Matematik och räkning

En konferens om matematikundervisning skall invigas. Värdkommunen har bidragit med medel för genomförandet och ett av kommunalråden hälsar som sig bör välkommen och efter välkomsthälsningen lämnar han över ordet till projektledaren med orden ”... och så hoppas jag att ni får gott om tid för räkning”. I sitt tack svarar projektledaren ”... och jag hoppas vi inte bara får tid för räkning utan också för matematik.”

I blixtbelysning speglas skillnaden mellan gemene mans och den professionelle matematikerns syn på ämnet matematik. För de flesta människor är matematik identiskt med räkning men för den som vigt sitt yrkesliv åt ämnet är matematiken betydligt mer. Ordens ursprung kan vara vägledande för att förstå skillnaden. Ordet matematik har enligt *Matematiktermer för skolan* sitt ursprung i det grekiska adjektivet *mathematikós* 'benägen att lära' från *máthema* 'det som läres och verbet *manthánein* 'att lära'. Ordet 'räkna' har enligt *Etymologisk ordbok* betydelsen 'utföra matematisk operation'. Ordet är besläktat med 'räcka' som i sin tur är synonymt med 'rad'. Matematik har mer med tänkande i största allmänhet att göra medan räkning handlar om att utföra operationer.

Ett begrepp som ofta knyts till räkning är algoritm. Enligt *Etymologisk ordbok* är en algoritm ett mönster för lösning av matematiska problem. Ordet kan härledas från namnet på matematikern al'Kwarizmi som verkade i Bagdad på 800-talet e.Kr. Hans viktigaste arbete är *Al-kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr wal muqabala* från 830. I sina verk ger han scheman för hur man kan räkna med de fyra räknesätten i vårt decimala system med de hinduiska siffrorna. Han visar också hur man kan lösa problem som leder till första- och andragradsekvationer. De räknescheman och metoder han beskriver innebär att man efter viss övning kan mekanisera delar av problemlösningen och därmed frigöra tankekraft för mer kreativa uppgifter. På liknande sätt finns hos många matematiker en drivkraft att skapa schematiska och generella metoder som kan ersätta arbetsamt tankearbete med rutinmässiga operationer. På det sättet får man bättre överblick, bättre möjligheterna att se nya samband och större potential för att formulera och lösa viktiga problem.

Om beräkningsteknik

Våra vanliga algoritmer

I alla kulturer har det varit viktigt att kunna göra beräkningar. Tidigt krävdes aritmetiskt kunnande för att göra handel, för arvsskiften, för astronomiska beräkningar och för navigation. I dagens tekniska samhälle görs mängder av beräkningar ofta utan att vi ser det. Räkningarna görs av datorer ibland inkapslade i saker som vi använder i vardagen som t.ex. klockor, spisar och bilar. Väderleksrapporterna bygger på mängder av data som ligger till grund för omfattande beräkningar. Exemplen kan mångfaldigas.

För att standardisera räkningarna skapas algoritmer. Tidigt skapades algoritmer för addition, subtraktion, multiplikation och division. Räkneläror utgavs för att ge allt fler möjligheter att hantera de fyra räknesätten på ett effektivt sätt. Handelsmannen eller astronomen kunde utföra räkningarna relativt mekaniskt och därmed kunde tankarna koncentreras på andra mer väsentliga sammanhang.

De första kända räknelärorna kom till under medeltiden. Som vi tidigare nämnt gav under 800-talet den persiske matematikern Al Khwarizmi ut ett antal verk där decimalsystemet med de hindu-arabiska siffrorna och algoritmer för de fyra räknesätten behandlades. År 1201 introducerade den italienske handelsmannen och matematikern Fibonacci systemet i västvärlden med verket *Liber abaci*. På 1400-talet gavs en rad räkneläror ut. År 1479 trycktes den s.k. Trevisoaritmetiken vars författare är okänd. I bokens första del behandlas de fyra räknesätten och en rad algoritmer beskrivs. Den andra delen handlar om reguladetri och proportionslära. Ett annat verk är italienaren Luca Paciolis *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita* som publicerades 1494. Engelsmannen Robert Recorde publicerade omkring 1540 arbetet *The Ground of Artes* där han på ett pedagogiskt sätt tar upp grundläggande aritmetik. Han inför bl.a. likhetstecknet. Verket är skrivet som en dialog mellan lärare och elev. Eleven gör misstag som läraren analyserar och på det viset vill Record skapa en förståelse för hur algoritmerna fungerar.

Men det tog lång tid innan algoritmerna blev allmän egendom. Räkning med abakusar dominerade länge. En litografi från början av 1500-talet illustrerar en tävling mellan en abakusräkning och räkning med algoritmer.

Att de fyra räknesätten inte var var mans egendom långt in på 1600-talet illustreras av ett citat ur Samuel Pepys dagbok. Pepy var verksam under senare delen av 1600-talet. Han var god vän med Isaac Newton, ledamot av den vetenskapsakademin och en av förgrundsfigurerna vid uppbyggnaden av den brittiska flottan. Han skriver

> Juli 1662
> Den 4de. Snart kommer Mr Cooper som är styrman på Royal Charles och som jag ämnar lära mig matematik av . . . (det första jag griper mig an med är multiplikationstabellen)
> Den 9de. Upp klockan fyra och läste flitigt på min multiplikationstabell, som är det svåraste jag stött på i aritmetiken.
> Den 11te. Upