av $(a+1)^4 = a^4+4a^3+6a^2+4a+1$.

Pascals artikel utgavs postumt och det finns avsnitt i texten som tyder på att den skulle kompletteras. Det första mer genomarbetade arbetet om kombinatorik är Leibniz *De Arte Combinatoria* (”Om kombinatorik”) från 1666. I det finner man tabeller för antalet permutationer, den formel för kombinationer som vi gett ovan och naturligtvis Pascals triangel. Exemplen är ofta hämtade från musikteori och från grammatik.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
2	1	3	6	10	15	21	28	36		
3	1	4	10	20	35	56	84			
4	1	5	15	35	70	126				
5	1	6	21	56	126					
6	1	7	28	84						
7	1	8	36							
8	1	9								
9	1									

Figur 17.4: Pascals aritmetiska triangel i figuren är rätvinklig och dess båda kateter har längden 10. Den är emellertid uppbyggd av flera mindre rätvinkliga trianglar med kateterna 1, 2, 3, . . ., 9 och Pascal numrerar den med 0, 1, 2, . . ., 9. Pascal inför begreppet rang och rangen av elementen i den första kolonnen är 0, den i den andra är 1, o.s.v. För att bestämma antalet kombinationer av 2 element valda bland 4 följer man hypotenusan i triangeln med nummer 4 (som alltså har kateten 5) och väljer elementet med rang 2 och resultatet är 6. Notera att enligt konstruktionen av triangeln är 6 summan av talen närmast över och närmats till vänster d.v.s. 3 + 3. Men dessa båda tal är också lika med antalet kombinationer av 1 element valda bland 3 och antalet kombinationer av 2 element valda bland 3.

I sitt stora verk *Ars conjectandi* visade Jacob Bernoulli De stora talens lag, en av de viktigaste satserna inom sannolikhetsläran och han gjorde det genom avancerade uppskattningar av binomialkoefficenterna som han skriver

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1}.$$

Ars conjectandi skrevs omkring år 1700 och publicerades 1713 efter Jacob Bernoullis död. De grundläggande egenskaper hos permutationer och kombinationer samt binomialteoremet var alltså kända i början av 1700-talet.

En annan typ av kombinatoriska problem är att bestämma antalet partitioner av ett positivt heltal. En partition av ett givet positivt heltal är ett sätt att skriva det som en summa av positiva heltal. Talet 5 har följande partitioner:

$$5 = 5, \quad 5 = 4+1, \quad 5 = 3+2, \quad 5 = 3+1+1, \quad 5 = 2+2+1,$$
$$5 = 2+1+1+1 \quad \text{och} \quad 5 = 1+1+1+1+1.$$

Antalet partitioner av 5 är alltså 7. Läsaren kan själv kontrollera att att antalet partitioner av t.ex. 8 är lika med 19. Euler studerade partitioner och visade den något överraskande sats som säger att antalet partitioner av ett positivt heltal n med bara udda termer är lika med antalet partitioner av n med olika termer. Vi kontrollerar satsen för $n = 5$. Partitionerna med bara udda heltal är 5, 3 + 1 + 1 och 1 + 1 + 1 + 1 + 1 och de med olika termer är 5, 4 + 1 och 3 + 2. I båda fallen är antalet lika med 3.

Euler införde i samband med studiet av partitioner s.k. *genererande funktioner* i form av potensserier. Genererande funktioner ingår idag i de flesta kurser i diskret matematik. Det skulle föra alltför långt att beskriva dem närmare men påminner om att Laplace använde dem i *Théorie Analytique des Probalitités*.

Några kommentarer kring det kanske första kombinatoriska problemet som publicerats i Europa, nämligen det som ledde till Fibonaccitalen, får avsluta detta avsnitt. Att bestämma antalet kaninpar som förökar sig enligt vissa regler är ett typiskt kombinatoriskt problem och det är formulerat och löst i Finonaccis *Liber Abaci* från 1202. Antalet par beskrivs av en talföljd F_n som är rekursivt definierad genom

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

där $n \geq 0$ och $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Många kombinatoriska problem leder till rekursiva talföljder av typen

$$a_{n+1} = c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} + \ldots + c_k a_{n-k}$$

där k är ett givet naturligt tal och $c_0, c_1, c_2, \ldots, c_k$ är kända konstanter. Det är naturligtvis av intresse att bestämma ett explicit uttryck för a_n i n och de kända konstanterna. Det visar sig att också här en genererande funktion i form av en potensserie ett viktigt hjälpmedel. Det finns uppenbara analogier mellan rekursiva formler av ovanstående typ och linjära differentialekvationer med konstanta koefficienter. Fibonaccitalen kan bestämmas med dessa metoder och de är

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(r_1^n - r_2^n)$$

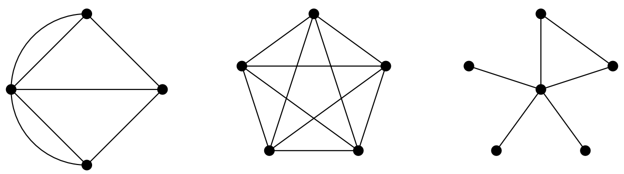
där

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{och} \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

är rötterna till andragradsekvationen $r^2 = r + 1$.

17.2.2 Grafteori

Eulers lösning av problemet med Königbergs broar brukar anges som grafteorins fördelse. Vi har beskrivit problemet i den kortfattade biografin över Euler: Floden Pregel delar Königsberg i två delar och i floden finns två öar. Ett brosystem på sammanlagt sju broar förenar de båda flodsidorna med varandra och med öarna. Frågan var om det gick att göra en vandring som började och slutade på samma ställe och där varje bro passerades en och endast en gång. Problemet som var en utmaning för invånarna i många år löste Euler och han publicerade lösningen 1736. Ett viktigt steg mot lösningen – kanske de viktigaste – är att han gör en överskådlig bild av situationen där ovidkommande detaljer avlägsnas. De båda flodstränderna och öarna blir noder i vad som idag kallas en *graf*. Om en bro förbinder två noder drar vi en linje mellan dem. Linjerna kallas *kanter*. Vi har i biografin visat både en mer naturtrogen bild av situationen och den stiliserade grafen. Vi nöjer här att rita grafen längst till vänster i figur 17.5. Eftersom vandringen skall börja och sluta i samma nod måste till varje nod höra ett jämnt antal kanter – man måste både komma till noden och därifrån. Så är inte fallet och alltså är det omöjligt att göra en rundvandring av det slag som efterfrågas.



Figur 17.5: Längst tillvänster visas grafen som illustrerar problemet med Königsbergs broar. Till varje nod hör ett udda antal kanter och grafen saknar alltså en Eulerväg. Några noder är förbundna med mer än en kant och sådana grafer kallas ibland *multigrafer*. Grafen i mitten har fem noder och varje nod är förbunden med varje annan nod. Sådana grafer kallas *fullständiga*. Grafen är uppenbart en Hamiltongraf men den är också en Eulergraf eftersom det till varje nod går fyra kanter. Grafen längst till höger är varken en Eulergraf eller en Hamiltongraf.

En engelsk översättning av Eulers artikel om problemet med Königsbergs broar finns i Struiks bok *A Source Book in Mathematics, 1200–1800.*

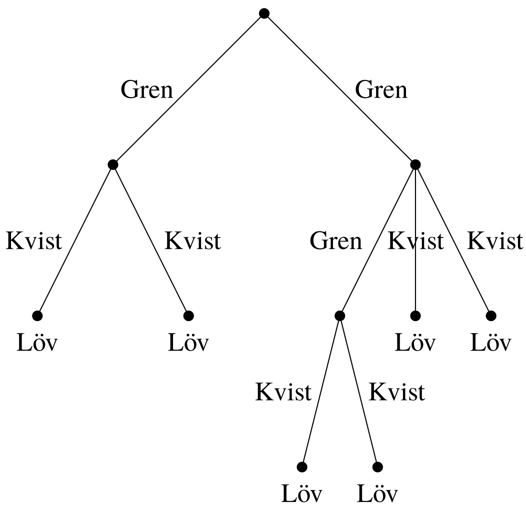
Grafer har blivit ett allt vanligare redskap för att studera samband och få överblick. Som vi nämnt i beskrivningen av problemet med Königsbergs broar består en graf av ett ändligt antal noder och vissa av noderna är förbundna med kanter. Det har utvecklats en brokig terminologi kring grafer. Det finns riktade grafer där varje kant är försedd med riktning och det finns oriktade grafer. Det finns färgade grafer där varje nod är försedd med en färg. Om man följer kanter i en graf från en nod till en annan via ett antal noder får man en väg. En cykel är en väg som slutar och börjar i samma punkt.

Inspirerad av Eulers artikel från 1736 kallas en väg mellan två olika noder en *Eulerväg* om varje kant genomlöps en och endast en gång och på motsvarande sätt definieras en *Eulercykel*. En graf som har en Eulerväg kallas en *Eulergraf*.

Om vi istället betraktar vägar där varje nod besöks en och endast en gång får vi en *Hamiltonväg* uppkallad efter den irländske matematikern William Rowan Hamilton. En graf som har en Hamiltonväg kallas en *Hamiltongraf*. Det finns inga kriterier för att avgöra om en graf är en Hamiltongraf i stil med de för en Eulergraf. Hamilton konstruerade ett spel där det gällde att finna Hamiltonvägar i en dodekaeder.

En speciell typ av grafer är s.k. *träd*. Definitionen av ett träd är helt enkelt att det är en graf som saknar cykler och där det alltid går att förena två olika noder med en väg. Träd används ofta för att illustrera olika typer av hierarkier. Vi har alla sett exempel på släktträd.

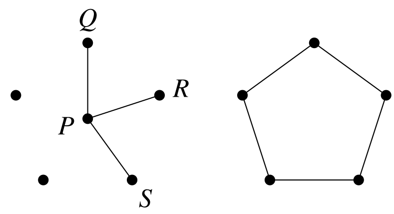
Träd används också för att illustrera sannolikhetsfördelningar och inom gruppteori. Det finns en suggestiv terminologi inom teorin för träd. Flera träd kallas en *skog* och ett träd har som i figur 17.6 *grenar*, *kvistar* och *löv*.



Figur 17.6: Ett träd.

Ett standardverk inom grafteorin är **Frank Hararys** bok *Graph Theory* från 1969 där läsaren kan finna såväl grundläggande definitioner och satser som öppna problem. Verket är tillgängligt på Internet.

Ett av de problem som med fördel kan formuleras inom grafteorin är fyrfärgsproblemet som vi ägnade hela avsnitt 10.6.2 åt. Den brittiske geografen Francis Guthrie arbetade 1852 med att färglägga politiska kartor så att två nationer som gränsade intill varandra alltid har olika färger. Han påstod att det alltid räcker med fyra färger. Förmodligen hade ett omfattande experimenterande lett honom till denna hypotes. Genom att göra de olika nationerna till noder i en graf och låta en kant gå mellan två noder om motsvarande nationer gränsar till varandra handlar problemet om färgade grafer. De grafer som speglar situationen måste vara plana eftersom två kanter aldrig skär varandra. Problemet kan formuleras på följande sätt: Hur många färger behöver man för att två noder i en plan graf med en gemensam kant aldrig skall ha samma färg? Hypotesen är alltså att det räcker med fyra. Guthrie skickade problemet till de Morgan som emellertid inte verkade särskilt intresserad men ändå kommunicerade det vidare inom det matematiska samhället. Vi har i avsnitt 10.6.2 beskrivit hur flera bevis, som visat sig vara felaktiga, publicerats och att det är först 1977 som de amerikanske matematikerna Kenneth Appel och Wolfgang Haken kunde visa hypotesen. Genom att reducera problemet till undersökning av stort antal olika fall kunde de med hjälp av en dator visa att Guthries förmodan var riktig. Beviset har senare förenklats men det finns ännu inget bevis som inte kräver datorstöd.



Figur 17.7: Figuren till vänster får illustrera beviset av att en enkel graf med sex noder antingen har en fullständig delgraf eller en delgraf som är fullständigt osammanhängande. Grafen till höger visar att samma påstående inte gäller för grafer med fem noder. Grafen har varken en fullständig delgraf eller en fullständigt osammanhängande delgraf.

Inom grafteorin har formulerats en rad ofta mycket svåra problem. Fyrfärgsproblemet är ett. Ett annat är det s.k. *partyproblemet* som vi beskriver nedan.

> På ett party finns sex gäster och antingen känner två av dem varandra eller så gör de inte det. Vi förutsätter alltså ömsesidighet. Påståendet är att de då finns en krets på tre personer där alla känner alla, eller så finns det en krets på tre personer där inte någon känner någon. För att få överblick över situationen kan vi åskådliggöra den med en graf där gästerna är noder och det finns en kant mellan två noder om motsvarande personer känner varandra (se figur 17.7).
>
> För att lösa problemet väljer vi ut en av noderna som vi betecknar med P. Av de övriga fem måste antingen P vara förbunden eller inte förbunden med tre av dem. Vi antar för enkelhets skull att P är förbunden med tre av dem Q, R och S. Det andra fallet behandlas på samma sätt. Om någon av Q, R och S t.ex. Q är förbunden med någon av de övriga två t.ex. R så bildar P, Q och R en krets där alla förbundna med varandra. Om ingen av Q, R och S är förbunden med någon av de två övriga så bildar Q, R och S en krets där ingen är förbunden med någon av de övriga. Vårt påstående är bevisat. Påståendet är däremot inte sant om vi istället betraktar en graf med fem noder vilket grafen till höger i figur 17.7 visar.
>
> Problemet generaliserades av den engelske filosofen, ekonomen och matematikern Frank Plumpton Ramsay (1903–30) men innan vi beskriver hans problem så inför vi litet terminologi. Vi säger att en graf är enkel om det mellan två noder kan finnas högst en kant. En enkel graf är fullständig om det finns en kant mellan varje par av noder. Vi säger att en graf är fullständigt osammanhängande om den helt saknar kanter och alltså bara består av enstaka noder. En delgraf till en graf G består av en delmängd E av noderna i G och de kanter i G som förenar noderna i E.
>
> Ramsay ställde nu följande fråga: Antag att G är en enkel graf och att m och n är två positiva heltal. Vilket är det minsta positiva heltal $R(m, n)$ för vilket en graf med $R(m, n)$ noder antingen har en fullständig delgraf med m noder eller en totalt osammanhängande delgraf med n noder. Uppenbarligen är $R(3, 3) = 6$. Ramsey visade att ett sådant tal existerar och flera uppskattningar har gjorts. I maj 1995 publicerade **Brendan D. McKay** och **Stanislaw P. Radziszowski** en artikel *Journal of Graph Theory* med titeln ”$R(4, 5) = 25$”. Uppskattningar har gjorts och man vet bl.a. att $796 \leq R(10, 10) \leq 23\,556$.

17.2.3 Något om algoritmers komplexitet

För beräkningar av olika slag använder vi oss av algoritmer eller ett räkneschema som steg för steg leder oss till det önskade resultatet och ofta beror valet av åtgärd efter ett antal steg på utfallet av förgående operation. De algoritmer, som så gott som alla någon gång kommer i kontakt med, är de för de fyra räknesätten. Vi behöver naturligtvis inte begränsa oss till dem. Beräkningar skall ses i vid mening. Resultaten behöver inte vara tal. De kan t.ex. var följder av tal, geometriska objekt eller algebraiska uttryck. Algoritmer utgör basen för en dators arbete och det är den aspekten som präglar de fortsatta resonemangen.

Komplexiteten hos en algoritm kan ses på olika sätt. Algoritmen själv kan vara komplicerad och svår för en utomstående att sätta sig in i, den kan under arbetet kräva stort utrymme i datorns minne eller den kan innebära att beräkningsarbetet tar lång tid. Vi koncentrerar oss på den senaste aspekten. Att kunna bedöma tidsåtgången för att en algoritm skall ge de sökta resultatet kan vara värdefullt, men med dagens snabba datorer ger många algoritmer svar så gott som direkt. Om samma typ av problem återkommer ett stort antal gånger eller om de datamängder som skall behandlas är stora kan det emellertid vara väsentligt att hitta algoritmer som är så snabba som möjligt. Väderleksförutsägelser, bildbehandling och artificiell intelligens är områden där man arbetar med stora datamängder och är beroende av effektiva algoritmer. Uppskattningen av beräkningstiden handlar om hur många steg datorn behöver göra. En sådan beräkning underlättas ofta om man kan representera arbetsprocessen med en graf och sedan blir det ett kombinatoriskt problem att bestämma hur många räkneoperationer som måste göras.

Ibland kan en nära till hands liggande algoritm även med snabba datorer ge upphov till orimligt långa bearbetningstider. Beräkningarna kan ta år, decennier, sekler eller mera. Vi skall ge ett berömt exempel som tidigare behandlats i avsnitt 10.2.

Handelsresandeproblemet. En handelsresande skall besöka ett antal kunder. Varje kund skall besökas precis en gång och tiderna det tar mellan varje par av kunder är kända liksom tiden från handelsresandes utgångspunkt till de olika kunderna. Hur skall resan planeras för att tidsåtgången skall bli minimal? Vi kan formulera problemet med terminologin för grafer. I en fullständig graf är varje kant försett med ett positivt tal som vi kan kalla kantens vikt. Bestäm en Hamiltonväg där summan av kanternas vikter är minimal. Det ligger nära till hands att gå igenom alla möjligheter och välja ut den minsta. En sådan algoritm är enkel att formulera. Om antalet kunder är tre skall sex olika rutter prövas och till det krävs inte en dator. Generellt är antalet rutter lika antalet permutationer av kunderna och alltså lika med $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Om antalet kunder är tio så är antalet rutter 3 628 800. Det bör en dator klara av på relativt kort tid. Men vad händer om antalet kunder är 50? Då är antalet rutter lika med 50! som är ett tal som är av storleksordningen 10^{64} d.v.s. en etta följa av 64 nollor. Hur lång tid tar det för en hypersnabb dator att beräkna längden av 10^{64} rutter. Om vi är generösa och antar att en dator kan beräkna tiden för en rutt på 10^{-9} sekunder så skulle det krävas 10^{55} sekunder eller mer är 31 miljoner år. Naturligtvis kan inte en sådan algoritm fungera i praktiken. Det krävs bättre och mer komplicerade algoritmer för att lösa problemet inom rimlig tid. Hittills har man emellertid inte funnit någon sådan som löser handelsresandeproblemet.

Om handelsresanden nu inte kan finna en algoritm för att bestämma den minsta rutten så kan man tänka sig att han använder en annan strategi. Han gör en bedömning av situationen och hittar en rutt som verkar om kanske inte den mest optimala men ändå relativt nära. Han gör en kvalificerad gissning och vill gärna testa om den verkligen är den optimala. Det visar sig att det finns algoritmer som på rimlig tid kan göra ett sådant test och ge besked om gissningen verkligen är den bästa eller inte.

Ingen har hittills funnit en algoritm som löser handelsresandeproblemet på rimlig tid men man kan på rimlig tid testa om en gissning verkligen är en lösning. Det finns fler problem som av samma natur och vi skall senare ge exempel på sådana. Vi laborerar här med uttrycket ”på rimlig tid” och det måste naturligtvis specificeras men det skulle föra alltför långt att här ge en fullständig definition. Man räknar antalet steg som algoritmen kräver i en s.k. Turingmaskin, som vi återkommer till senare. Om antalet steg växer med storleken på ingående data som ett polynom säger vi att problemet är av typ P och vi anser då att tidsåtgången är rimlig. Många av de vanliga problem vi löser med hjälp av algoritmer, som t.ex. sorteringsproblem, är av typ P. En av de vanligaste typerna av problem inom industrin är optimering av ett linjärt uttryck $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ under ett antal linjära bivillkor $a_{k,1}x_1 + a_{k,2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k$. Problemtypen kallas *linjär programmering* och löses i de allra flesta fall med en algoritm som brukar kallas *simplexmetoden* och som utvecklades av George Dantzig i slutet av 1940-talet. Metoden är effektiv och ger i de allra flesta fall lösningen inom mycket kort tid. Det finns emellertid fall då simplexmetoden inte fungerar och inte ger en lösning inom rimlig tid. År 1984 konstruerade den indiske matematikern **Narendra Karmarkar** en algoritm som löser alla linjära progammeringsproblem inom rimlig tid och som alltså visar att dessa är av typ P. Hans metod är emellertid inte så enkel som simplexmetoden.

Vi återgår till handelsresandeproblemet. Man har inte, som vi redan nämnt, hittills funnit någon algoritm som löser det på rimlig tid och alltså vet man inte om det är av typ P eller inte. Man vet emellertid att man kan testa om en gissning är en lösning på rimlig tid. Problem av den typen säges vara av typ *NP*. Bokstaven N står för non-determistisk. Man gissar sig fram. Sammanfattningsvis är handelsresandeproblemet av typ *NP* men man vet inte om det är av typ P.

Det finns flera problem av typ *NP* där man inte vet om det är av typ P eller ej. Man har inte hittat algoritmer som löser problemen på rimlig tid men man har heller inte visat att några sådana inte finns. Vi ger ett par exempel.

- Är en given graf en Hamiltongraf?
- Bestäm i en given graf en delgraf med maximalt antal noder som är fullständig.
- Kan man i en ändlig mängd av positiva heltal hitta en delmängd vars summa är exakt lika med ett på förhand givet tal?
- Saker med olika volym och värde skall packas i en kappsäck och alla får inte plats. Vilka saker skall man välja så att värdet av de nedpackade blir så stort som möjligt? Problemet kallas *kappsäcksproblemet*.

I själva verket har man inte hittat något problem av typ *NP* som bevisligen inte är av typ P. En naturlig fråga inställer sig: Är varje problem av typ *NP* också av typ P eller kortare är i själva verket $P = NP$? Denna frågeställning är central i teoretisk datalogi. De fyra problemen och handelsresandeproblemet är speciella när det gäller att söka svar på denna fråga. De och flera andra problem är s.k. *NP-kompletta* och det betyder att om man kan visa att någon av dem är av typ P så är $P = NP$. Den förste som visade att det existerar *NP*-kompletta problem är **Stephen Cook** som 1971 i artikeln *The Complexity of Theorem Proving Procedures* visade att ett problem inom formell logik är *NP*-komplett. Han formaliserade i samma artikel begreppen P och *NP*. Oberoende av honom visade den sovjet-amerikanske datavetaren **Leonid Levin** 1973 existensen av *NP*-kompletta problem.

17.3 Logik och mängdlära

Matematiken har alltid varit förknippad med logik. Även om det i en kreativ process förs resonemang där hugskott, associationer och mer eller mindre lösa idéer får fritt spelrum så skall i slutändan resultaten framställas genom logiska resonemang. Men även om logiken är ett betydelsefullt element i matematiken så var den knappast från början en del av själva ämnet. Aristoteles syllogismer från 200-talet f.Kr. är en hjälp för matematiker i konsten att göra slutledningar men de ingick knappast i matematiken. Det var den brittiske matematikern George Boole, som genom sin algebraisering av delar av logiken i verket *An investigation Into the Laws of Thought* från 1854, definitivt förde in logiken som en del av matematiken. Verket har haft stor betydelse och den algebra som Boole skapat är en förutsättning för konstruktionen av de logiska kretsar som en modern dator av uppbyggd av.

På liknande sätt som logiken har mängdbegreppet alltid funnits i matematiken även om man använt andra ord. Ett plan är t.ex. uppbyggt av punkter – det är en mängd av punkter. Gauss använde i talteoretiska bevis det han kallade komplex av tal och vi skulle kalla det mängder av tal. Dirichlet arbetade med ideal som är en samling tal. Den som införde mängdbegreppet och gjorde det till föremål för studier var George Cantor som under åren 1879 till 1884 publicerade en serie av sex artiklar i *Mathematische Annalen*. De bildar en introduktion till mängdläran. Mängdbegreppet och operationer på mängder är idag standard i matematiska framställningar. Det visar sig att räknelagar för elementära operationer på mängder liknar, eller om man så vill är identiska med lagar i Boolesk algebra.

17.3.1 Booles *An investigation Into the Laws of Thought*

> ”Utformningen av följande avhandling är gjord för att undersöka de fundamentala lagar om de tankeoperationer genom vilka resonemang utförs; att ge uttryck för dem i det symboliska språket hos en kalkyl, och på denna grund etablera logik som vetenskap och konstruera dess metoder; . . .”

Så inleder George Boole sitt berömda verk. Målsättningen är hög och det är väl ingen överdrift att han till en del lyckats. Han ger grunderna för den enklaste men mest grundläggande delen av logiken nämligen satslogiken och hans algebra inspirerade på 1930-talet den unge ingenjören Claude Shannon till att utveckla en teori för elektriska kretsar som är grundelement i dagens datorer.

Georg Boole var självlärd som matematiker men var respekterad av det matematiska samhället. Han var en engagerad lärare och utbildningsorganisatör och han dog bokstavligt talat på sin post. *An investigation Into the Laws of Thought* är han stora verk. Det omfattar över 300 sidor och består av 22 kapitel. Vi ger några exempel på Booles resonemang.

Boole inför beteckningar x, y, z, . . . för enkla språkliga uttryck och han skriver t.ex.:

> ”Alltså, om x ensamt står för ’vita saker’ y för ’får’, så låt xy stå för ’vita får’; och på samma sätt, om z står för ’behornade saker’ och x och y behåller de tidigare tolkningarna, så låt xyz representera ’behornade vita får’ d.v.s. samlingen av saker med namnet ’får’ där beskrivningarna ’vita’ och ’behornade’ gäller samtidigt.”

Boole inför operationen + för ”eller/och” t.ex. ”träd och mineraler” eller ”karga berg eller bördiga dalar” samt operationen – för ”utom” t.ex. ”alla stater utom de som är monarkier”. Han visar också med exempel att operationerna uppfyller lagar som

$$xy = yx, \quad x + y = y + x, \quad z(x + y) = zx + zy \quad \text{och} \quad z(x - y) = zx - zy$$

och kommenterar likheterna med de vanliga räknelagarna för tal. Den distributiva lagen exemplifierar han genom att låta x vara ”män”, y ”kvinnor” och z adjektivet ”europeisk”. Då är $z(x + y)$ ”europeiska män och kvinnor” och $zx + zy$ ”europeiska män och europeiska kvinnor” och uppenbarligen är dessa båda uttryck likvärdiga.

I algebran uppfyller symbolerna 0 och 1 lagarna $0y = 0$ och $1y = y$ för alla y. Boole menar att om dessa samband också skall gälla i logiken så måste tolkningen av 0 vara ”Ingenting” och tolkningen av 1 måste vara ”Universum”.

Även om de logiska symbolerna satisfierar många av de räknelagar som gäller inom den vanliga algebran så är det en regel som innebär stor skillnad. Uppenbarligen måste

$$xx = x \quad \text{eller} \quad x^2 = x$$

för alla logiska symboler x. Att säga ”bra, bra” är detsamma, säger Boole, som att säga ”bra”. Boole utnyttjar denna egenskap genomgående i behandling av logiska uttryck. Han konstaterar bl.a. att uttrycket $x^2 = x$ kan skrivas

$$x(1 - x) = 0.$$

För att tolka denna likhet låter han för enkelhets skull x vara ”män”. Då representerar $1 - x$ klassen ”icke-män” och likheten säger att det är omöjligt att vara ”man” och ”icke-man” på samma gång. Likheten uttrycker vad som ibland kallas *det uteslutna tredje*.

Boole utvecklar sin logiska algebra i många riktningar och de sista kapitlen handlar om sannolikhetsteori.

An investigation Into the Laws of Thought är ursprunget till det som idag kallas *satslogik*. Booles framställning lägger grunden men teorin förbättrades av flera matematiker under 1800-talet. Boole låter symbolerna $x, y, z, \ldots$ ibland betyda substantiv, ibland adjektiv och ibland påståenden. I dag betecknar de genomgående påståenden eller satser. Istället för multiplikation och addition använder vi symbolerna $\wedge$ respektive $\vee$ och uttrycket $1 - x$ skrivs ofta $\neg x$.

Booles samtida Augustus de Morgan formulerade i anslutning till publiceringen av *An investigation Into the Laws of Thought* två lagar som spelar en central roll i satslogiken och som nu kallas *de Morgans lagar*. Med dagens beteckningar skrivs de

$$\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y \quad \text{och} \quad \neg(x \wedge y) = \neg x \vee \neg y.$$

An investigation Into the Laws of Thought är, som vi nämnt inledningsvis, ett verk med en storslagen ansats. Idag kan det verka alltför ambitiöst. Det allra sista kapitlet har t.ex. rubriken ”Constitution of the Intellect”. Men det är ett av de viktigaste verken för utvecklingen av dagens informationsteknik.

17.3.2 Georg Cantors arbeten om mängdlära

Mellan 1879 och 1884 publicerade Georg Cantor sex artiklar i *Mathematische Annalen* alla med titeln *Über unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten*. Tillsammans utgör de en introduktion till mängdläran. Artiklarna hade föregåtts av två artiklar där han i den första visar att alla algebraiska tal, d.v.s. tal som är rötter till ekvationer med heltalskoefficienter, kan numreras med hjälp av de naturliga talen så att till varje naturligt tal hör precis ett algebraiskt tal och omvänt. Tal med denna egenskap kallar han uppräkneliga. De rationella talen är då som en oändlig delmängd av de algebraiska uppräkneliga. I den andra visar han att de reella talen inte är uppräkneliga. Vi har antytt bevisen i figur 9.6. Resultaten innebär att det finns flera typer av oändligheter. De naturliga talen, de rationella talen och de algebraiska talen är i Cantors mening lika många men de reella talen är betydligt fler än de algebraiska.

I de två artiklarna om algebraiska tal och reella tal samt de sex artiklarna i *Mathematische Annalen* studerar Cantor mängder av tal eller punkter. I en artikel *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre* i samma tidskrift 1895 tar han steget fullt ut och betraktar generella mängder. Han inleder artikeln på följande sätt:

> ”Med en ’mängd’ menar vi varje sammanfattning M av för vår syn eller för vår tanke bestämda väldefinierade objekt m (som kallas ’element i M’) till en helhet.
>
> Med beteckningar uttrycker vi det på följande sätt:
>
> $$M = \{m\}.”$$

Cantor definierar och inför beteckningar för föreningsmängden av flera mängder som saknar gemensamma element och han inför också begreppet delmängd. Ett centralt begrepp är ekvivalensen mellan två mängder och han säger att två mängder M och N är ekvivalenta om det finns en tillordning mellan elementen i de båda mängderna så att varje element i den ena svarar mot precis ett element i den andra och omvänt. Om M och N är ekvivalenta skriver han $M \sim N$ eller $N \sim M$.

Två ekvivalenta mängder säges ha samma mäktighet och alla sinsemellan ekvivalenta mängder tilldelas ett transfinit tal. Om M och N är mängder utan gemensamma element med kardinaltalen a respektive b så är $a + b$ kardinaltalet till föreningsmängden mellan M och N och $a \cdot b$ är kardinaltalet för produktmängden $M \cdot N$, som Cantor definierar som mängden av alla ordnade par (m, n) där m och n tillhör M respektive N. Han definierar också potensen a^b men den definitionen är något mer komplicerad. Vidare är $a \prec b$ om ingen delmängd av M är ekvivalent med N medan en delmängd N_1 av N är ekvivalent med M. Efter att ha gjort dessa definitioner visar Cantor att de flesta räknelagarna för tal också gäller för transfinitia tal.

De naturliga talen spelar en viktig roll. De är den minsta oändliga mängden och han betecknar dess kardinaltalet med $\aleph_0$ där $\aleph$ är den första bokstaven i det hebreiska alfabetet. De rationella talen och de algebraiska talen har också kardinaltalet $\aleph_0$ medan kardinaltalet $\aleph_1$ för de reella talen är större än $\aleph_0$ d.v.s. $\aleph_0 \prec \aleph_1$. Vidare gäller

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0, \quad \aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0 \quad \text{och} \quad \aleph_0^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

En fråga som Cantor ställde sig och som han inte lyckades besvara var om det fanns något transfinit tal mellan $\aleph_0$ och $\aleph_1$. Det skulle dröja till 1963 innan frågan besvarades. Den amerikanske matematikern **Paul Cohen** visade att påståendet är oberoende av axiomen för mängdläran och att den alltså inte kan besvaras utifrån dem.

17.3.3 Mängdläran blir en del av det matematiska språket

Cantors transfinita aritmetik var kontroversiell. Den franske matematikern Henri Poincaré kallade den för en sjukdom som snart skulle gå över. Den mest skoningslösa kritikern var den tyske matematikern Leopold Kronecker och Cantor tog mycket illa vid sig av hans omdömen. Andra tongivande matematiker som Hilbert var mycket positiva och han ville inte ”fördrivas från det paradis som Cantor skapat”. Om den transfinita matematiken har varit, och i viss mån är föremål för diskussion så har mängdbegreppet och de grundläggande operationerna på mängder blivit en del av det matematiska språket. Cantor definierade föreningsmängd och produktmängd. Han förutsatte att mängderna saknar gemensamma element. Med tiden utvecklades notationer för de vanligaste begreppen. Om x är element i mängden A skriver vi $x \in A$ och om A är en delmängd av mängden B skriver vi $A \subset B$. Begreppen föreningsmängd, snittmängd och produktmängd skriver vi på följande sätt:

$$A \cup B = \{x; x \in A \text{ eller/och } x \in B\}, \quad A \cap B = \{x; x \in A \text{ och } x \in B\}$$

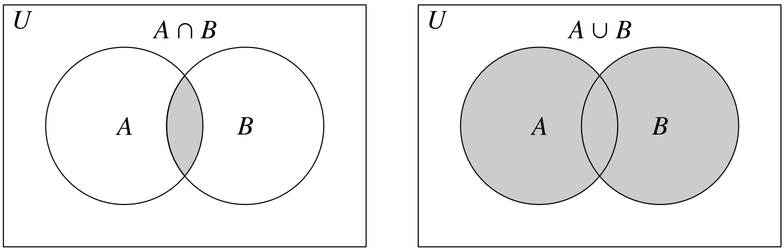
samt

$$A \times B = \{(x, y); x \in A \text{ och } x \in B\}.$$

Om de mängder man studerar förutsetts vara delmängder av en universell mängd U och om A är en sådan mängd så är komplementet till A mängden av alla element i U som inte tillhör A. Vi inför beteckningen

$$\complement_U A = \{x \in U; x \notin A\}.$$

Oftast utelämnar man U och skriver bara $\complement$. En speciell mängd är den tomma mängden som inte innehåller några element alls. Den skrivs $\emptyset$.



Figur 17.8: Till vänster illustreras en snittmängd och till höger en föreningsmängd med hjälp av Venndiagram.

Den engelske matematikern John Venn utvidgade Booles matematiska logik och han är mest känd av logiker och matematiker för att illustrera logiska samband och mängder med hjälp av diagram. I figuren visas s.k. Venndiagram för snitt och föreningsmängd.

Det finns en tydlig analogi mellan operationer inom satslogiken och mängdläran som kommer till uttryck i beteckningarna. Det framgår tydligt om vi formulerar mängdlärans motsvarighet till de Morgans sats i mängdläran

$$\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B \quad \text{och} \quad \complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B.$$

Genom mängdläran kan definitionen av funktionsbegreppet formuleras generellt. En funktion f från en mängd A till en mängd B är en tillordning som till varje $a \in A$ ordnar precis ett element i B som vi betecknar med $f(a)$. Vi skriver $f : A \to B$. Med den definitionen blir t.ex. vanliga reellvärda funktioner, komplexvärda funktioner, permutationer och linjära avbildningar alla funktioner.

17.3.4 Matematikens grundvalar

Den tyske filosofen, logikern och matematikern **Gottlob Frege** publicerade år 1884 verket *Grundlagen der Arithmetik* där han med utgångspunkt från bl.a. Cantors arbeten försöker bygga upp aritmetiken utifrån logik och mängdlära. Frege har utvecklat det vi idag kallar predikatlogik som är en utvidgning av satslogiken. Medan satslogiken är uppbyggd av de logiska konnektiven $\vee$, $\wedge$ och $\neg$ d.v.s. "eller/och", "och" och "icke" inför Frege symbolerna $\forall$ och *ext* som utläses "för alla" respektive "det finns". Nu använder man symbolen $\exists$ istället för *ext*. Om $p(x)$ är ett påstående som beror på x i en given mängd M så gäller t.ex.

$$\neg(\forall x p(x)) = \exists x \neg p(x) \quad \text{och} \quad \neg(\exists x p(x)) = \forall x \neg p(x).$$

Om t.ex. M är mängden av alla kulor i en urna och $p(x) =$ "x är röd" så säger den första satsen "inte alla kulor är röda" och det är detsamma som "det finns en kula som inte är röd".

Freges arbete är tekniskt och svårläst. Formler av ovanstående typ är legio. Efter ett antal förberedelser definierar han talet 0 genom

$$anz(0) := anz(ext\ \epsilon(\epsilon = \neg\epsilon))$$

som betyder att 0 är de påståenden som är lika sin egen negation d.v.s. inga alls. Det verkar vara onödigt omständligt men vitsen är att inte ta något för givet utan att visa att man genom manipulationer med de logiska symbolerna kan definiera de naturliga talen samt addition och multiplikation av dem. Talen finns inte från början. De kan bildas utifrån logiken. Det är då viktigt att hålla tungan rätt i mun och inte utnyttja sådant som tycks självklart.

Freges arbete blev till en början inte särskilt uppmärksammat. Giuseppe Peano och Betrand Russel upptäckte det och de utvecklade egna tankar om hur de naturliga talen skulle kunna definieras.

Peano publicerade 1889 artikeln *Arithmetices principia, nova methodo exposita* ("Aritmetikens principer presenterade med en ny metod") med det berömda axiomsystemet för de naturliga talen. Det visas i figur 17.9. Centralt i axiomsystemet är begreppet efterföljare och idén bakom axiomsystemet är att med utgångspunkt från talet 0 så har varje tal en efterföljare och att induktionsaxiomet gäller.

Tillsammans med Alfred North Whitehead skrev Russel *Principia Mathematica* som kom ut i tre band mellan 1910 och 1913. Det är ett verk i samma anda som Freges och domineras av logiska formler. I figur 10.1 visas beviset av att $1 + 1 = 2$. Det kan vara av intresse hur de definierade de naturliga talen. Talet 0 svarar mot den tomma mängden $\emptyset$. Talet 1 svarar mot mängden vars enda element är den tomma mängden alltså $\{\emptyset\}$. Alla tal med samma mäktighet som denna mängd svarar mot talet 1. Talen 2, 3, ... definieras sedan på följande sätt

$$\{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} \ldots.$$

Russel upptäckte själv brister i det system som skapades i *Principia Mathematica*. En alltför generös användning av mängdbegreppet leder till paradoxer. En populär framställning är frågan om vem som rakar barberaren i en by om han rakar alla i byn utom de som rakar sig själva? En formulering i samma anda som i *Principia Mathematica* är följande:

> Mängden M av alla mängder är själv en mängd. Den har alltså egenskapen att vara ett element i sig själv d.v.s. $M \in M$. Alla mängder har naturligtvis inte den egenskapen. Mängden av naturliga tal är t.ex. inte ett naturligt tal. Bilda nu mängden M' av alla mängder A sådana att $A \notin A$ och vi frågar oss om $M' \in M'$ eller $M' \notin M'$. Om $M' \in M'$ så har

Peanos axiom för de naturliga talen

1. 0 är ett naturligt tal.
2. $x = x$ för alla naturliga tal x.
3. Om $x = y$ så är $y = x$ för alla naturliga tal x och y.
4. Om $x = y$ och $y = z$ så är $x = z$ för alla naturliga tal x, y och z.
5. Om $a = b$ och b är ett naturligt tal så är a ett naturligt tal.
6. För varje naturligt tal n är $S(n)$ ett naturligt tal.
7. För alla naturliga tal m och n gäller att $m = n$ om och endast om $S(m) = S(n)$.
8. Påståendet $S(n) = 0$ är falskt för alla naturliga tal n.
9. Om K är en mängd sådan att
   (a) 0 tillhör K,
   (b) om det naturliga talet n tillhör K medför att $S(n)$ tillhör K,

   så innehåller K alla naturliga tal.

Figur 17.9: Peanos axiomsystem.

M' inte den egenskap som kännetecknar elementen i M' och följaktligen gäller $M' \notin M'$. Om å andra sidan $M' \notin M'$ så har M' den egenskap som karakteriserar elementen i M' och alltså gäller $M' \in M'$. Vi har uppenbarligen en paradoxal situation.

Vi har i avsnitt 10.1 redogjort för de problem som paradoxerna skapade både för de som försökte bygga upp matematiken från logiken och för den axiomatiska metoden, hur Hilbert försökte rädda situationen genom att konstruera ett axiomsystem för de naturliga talen som kunde visas både vara motsägelsefritt och fullständigt och hur Gödels arbeten visade att detta var omöjligt. Merparten av dagens matematiker använder sig ändå av det kraftfulla verktyg som den axiomatiska metoden erbjuder.

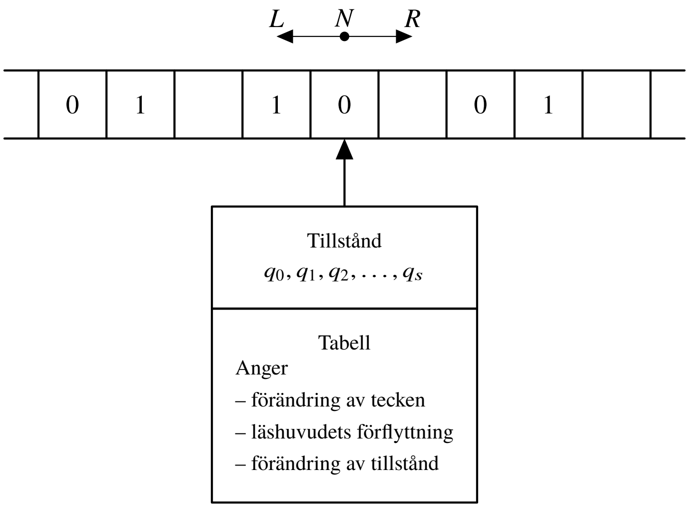
17.3.5 Kan en maskin tänka?

Alan Turing var en av de matematiker som intresserade sig för frågan om man utifrån aritmetikens axiom kan finna en algoritm som avgör om ett påstående om de naturliga talen är sant eller ej. Vi har i kapitel 10 både i den översiktliga beskrivningen av matematikens utveckling under 1900-talet och i den korta biografin över Turing berört hur han i några artiklar från 1930-talet konstruerade en abstrakt maskin, som nu kallas *Turingmaskin*, för att avgöra om ett tal är beräkningsbart. Turingmaskinen stod senare modell vid konstruktionen av den första datorn. Vi ger en mer utförlig men informell beskrivning av en Turingmaskin.

En Turingmaskin består av:

- **En remsa** som är indelad i celler som ligger intill varandra. Varje cell innehåller en symbol från ett givet alfabet som innehåller ett blanktecken. Remsan kan utvidgas obegränsat till höger och till vänster. Turingmaskinen har alltså så lång remsa som den behöver.
- **Ett läshuvud** som kan läsa och skriva tecken på remsan – en cell i taget.

- **En styrenhet** med ett ändligt antal tillstånd varav ett av dem, q_0, är ett starttillstånd.
- **En tabell av instruktioner** som talar om hur maskinen skall agera om tillståndet är givet liksom det tecken som läshuvudet läser enligt följande:
  - Radera tecknet, behåll tecknet eller ersätt det med ett annat
  - Flytta läshuvudet åt vänster (L) eller åt höger (R) eller inte alls (N).
  - Behåll tillståndet eller ersätt det med ett annat.



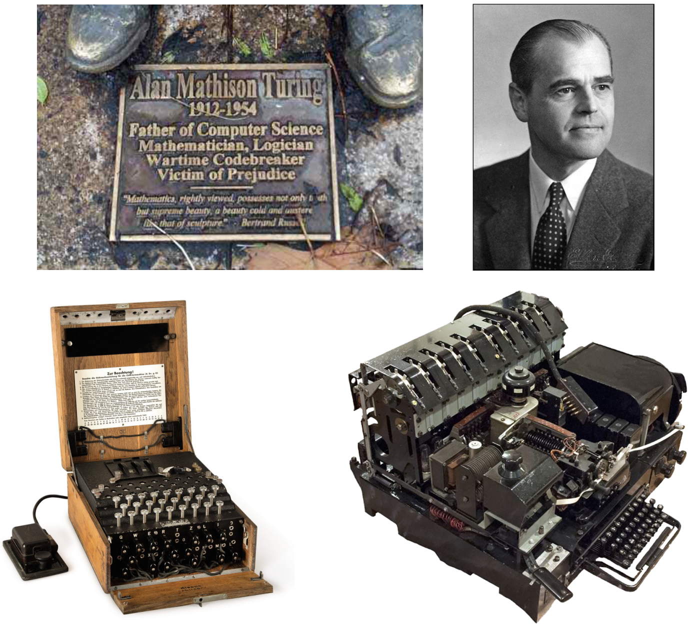
Figur 17.10: Skiss av en Turingmaskin.

Turingsmaskinen stod modell vid konstruktionen av den första datorn ENIAC, som togs i bruk 1946, och även om Turing själv inte var engagerad i själva konstruktionen så har han i hög grad påverkat den.

Turing fortsatte att arbeta med principiella problem kring datoriseringen. I en artikel från 1950 *Computing Machinery and intelligence* i tidskriften *Mind* ställde han frågan ”Kan en maskin tänka?” Hur avgör man om en maskin kan tänka? Turing menade att om en människa konverserar med en annan människa och med en maskin och inte kan avgöra vilken som är människa och vilken som är maskin så har maskinen klarat ett test för mänskligt tänkande. Många av dagens datorer skulle förmodligen klara Turingtestet och alltså i den meningen vara i stånd att tänka. Frågan en matematiker ställer sig är: Kan en maskin skapa ny matematik? Att den kan användas för tillämpningar av redan utvecklad matematik vet vi och den fungerar då som en mycket avancerad räknemaskin. Att den kan användas för att bevisa satser har vi också fått erfara – hittills har varje bevis av fyrfärgsproblemet krävt datorkraft. Men kan den skapa ny matematik? De flesta av oss vill inte tro det – men varför inte? Den skulle kunna se och skapa nya mönster och samband som är svåra att upptäcka även för de mest begåvade matematikerna. Den skulle kunna ordna resultaten i ett logiskt system och därmed skapa en matematisk teori. Frågan är öppen. Har matematiker och logiker som Boole, Frege, Russel, Turing m.fl. utvecklat metoder som leder till att maskiner inte bara kan tillämpa matematiken utan också utveckla den?

Men även om så skulle vara fallet så kommer den mänskliga fantasin att skapa ny begrepp och hitta nya tankebanor och utveckla matematiken i riktningar som inte en maskin kan upptäcka. Matematikens utvecklingsmöjligheter är gränslösa. Den svenske poeten Göran Sonnevi uttrycker det på följande sätt i diktsamlingen *Det omöjliga*:

att musiken! Att ingen gräns
finns för dess
utvidgning liksom den inte finns för
matematiken
och för känslolivets
variation, förgrening, kärlekens
och hatets
ännu okända former



Figur 17.11: Inom matematiken kan man ofta skönja två perspektiv – system och intuition. Man vill å ena sidan skapa generella metoder och logiskt uppbyggda teorier som ger struktur där man ser sammanhang. Men å andra sidan hjälper de inte alltid då man ska lösa problem eller då man ska hitta just de sammanhang som man sedan ska ge struktur. Där spelar intuitionen en viktig roll. En som särskilt betonade intuitionens roll i matematiken var Henri Poincaré. Matematikens janusansikte – system och intuition – kan illustreras av två olika sätt att angripa forcering av tyska krypton under andra världskriget. I Bletchley Park arbetade en grupp kryptoexperter med att forcera den tyska kryptomaskinen *Enigma*. Ledare för gruppen var Alan Turing. En maskin, ”Bombe”, skulle gå igenom dagens telegramskörd, pröva ett stort antal möjligheter och försöka hitta klartexten. Uppenbarligen ligger Turings idéer om en abstrakt maskin bakom konstruktionen. Efter två års arbete, 1939–41, lyckades teamet knäcka koden och det kom enligt vissa bedömare att förkorta andra världskriget med två år. I Sverige lyckades den svenske matematikern Arne Beurling sommaren 1940 knäcka den tyska kryptomaskinen *Geheimfernschreiber* (”G-skrivaren”). Han använde det material som snappats upp av svenska signalspanare, papper och penna samt sin egen intuition. På mindre än en månad hade han alltså knäckt ett kryptosystem av minst *Enigmas* svårighetsgrad. Turings metod var i det perspektivet mindre effektiv men den gav i förlängningen upphov till en av 1900-talets viktigaste uppfinningar – datorn. Beurling löste problemet på kort tid men tyvärr talade han aldrig om hur han burit sig åt. ”Trollkarlen avslöjar inte sina metoder” lär han ha sagt. Han tog hemligheten med sig i graven. Bilden överst till vänster visar en minnesplakett vid en staty av Alan Turing i Manchester, bilden överst till höger Arne Beurling, bilden nederst till vänster visar ett exemplar av *Enigma* och bilden nederst till höger visar ett exemplar av *Geheimfernschreiber*. (Bild: `3ORsPpj`, `3eNNLRB`, `2CRsida`, `3hr2oMb`)

Litteraturförteckning

[1] *Albrecht Dürer's Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit in Linien, Ebenen und ganzen Körper. 1575.* Süddeutsche Monatsheft, München, 1908. Bearb.: Alfred Pelzer.

[2] *Dictionary of Scientific Biography*. Charles Scribner's Sons, 1970–80.

[3] *Fibonacci's Liber Abaci. A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculations*. Springer, 2003. Övers.: L. E. Sigler.

[4] *MacTutor History of Mathematics Archive*. `3dP9YyO`.

[5] *Mathematics in Egyptian history*. `2AKekZW`.

[6] *Pappus of Alexandria – Book 4 of the Collection*. Springer, 2010. Övers. och kommentar: Heiki Sefrin-Weis. `2XLbFHZ`.

[7] *The Rhind Mathematical Papers. Volume I.* Mathematical Association of America. Oberlin, Ohio, USA, 1927. Övers. och kommentar: A. B. Chase. `2BR46XZ`.

[8] Abel, Niels Henrik: *Recherches sur les fonctions elliptiques*. Crelles journalfür die reine und angewandte Methematik, 2:101–81, 1827.

[9] Aczel, Amir D.: *The Artist and the Mathematician. The Story of Nicolas Bourbaki, the Genius Mathematician Who Never Existed.* Thunder's Mouth Press, New York, 2006.

[10] Agnesi, Maria Gaetana: *Analytical Institutions in Four Books*. Taylor and Wilks, London, 1748, 1801. Övers.: John Colson. `2YiTusd`.

[11] Ahlberg, Alf: *Filosofiens historia*. Bokförlaget Natur och Kultur, 1931.

[12] Alberti, Leonbattista: *Della pittura e della statua*. Della Società De' Classici Italiani, Milano, 1436, 1804. `2XLPCRx`.

[13] Al Khwarizmi: *The Algebra of Mohammed ben Musa*. London, 1831. Övers. och utg.: Frederic Rosen. `3dN7hhp`.

[14] Apollonius of Perga: *Conics Books I–IV*. A Green Lion Original, 2013. Övers.: Gatesby R. Taliaferro och Michael N. Fried.

[15] Archimedes: *Sandräknaren*. Internet. `2ZdfTsV`.

[16] Argand, Jean Robert: *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques*. Gauthier-Villars, Imprimeur-Libraire, Paris, 1806, 1874. `2YiZilB`.

[17] Argand, Jean Robert: *Réflexions sur la nouvelle théorie d'analyse*. Annales de Mathématiques, 5:97–209, 1814.

[18] Arnold, V. I.: *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1990.

[19] Aurelius, Aegidius: *Arithmetica Eller Een Kort och Eenfaldigh Räknebook*. Reprocentralen HSC, Uppsala, 1614. Årsböcker i svensk undervisningshistoria, Årgång LXXV, 1995, Volym 178. Inledn.: Bengt Johansson. `2XM6ms1`.

[20] Bacon, Roger: *The Opus Majus*. Williams and Norgate, London, 1267, 1900. Övers., inledn., utg.: John Henry Bridges. `30BP3vJ`.

[21] Bagni, Giorgio T.: *Rafael Bombelli's Algebra (1572) and a new mathematical "object": A Semiotic Analysis.* I *Proceedings of CERME 6*, sidor 440–8, 2009. `3cPu76J`.

[22] Banach, Stefan: *Théorie des opérations linéaires*. Subwencji Funduszu Kultury Narodowej, Warszawa, 1932. Finns tillgänglig på Internet.

[23] Bayes, Thomas: *An Essay towards solving a Problem in the Doctrine of Chances*. Philosophical Transactions of Royal Society of London, 1764. `2YhdQ5k`.

[24] Beckman, Bengt och Kjell Ove Widman: *Svenska kryptobedrifter. Hur Arne Beurling knäckte den tyska chiffertrafiken*. Bonnier Pocket, 1996, 2006.

[25] Berkeley, George: *The Analyst; or, a Discourse Adressed to an Infidel Mathematician*. J. Tonson, London, 1734, 2002. Utg.: David R. Wilkins. `2XMokun`.

[26] Bernoulli, Jakob: *On the Law of Large Numbers. Translation of Part Four of Ars Conjectandi.* NG Verlag, Berlin, 1713, 2005. Övers. och kommentar: Oscar Sheynin. `30kXSK6`.

[27] Blumenthal, Otto: *David Hilbert*. Naturwissenschaften, (10):67–72, 1922.

[28] Bolyai, János: *Appendix. The Theory of Space*. North-Holland Mathematics Studies 138, 1832, 1987. Red.: F. Kárteszi. `3fycji7`.

[29] Bombelli, Rafael: *L'algebra opera*. Per Giouanni Rofsadrecht, Bologna, 1579. `2zfJmrM`.

[30] Boole, George: *An Investigation of the Laws of Thought, on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*. 1853, 2017. Finns tillgänglig på Internet.

[31] Boyer, C. B.: *A History of Mathematics*. Wiley, New York, 1989. 2:a rev. utg. Utg.: Uta C. Merzbach.

[32] Bradley, Robert E. och C. Edward Sandifer: *Cauchy's Cours d'analyse. An Annotated Translation.* Springer, 2009. `2MFfZ5s`.

[33] Briggs, Henry: *Arithmetica Logarithmica*. 1624, 2006. Övers. och kommentar: Ian Bruce. 2MKU1xK.

[34] Briggs, Henry: *Trigonometria Britannica*. 1631, 2013. Övers. och kommentar: Ian Bruce. 2MKU1xK.

[35] Cajori, Florian: *A history of mathematical notations*. Dover Publications, Inc. New York, 1928–9, 1993. 2UrHaoK.

[36] Cantor, Georg: *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. The Open Court Publishing Company, Chicago and London, 1895–7, 1915. Övers.: Philip E. B. Jourdain. Finns tillgänglig på Internet.

[37] Cardani, Hieronymi: *Artis Magnæ sive de regvlis algebraicis*. 1545. Osiandro Andræ (vero eruditiff). 3cKH1CP.

[38] Cardano, Gerolamo: *The Rules of Algebra (Ars magna)*. Dover Publications, 1545, 1993. Övers.: T. Richard Witmer.

[39] Carleson, Lennart: *On convergence and growth of partial sums of Fourier series*. Acta Mathematica, 116:135–57, 1966. 2UsAQgr.

[40] Cayley, Arthur: *A Memoir on the Theory of Matrices*. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 148:17–37, 1858. 37gCJCn.

[41] Cayley, Arthur: *Chapters in the analytical geometry of (n) dimensions*. The Cambridge Mayhematical Journal, 4:119–67, 1843.

[42] Cayley, Arthur: *On the Theory of Groups*. American Journal of Mathematics, 11(2):139–57, januari 1889.

[43] Chambers, Robert: *A Biographical Dictionary of Eminent Scotsmen III*. Blackie and Son, 1835.

[44] Chuquet, Nicolas: *Le triparty en la science des nombres par magister Nicolas Chuquet*. Imprimerie de science mathématiques et physique, Rome, 1488, 1884. Notis: Aristide Marre. 3Oolg9p.

[45] Cohen, Paul J.: *The independence of the continuum hypothesis*. I *Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America*, volym 50 av *6*, sidor 1143–8, 1963.

[46] Cohen, Paul J.: *The independence of the continuum hypothesis II*. I *Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America*, volym 51 av *1*, sidor 105–10, 1964.

[47] Cook, Stephen A.: *The complexity of theorem-proving procedures*. I *Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing*, sidor 151–8, 1971. 2YCFpWI.

[48] Cooper, Leon: *A new interpretation of Problem 10 of the Moscow Mathematical Papyrus*. Historia Mathematica, 37, 2010. 2MI3h63.

[49] Courant, Richard och David Hilbert: *Methods of Mathematical Physics I–II*. Springer, 1924, 1938.

[50] Cramer, Gabriel: *Introduction a l'analyse des lignes courbes algébriques*. Shez les frères Carmer et Philibert, Geneve, 1830. Finns tillgänglig på Internet.

[51] Cramér, Harald: *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton University Press, 1946, 1999.

[52] Crossley, J. W.: *The emergence of numbers*. Upside Down A Book Company, 1980.

[53] Daffa, Ali Abad Allah: *The Muslim contribution to mathematics*. Humanities Press, 1977.

[54] Dahlquist, Germund: *Stability and error bounds in the numerical integration of ordinary differential equations*. Kungliga Tekniska Högskolans Handlingar, Stockholm, 1958.

[55] Dahlquist, Germund och Åke Björck: *Numerical methods*. Prentice Hall Inc., 1972.

[56] d'Alembert, Jean LeRond: *Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration*. I *Histoire de l'Académie royale de science et belles-lettres de Berlin (HAB) pour l'année 1747*. 1747. `2Amkteu`.

[57] d'Alembert, Jean LeRond: *Traité de dynamique*. David l'aîné. Libraire. Paris, 1743. `2YjOrIg`.

[58] Dantzig, George B.: *Linear Programming and Extensions*. Princeton University Press, 1963. `3cK2Lih`.

[59] Datta, B.: *The Science of Sulba*. University of Calcutta, 1932. `2XNEG6c`.

[60] Davies, Tinka: *Fortytwo problems of first degree from Diophantus' Arithmetica*. Department of Mathematics and Statistics, Wichita State University, 2010. `3fBh9eq`.

[61] Davis, Tom: *Group Theory via Rubik's Cube*. Internet. `2WJvSNH`.

[62] Dedekind, Richard: *Über die Theorie der ganzen algebraischen Zahlen*. 1879. `2zmwaSa`.

[63] Desargues, Girard: *Brouillon Project*. Cambridge University Press, 1639, 2011.

[64] Descartes, René: *La Géométrie*. A. Hermann, Libraire Scientifique, Paris, 1637, 1886. `37jRhAX`.

[65] Descartes, René: *The Geometry of René Descartes: with a Facsimile of the first edition*. Dover Books on Mathematics, Courier Corporation, 1637, 2012.

[66] Dirichlet, P. G. Lejeune: *Lectures on Number theory*. American Mathematical Society and London Mathematical Society, 1894, 1999. Övers.: J. Stillwell. Kommentar: R. Dedekind.

[67] Dirichlet, P. G. Lejeune: *Vorlesungen über Zahlentheorie*. Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1894. Tillägg: R. Dedekind. 3fJ9U4u.

[68] Dürer, Albrecht: *Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit*. Süddeutsche Monatshefte. München, 1525, 1908. Inledn.: Alfred Peltzer.

[69] Ebbinghaus, H. D. et al: *Graduate texts i Mathematics Readings in Mathematics. (Book 123)*. Springer, 1996. `37g5Ghy`.

[70] Elert, Glenn: *Ptolemy's table of chords: Trigonometry in the second century*. 1998–2016. `2XL7N9V`.

[71] Ernby, Birgitta: *Norstedts etymologiska ordbok*. Norstedt akademiska förlag, 2008.

[72] Euclid: *Elements*. Internet. `2zh61E8`.

[73] Euler, Leonhard: *Algebra*. 1767, 2016. Övers. och kommentar: Ian Bruce. `2MKU1xK`.

[74] Euler, Leonhard: *Elements of Algebra with the notes of M Bernoulli and additions of M La Grange*. Norman, Rees, Orme, and Co., London, 1767, 1828. Övers.: John Hewlett. `3dMXesx`.

[75] Euler, Leonhard: *Foundations of Differential Calculus*. 1755, 2011. Övers. och kommentar: Ian Bruce. `2MKU1xK`.

[76] Euler, Leonhard: *Foundations of Integral Calculus*. 1768–70, 2017. Övers. och kommentar: Ian Bruce. `2MKU1xK`.

[77] Euler, Leonhard: *Introduction to Infinite Analysis*. 1748, 2013. Övers. och kommentar: Ian Bruce. `2MKU1xK`.

[78] Euler, Leonhard: *Letters on Different Subjects in Physic and Philosophy Addressed to a German Princess*. Murray and Highley; J. Cuthell; Vernor and Hood; Longman and Rees; Wynn and Scholey; G. Cawtorn; J. Harding; J. Mawman, London, 1760–2, 1802. Övers. och kommentar: Henry Hunter.

[79] Euler, Leonhard: *Recherches sur la courbure des surfaces*. I *Memoires de l'academie des sciences de Berlin*, volym 16, sidor 119–43. 1767. `2ziwwJv`.

[80] Euler, Leonhard: *Some Papers*. Internet (`2MKU1xK`), 2016. Övers. och kommentar: Ian Bruce.

[81] de Fermat, Pierre och Blaise Pascal: *Fermat and Pascal on Probability*, 1654. `2XLM6Xf`.

[82] Fisher, Ronald: *Statistical Methods for Research Workers*. Oliver and Boyd, Edinburgh, London, 1925. `3hwFdBf`.

[83] Fourier, Joseph: *Analytical Theory of Heat*. Cambridge University Press, 1822, 1878. Övers.: Alexander Freeman. `3hCwHAM`.

[84] Fourier, Joseph: *Théorie Analytique de la Chaleur*. Éditions Jacques Babay, 1822, 1988. `2UUf9WX`.

[85] Fowler, David och Eleanor Robson: *Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in Context*. Historia Mathematica, 25, 1998. `37hvQkg`.

[86] della Francesca, Piero: *Libellus de quinque corporis regularibus*. Giunti, Firenze, c:a 1460, 1995.

[87] Frege, Gottlob: *Aritmetikens grundvalar*. Thales, 1884, 2002. Övers.: Fredrik Stjernberg.

[88] Frege, Gottlob: *Die Grundlagen der Arithmetik. Eine Logisch Mathematisch Untersuchung über den begriff der Zahl.* W. Koebner, Breslau, 1884. `3cK4rbz`.

[89] Forsell, Olof H.: *Aritmetik för begynnare*. Fr. B. Nestius, 1818.

[90] Galilei, Galileo: *Dialog om de två världssystemen*. Atlantis, 1632, 1993. Övers.: Katarina Zaccheo. Kommentar: Gunnar Eriksson.

[91] Galilei, Galileo: *Samtal och matematiska bevis rörande två nya vetenskaper*. Atlantis, 1638, 2005. Övers.: Katarina Zaccheo.

[92] Galilei, Galileo: *Samtal och matematiska bevis rörande två nya vetenskaper*. I *Sigma*, volym 2, sidor 461–95. 1638, 2005.

[93] Galilei, Galileo: *Opere*. Per gli hh del Dozza, Bologna, 1655–6. `2UVpNwu`.

[94] Galilei, Galileo: *The Assayer*. 1623. Övers. (förkortad): Stillman Drake. `https://stanford.io/2MJt5P4`.

[95] Galois, Evariste: *Mémoire sur les conditions de resolubilité des equations par radicaux*. Journal de mathématiques pures et appliquées, sidor 417–33, 1843. Finns tillgänglig på Internet.

[96] Gauss, Carl Friedrich: *Disquisitiones Arithmeticae (English edition)*. Yale University Press, 1801, 1966. Övers.: Arthur A. Clarke.

[97] Gauss, Carl Friedrich: *General Investigations of Curved Surfaces*. Princeton University Library, 1827, 1902. Övers. och kommentar: James Caddal Morehead, Adam Miller Hiltebeitel. `3dNavBF`.

[98] Gauss, Carl Friedrich: *Untersuchungen über höhere Arithmetik*. Chelsea Publishing Company, New York, 1801, 1898, 1981. Övers.: H. Maser. `2AQNu1W`.

[99] Gleick, James: *Chaos: Making a New Science*. Viking Penguine, 1987.

[100] Glimstedt, Peter: *Första boken af Diofanti Arithmetica*. Berlingska tryckeriet, Lund, 1855. `3cGU6gE`.

[101] Grassmann, Hermann: *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*. Verlag von Otto Wiegand, Leipzig, 1844. `2USl7HW`.

[102] Graunt, John: *Natural and Political Observations mentioned in following Index, and made upon the Bills of Mortality*. Royal Society, 1665. `3hBTRaj`.

[103] Grottendorst, Albert W., Jan Aarts, Mente Bakker och Reinie Erne: *Jan de Witt's Elementa Curvarum Linearum*. Springer, 1659, 2010. Skall ej författarna stå i bokstavsordning?

[104] Gårding, Lars: *Encounter with Mathematics*. Springer, 1977.

[105] Gårding, Lars: *Matematik och matematiker – matematiken i Sverige före 1950*. Lund University Press, 1994.

[106] Gödel, Kurt: *On formally undecidable propositions of Principia mathematica and related systems*. Dover Publications, Inc., 1931, 1992. Övers.: B. Melitzer. Inledn.: R. B. Braithwaite.

[107] Gödel, Kurt: *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme, I.* Monatshefte für Mathematik und Physik, 38:173–98, 1931. `3cIo9o1`.

[108] Hadamard, Jacques: *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*. Dover Publication, 1945, 1954. Finns tillgänglig på Internet. `www.worrydream.com`.

[109] Hall, Tord: *Gauss: Matematikernas konung*. Prisma, 1965.

[110] Hall, Tord: *Matematikens utveckling*. Gleerup, 1970.

[111] Halley, Edmond: *An estimate of the degrees of the mortality of mankind drawn from curious tables of the births and funerals at the city of Breslaw; with an attempt to ascertain the price of annuities upon lives*. Philosophical Transactions, 17:596–610, 1693. `3cLPEx5`.

[112] Hamilton, William Rowan: *Lectures on Quarternions: Containing systematic statement of a new mathematical method of which the principles were to the Royal Irish Academy in 1813*. Hodges and Smith, Dublin, 1853. `2AWIA3G`.

[113] Hamilton, William Rowan: *Theory of conjugate functions, or algebraic couples, with a preliminary and elementary essay on algebra as the science of pure time*. Transactions of the Royal Irish Academy, 17:293–422, 1837. `2AXvjYg`.

[114] Harary, Frank: *Graph Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, 1969. `2UUQr8R`.

[115] Hardy, G., J. Littlewood och G. Polya: *Inequalities*. Cambridge at the University Press, 1932. `3cUdLtL`.

[116] Harriot, Thoms: *Application of the Analytic Art to Solving Algebraic Equations*. 1631, 2006. Övers. och kommentar: Ian Bruce. `2MKU1xK`.

[117] Hatami, Reza Russell: *Hans Larsson Rizanesanders Recknekonsten*. NCM, 2018. Tolkning: Adam von Scheele.

[118] Hausdorff, Felix: *Grundzüge der Mengenlehre*. Verlag von Vet und Comp, Leipzig, 1914. `3dNaPjR`.

[119] Heath, T. L.: *A history of greek mathematics. Volume I.* Clarendon Press, Oxford, 1921. `2XNHFvc`.

[120] Heath, T. L.: *A history of greek mathematics. Volume II.* Clarendon Press, Oxford, 1921. `2MJZcy1`.

[121] Heath, T. L.: *Apollonius of Perga. A treatise on conic sections.* Cambridge University Press, 1896. `37hwu1a`.

[122] Heath, T. L.: *Diophantos of Alexandria. A study in the theory of greek algebra.* Cambridge University Press, 1910. `2XKsz9R`.

[123] Heath, T. L.: *The thirteen books of Euclid's Elements. Volume I.* Cambridge University Press, 1908. `2zlKvyc`.

[124] Heath, T. L.: *The thirteen books of Euclid's Elements. Volume II.* Cambridge University Press, 1908. `2UUgzki`.

[125] Heath, T. L.: *The thirteen books of Euclid's Elements. Volume III.* Cambridge University Press, 1908. `2YYdzon`.

[126] Heath, T. L.: *The works of Archimedes.* Cambridge University Press, 1897. `3dUceVS`.

[127] Hilbert, David: *The foundations of Geometry.* The Open Court Publishing Company La Salle, Illinois, 1899, 1950. Övers.: E. J. Townsend. `2XPpTYF`.

[128] Hilbert, David och Paul Bernays: *Foundations of Mathematics. Volume I.* 1934. Bernays Project: Text No 12. Övers.: Ian Mueller. `2YJwzGT`.

[129] Hilbert, David och Maby Winton Newson: *Mathematical Problems. Lecture delivered before the International Congress of Mathematicians at Paris in 1900.* Bulletin of the American Mathematical Society, 8:437–79, 1900, 1902. `30QiCtj`.

[130] Hill, Christofer: *Intellectual Origins of the English Revolution.* Oxford University Press, 1965.

[131] Holme, Audun: *Arabic Mathematics and Geometry.* Springer, 2010.

[132] Hsi, Fu: *The Sacred Book of China. The I Ching.* Dover Publications Inc., New York, 1899, 1963. Övers.: James Legge. `37e7esq`.

[133] Hutchins, Robert M.: *Euclid, Archimedes, Apollonius of Perga. (Great Books of the Western World. Volume 11).* Encyclopaedia Britannica, Inc., 1989.

[134] Huygens, Christiaan: *Libellus de Ratiociinis in Ludo Aleae or The Value of all Chances in Games of Fortune; Cards, Dice, Wages, Lotteries etc.* S. Keimer for T. Woodward, London, 1657, 1714. `3e03r4N`.

[135] Håstad, M., L. Svensson och C. Öreberg: *Hej Matematik.* Liber Läromedel AB, Malmö, 1970-79.

[136] Hörmander, Lars: *The analysis of linear partial differential operators.* Springer, 1983 –5.

[137] Ifrah, Georges: *Räkneknostens kulturhistoria, del 1 och 2.* Wahlström och Widstrand, 2002, 2004.

[138] Isaacson, Walter: *Innovatörerna: genierna och nördarna som skapade den digitala revolutionen.* Albert Bonniers förlag, 2015.

[139] Johansson, Bo Göran: *Matematikens historia*. Studentlitteratur, 2004.

[140] Joseph, G. G.: *The Crest of the Peacock*. Princeton University Press, 2000.

[141] Kangshen, Shen, John N. Crossley och Anthony W. C. Lun: *The Nine Chapters of the Mathematical Art*. Oxford University Press, 1999.

[142] Karmarkar, N.: *A new polynomial-time algorithm for linear programming*. Combinatorica, 4(4):373–95, 1984. `3fzNLWg`.

[143] Kempe, Alfred: *On the Geographical Problem of the Four Colours*. American Journal of Methematics, 2, 1879. `37jTGeX`.

[144] Kendall, David et al: *Andrei, Nikolaevich Kolmogorov (1903–87)*. Bulletin of the London Mathematical Society, 22(1):31–100, 1990.

[145] Kent, Deborah A. och David J. Murak: *A Geometric Solution of a Cubic by Omar Khayyam . . . in which Coloured Digrams are Used Instead of Letters for the Greater Ease of Learners*. American Mathematical Monthly 121:1, 2015.

[146] Keynes, John Maynard: *A Treatise on Probability*. MacMillan and Company, London, 1921. `2XLydIC`.

[147] Khayyam, Omar: *Rubaiyat*. Ellerströms förlag, 1928, 1993. Övers.: Eric Hermelin.

[148] Klein, Felix: *A comparative review of recent researches in geometry. (Programme on entering the philosophical faculty and the senate of the University of Erlangen 1872)*. Bull. New York Math. Soc, 2:215–49, 1872, 1892–3. Övers.: M. W. Haskell. `3fwhrn0`.

[149] Kline, Morris: *Mathematical Thought From Ancient to Modern Times*. Oxford University Press, 1972.

[150] Knuth, Donald: *The Art of Computer Programming*. Addison Wesley, 1968, 1973.

[151] Kolmogorov, A. N.: *Foundations of the Theory of Probabilty*. Chelsea Publishing Company, 1933, 1950. Övers.: N. Morrison. `2YIqeeW`.

[152] Kolmogorov, A. N.: *On the analytic methods of probability theory*. 1938. `2AY7X4P`.

[153] Kragh Sørensen, Henrik: *Niel Henrik Abel and the theory of equations*. History of Science Department, University of Aarhus, Denmark, 1999.

[154] Lagrange, Joseph Louis: *Mécanique Analytique I–II*. Mme Ve Courcier, Imprimeur. Libraire por les Mathematiques et la Marine. Paris, 1788–9, 1811. Del I: `2YHVqL7`.

[155] Lagrange, Joseph Louis: *Réflexions sur la résolution algébrique des équations*. I *Mémoires de l'Académie royale de science et belles-lettres de Berlin*. 1770. `2XP838a`.

[156] de Landa, Diego: *Yucatan before and after the Conquest*. Global Grey E-books, 1566, 1937. Övers.: William Gates. `3dS5aZG`.

[157] Laplace, Pierre Simon: *Essai philosophique sur les probabilités*. Cambridge University Press, 1825, 2009. `2UTzwDy`.

[158] Laplace, Pierre Simon: *Mécanique céleste*. From the press of Isaac R. Butts, Hilliard, Gray, Little and Wilkins, Publishers, Boston, 1798–1825, 1829. Övers.: Nathaniel Bowditch. `2XMdqox`.

[159] Laplace, Pierre Simon: *Théorie analytique des probabilités*. Mme Ve Courcier, Imprimeur. Libraire por les Mathematiques et la Marine. Paris, 1814. `2MFQgtH`.

[160] Lebesgue, Henri: *Sur une généralisation de l'intégrale définie*. I *Comptes Rendus*. 1901.

[161] Legendre, A. M.: *Essai sur la théorie des nombres*. Libraire pour le Mathématiques Duprat, 1798. `37jU4tV`.

[162] Leibniz, Gottfried Wilhelm: *Dissertation on the Art of Combinations*. Department of Plilosophy, University of Cincinnati, 1666, 2003. Övers. och kommentar: John N. Martin. `2YFiSsu`.

[163] Leibniz, Gottfried Wilhelm: *Mathematical Works of G. W. Leibniz*. Internet (`2MKU1xK`), 2015. Övers. och kommentar: Ian Bruce.

[164] Lenstra, H. W.: *Solving the Pell equation*. Notices of the AMS, 49(2):182–92, 2002. `2MI5SwD`.

[165] l'Hôpital, Guillaume: *Analyse des infinitesiment petits*. Didot, Paris, 1696, 1768. `2AVlGJG`.

[166] von Lindemann, Ferdinand: *Ueber die zahl π*. Mathematische annalen, 20:213–25, 1882. `2UPaBRC`.

[167] Lindroth, Sten: *Svensk lärdomshistoria. Stormaktstiden.* Norstedts, 1975.

[168] Lobachevskij, N. I.: *Geometrische Untersuchungen zur Theorie der parallellenlinien*. Mayer und Müller, Berlin, 1840, 1887. Finns tillgänglig på Internet.

[169] Lobachevskij, N. I.: *New principles of geometry with complete theory of parallels*. The Neomon, 1826, 1897. Övers.: G. B. Halsted.

[170] MacLaurin, Colin: *A Treatise of Algebra*. A. Millar and J. Nourse, London, 1748. `3hCLBqB`.

[171] MacLaurin, Colin: *A Treatise on Fluxions*. William Baynes, 54, Paternoster Row and William Davos, London, 1742, 1801. Delvis på Internet: `3dPFzR3`.

[172] Mahoney, M. S.: *The Mathematical Career of Pierre de Fermat (1601–1665)*. Princeton, 1994.

[173] Mandelbrot, Benoit: *How Long is the Coast of Britain? Statistical Self-similarity and Fractional dimension*. Science, 156:636–8, 1967. `3hC1vBA`.

[174] Mandelbrot, Benoit: *Les Objets fractals – Forme, hasard et dimension*. Champs sciences, 1975.

[175] Mandelbrot, Benoit: *The Fractal geometry of Nature*. W. H. Freeman and Company, 1982.

[176] Martin, George E.: *Geometric Constructions*. Springer, 1997.

[177] Maxwell, James Clerk: *A Treatise on Electricity and Magnetism*. Macmillan and Co., 1873. 37gHsnB.

[178] McKay, Brendan D. och Stanislaw P. Radziszowski: *"$R(4,5) = 25$"*. Journal of Graph Theory, 1995. 2MLzIAt.

[179] Menabrea, Luigi F.: *The Analytical Engine Invented by Charles Babbage*. Bibliothèque Universelle de Genève, 1842. Övers. och kommentar: Ada A. Lovelace. 37eJggI.

[180] Mirsky, Leon: *Graver, J. E. och Watkins, M. E.: Combinatorics with emphasis on the theory of graphs* (Bokrecension). Bulletin of the American Mathematical Society, 1(2):380–8, 1979. 2XObFXT.

[181] de Moivre, Abraham: *The Doctrine of Chances or, A Method of Calculating the Probabilities in Play*. A. Miller, London, 1718, 1756. 3cMcqVH.

[182] Monge, Gaspard: *An elementary treatise on descriptive geometry with a theory of shadows and perspective*. Weale, London, 1798, 1851. Övers.: J. A. Heather. 2V0Gre8.

[183] Monge, Gaspard: *Application de l'analyse à la géométrie*. Bacheliier, Imprimeur-Libraire, Paris, 1850. 3cNitJt.

[184] de Morgan, Augustus: *Formal Logic or, the Calculus of Infertence, Necessary and Probable*. Taylor and Walton, London, 1847. 2MFB13M.

[185] Nahar, M. och S. T. Ziaun: *Mathematics Learning through History. From Arab Mathematician Omar-Al-Khayyam Method*. University of Tsukuba, 2001. 2XLOugF.

[186] Napier, John: *The Description of the Wonderful Canon of Logarithms*. 1614, 2017. Övers.: Ian Bruce. 2MKU1xK.

[187] Neugebauer, Otto: *The Exact Sciences in Antiquity*. Dover Publications, Inc. New York, 1969.

[188] von Neumann, John: *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton University Press, 1932, 1918. Red.: Nicholas A. Wheeler, Robert T. Beyer.

[189] von Neumann, John: *The Computer and the Brain*. Yale University Press, New Haven, 1958. 2XKobaW.

[190] von Neumann, John: *Theory of Games and Economic Behaviour*. Princeton University Press, 1944, 1953. 2XLB7gu.

[191] Newman, James. R (redaktör): *Sigma – en matematikens kulturhistoria*. Forum, 1959 –60, 1965. Övers.: Tord Hall.

[192] Newton, Isaac: *Opticks or A Treatise of the Reflctions, Refractions, Inflections and Colours of Light. With a Foreword by Albert Einstein, an Introduction by Edmund Whittacker and a Preface by I. Bernhard Cohen*. Dover Publications Inc. New York, 1730, 1952. 2MLqaFs.

[193] Newton, Isaac: *Philosphiae Naturalis Principia Mathematica*. 1687, 2012. Övers. och kommentar: Ian Bruce. 2MKU1xK.

[194] Nichomachus of Gerasa: *Introduction to Arithmetic*. The Macmillan Company, 1926. Övers.: Martin Luther D'ooge. 2ARn2Fp.

[195] Ore, Øystein: *Niels Henrik Abel – et geni og hans samtid*. Gyldendal Norsk Forlag, 1954.

[196] Pacioli, Luca: *Divina proportioni*. A. Paganius Paganinus, Venetiis, 1509. 37h7lUa.

[197] Pacioli, Luca: *Particularis de Computis et Scripturis 1494 Fra Luca Pacioli. A contemporary interpretation.* Pacioli Society, Seattle, 1994. Övers. och kommentar: Jeremy Cripps. 30wOzqi.

[198] Pacioli, Luca: *Summa de Arithmetica geometris, proportioni et proportionalita*. 1494. Delvis på Internet: 3fxzk4P.

[199] Pascal, Blaise: *New Experiments on Vacua*. Worcester, Mass., 1647, 1872. Övers.: Willard J. Fischer.

[200] Pascal, Blaise: *Tankar*. Forum, 1669, 1957. Övers.: Sven Stolpe.

[201] Pascal, Blaise: *Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traités sur le même matière*. Guillaume Despret, 1665. 2ALzh6D.

[202] Peano, Ioseph: *Aritmetices Principia Nova Methodo Principia*. 1889. Augustae Taurinomrum Ediderunt Fratres Bocca. 2MHQr7H.

[203] Pepys, Samuel: *The Diary of Samuel Pepys*. George Bell and Sons York, St. Covent Garden, Cambridge Deightion Bell and Co., 1893. Transkription: Mynors Bright. 2ML3kxS.

[204] Persson, Johannes och Nils Eric Sahlin: *Vetenskapsteori för sanningssökare*. Fri tanke förlag, 2013.

[205] Petty, William: *Political Arithmetick*. Clavel and Mortlock, London, 1690. 37ebgBf.

[206] Platon: *Theaetetus*. 360 f.Kr. 2MGXoFV.

[207] Poincaré, Henri: *Analysis situs and Its Five Supplements*. 1895, 2009. Övers.: John Stillwell. 2XKmzOo.

[208] Poincaré, Henri: *Les Méthodes Nouvelles de la Mécaniques Céleste*. Gauthier-Villars et fils, 1892, 2014. 2XJWZZI. Ny upplaga utgiven av Nabu Press.

[209] Poincaré, Henri: *Science and Hypothesis*. The Walter Scott Publishing Company, Ltd., 1901, 1905. Inledn.: J. Larmor. 3cMgt4l.

[210] Poincaré, Henri: *The Value of Science*. The Scientific Press, New York, 1905, 1907. Övers.: George Bruce Halsted.

[211] Poincaré, Henri och Francis Maitland: *Science and Method*. Thomas Nelson and sons, 1908. 2ATwaJP.

[212] Poisson, Simon Denis: *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile*. Bachelier, Imprimeur-Libraire pour les Mathematiques, La Physic etc., Paris, 1837. `30S2wPO`.

[213] Pólya, George: *Aufgabe und Lehrsätxe aus der Analysis*. Springer, 1925.

[214] Pólya, George: *How to solve it*. Doubleday Anchor books, New York, 1945. `2APR7Fx`.

[215] Pólya, George och Gabor Szegö: *Problems and Theorems in Analysis I*. Springer, 1978. `3cJIU2V`.

[216] Poncelet, Jean Victor: *Propriétés Projectives des Figures*. Gauthier-Villars Imprimeur-Libraire, Paris, 1865. `2MGXGN1`.

[217] Ptolemaios, Klaudius: *Almagest*. The Old Piano Factory, London, 1984. Övers. och kommentar: G. J. Toomer.

[218] Ramus, Peter: *The way to geometry*. Thomas Cotes, London, 1569, 1636. Övers.: William Bedwell. `2MK1Wvj`.

[219] Recorde, Robert: *En deklaration om nyttan med matematik*. I *Sigma – en matematikens kulturhistoria*, volym 1, sidor 160–5. 1548, 1959.

[220] Recorde, Robert: *The Ground of Artes*. Roger Iackson, London, 1543, 1618. `2YCKjD6`.

[221] Recorde, Robert: *The Whetstone of Witte*. John Kingston, London, 1557. `2XKv0t1`.

[222] Redlin, Lothar, Vietand Ngo och Saleem Watson: *Thales' Shadow*. Mathematical Magazine, 73(5):347–53, 2000.

[223] Riemann, Bernhard: *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlicher komplexen Grösse*. 1851. `2MFFcN0`.

[224] Riemann, Bernhard: *On the Hypotheses which lie at the bases of Geometry*. Nature, VIII(183, 184):13–7, 36–7, 1854, 1873. Övers.: Clifford William Kingdon. `3dIPl7w`.

[225] Riemann, Bernhard: *Ueber die Anzahl det Primzahlen einer gegebenen Grösse*. Monatsberichte der Berliner Akademie, 1859. `37e91h8`.

[226] Riemann, Bernhard: *Ueber die Darstellbarkeit einer Funktion durch eine trigonometrische Reihe*. Abhandlung Universität Göttingen, 1854. `2XMHoZu`.

[227] Robson, Eleanor: *Word and Picture: New Light on Plimpton 322*. American Mathematical Monthly, 109(2):105–20, 2002. `2MOLHgp`.

[228] Rodhe, Staffan: *Algoritmer i Trevisoaritmetiken*. Nämnaren, (7A), 2010. `2YTYnIK`.

[229] Russel, Bertrand: *A History of Western Philsophy and its connection with Political and Social Circumstances from Earliest Times to Present Day*. Simon and Schuster, New York, 1945.

[230] Russel, Bertrand: *Introduction to Mathematical Philosophy*. George Allen and Unwin, Ltd., London/The Macmillan Co., New York, 1919. Finns tillgänglig på Internet.

[231] Singh, Simon: *Fermats gåta*. Norstedts förlag, 1998.

[232] Smith, David Eugene: *A History of Mathematics*. Dover Publications, 1923/25, 1958.

[233] Smith, David Eugene: *A Source Book in Mathematics*. MacGraw-Hill Company, New York, 1929.

[234] Sonnevi, Göran: *Det omöjliga*. Bonniers, 1975.

[235] Spencer, John R.: *Alberti 'On Painting'*. Yale University Press, New Haven, 1956, 1970.

[236] Stevin, Simon: *Disme: The Art of Tenths*. Imprinted at London by S. S. for Hugh Astley, 1585, 1608. Övers.: Robert Norton. `3dNe0YP`.

[237] Struik, D. J.: *A Concise History of Mathematics*. G. Bell and Sons Ltd., London, 1954. `2MMCHbC`.

[238] Struik, D. J. (redaktör): *A Source Book in Mathematics, 1200–1800*. Harvard University Press / Oxford University Press, London, 1969. `2XMwfrB`.

[239] Süssmilch, Johann Peter: *Die Göttliche Ordnung In Den Veränderungen Des Menschlichen Geschlechts, Aus Der Geburt, Dem Tode Und Der Fortpflanzung*. Im Verlag des Bauchladens der Realschule, Berlin, 1741. `3fvoOLx`.

[240] Swetz, Frank J.: *Capitalism and Arithmetic: The New Math of the 15th Century – including the full text of the Treviso Arithmetic of 1478*. Open Court, 1987. Övers.: D. J. Smith.

[241] Swetz, Frank. J.: *From Five Fingers to Infinity*. Open Court Publishing Co., 1994.

[242] Swetz, Frank J.: *Learn from the Masters – Classroom Resources*. The Mathematical Association of America, 1997. Red.: John Fauvel, Bengt Johansson, Victor Katz, Otto Bekken.

[243] Swetz, Frank J. och Victor J. Katz: *Mathematical Treasures – A Treatise of Algebra by John Wallis*. 2011.

[244] Taylor, Brook: *Methodus Incrementorum Directa et Inversa*. 1715, 2007. Övers. och kommentar: Ian Bruce. `2MKU1xK`.

[245] Tengstrand, Anders: *Åtta kapitel om geometri*. Studentlitteratur, 2004.

[246] Thompson, Jan: *Matematiken i historien*. Studentlitteratur, 1996.

[247] Todhunter, Isaac: *A history of the mathematical theory of probability*. Macmillan and Co., 1865. `3dQVize`.

[248] Turing, Alan. M.: *Computing Machinery and Intelligence*. Mind. A Quaterly Review of Phsychology and Philosophy., LIX(236):433–60, 1950. `37mgKd5`.

[249] Turing, Alan. M.: *On computable numbers, with an application to the Entscheidungsproblem*. I *Proceedings of the London Mathematical Society*, volym 42, sidor 230–65, 1936. `2URp4fQ`.

[250] Tönisson, Tönis: *Högre matematik för poeter och andra oskulder*. Prisma, 1981.

[251] Ufnarovski, Victor, Frank Wikström och Jana Madjarova: *Mathematical buffet: problem solving at the olympiad level*. Studentlitteratur, 2016.

[252] Vaderlind, Paul: *Matematiska utmaningar – En kurs i problemlösning*. Studentlitteratur, 2015.

[253] Venn, John: *The Logic of Chance*. MacMillan and Company, 1888. `3dNe9LR`.

[254] Viète, Francois: *The Analytic Art*. Dover Publications, 1591, 2006.

[255] van der Waerden, B. L.: *Modern Algebra*. Ungar, New York, 1931, 1970. Övers.: Fred Blum.

[256] van der Waerden, B. L.: *Nachruf auf Emmy Noether*. Matematische annalen, 111, 1935. `3dPbLUy`.

[257] van der Waerden, B. L.: *Science awakening*. Oxford University Press, New York, 1961.

[258] Wantzel, Pierre: *Recherches sur les moyens de reconnaitre si un Problème de Géométrie peut se résourdre avec la règle et le compas*. Journal de Mathématiques, 2:366–72, 1837. `2UYW2uQ`.

[259] Waring, Edward: *Meditationis Algebraicae, an English Translation of the Work of Edward Waring*. American Mathematical Society, 1782, 1991. Red.: Dennis Weeks.

[260] Weierstrass, Karl Theodor: *Abhandlungen aus den Funktionenlehre*. Springer, 1886. `2MOMk9L`.

[261] Wessel, Caspar: *Om Directionens analytiske Betegning, et Forsog, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Oplosning*. I *Nye Samling af det Kongelige Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter*, volym 5, sidor 469–518. 1799. `37fc74x`.

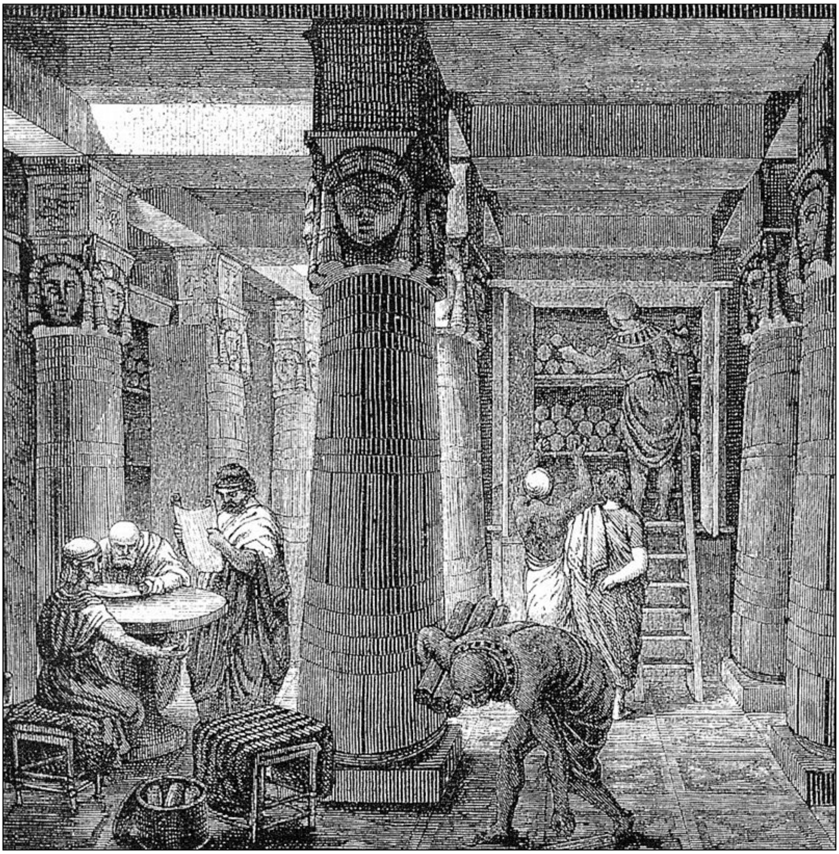
[262] Weyl, Hermann: *Speech at Emmy Noether's funeral*. `2C8Dd1F`.

[263] Whitehead, Alfred North och Bertrand Russel: *Principia mathematica. Volume I*. Cambridge University Press, 1910, 1965. `3dN1BDX`.

[264] Wigforss, Fritz: *Den grundläggande matematikundervisningen*. Magn. Bergvalls förlag, 1925. `39bFrK5`.

[265] Wiles, Andrew: *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*. Annals of Mathematics, 141:443–551, 1995. `37jWtor`.

[266] von Zweigbergk, Per Anton: *Lärobok i räknekonsten*. F. & G. Beijers Bokförlagsaktiebolag, 1839.



Biblioteket i Alexandria var det största och mest betydelsefulla under antiken. Det grundlades förmodligen omkring 280 f.Kr. av kung Ptolemaios II av Egypten och innehöll under sin storhetstid mellan 400 000 och 700 000 rullar av papyrus eller pergament. Biblioteket var en del forskarbyn Museion där många matematiker som Euklides, Eratosthenes och Aristarchos verkat. Ersatosthenes var dessutom under en tid överbibliotekarie. Biblioteket blomstrade under några århundraden men dess betydelse avtog delvis antagligen på grund av bristande underhåll. Till slut förstördes det och det råder delade meningar hur det gick till. Hur som helst förlorades en omfattande kunskapsskatt även om en hel del hade kopierats och översatts till bl.a. arabiska. Biblioteket i Alexandria kom att bli en symbol för antikens tro på kunskap och har inspirerat många konstnärer att ge en bild av verksamheten där. I figuren visas hur en okänd konstnär tänkte sig den. (Bild: 39aK7A1)

Sakregister

Efter att i över sextio år undervisat på olika stadier har författaren velat undersöka hur den matematik som nu ingår i olika utbildningar från förskola och lågstadium till högskola har vuxit fram. Ledstjärnan i arbetet har varit Aristoteles ord: *Här liksom på andra områden kan vi inte förvärva bästa insikt i tingen förrän vi sett dem utvecklas från sin begynnelse.*

Boken är indelad i två delar. Den första är en kronologisk översikt som ger utvecklingen i stort utan alltför många teknikaliteter. Den innehåller också korta biografier över ett urval av matematiker. Den andra delen ägnas åt ett djupare studium av utvecklingen inom sex delområden: aritmetik och beräkningsteknik, geometri, algebra, analys, sannolikhetslära och statistik samt diskret matematik. Framställning kräver kunskaper i matematik motsvarande grundläggande kurser i matematik på högskolenivå men delar kan tillgodogöras med mindre förkunskaper.

Anders Tengstrand pensionerades 2002 som universitetslektor i matematik vid Växjö universitet. Dessförinnan hade han arbetat med matematikundervisning i Växjö i 35 år; först vid universitetsfilialen, sedan vid Högskolan i Växjö och under de sista åren vid Växjö Universitet. Tengstrand har även undervisat efter pensioneringen men i mindre omfattning samt gett ut en rad läromedel, både själv och i samarbete med kollegor. Under hans aktiva tid skedde en omvälvande utveckling av högskolesystemet som innebar förändringar på många plan och på ämnesnivå utvecklades kurssystemet kontinuerligt – gamla kurser sågs över och nya kurser utvecklades. Tengstrand var delaktig i den processen och tillsammans med kollegorna i Växjö utvecklade han en mängd nya kurser. Ett exempel är en kurs i matematikens historia som startade på 1980-talet och som sedan dess getts en gång om året. Det är bland annat erfarenheterna från den verksamheten som ligger till grund för denna bok.

ISBN 978-91-519-6318-1

www.anderstengstrand-funderingarkringmatematik.se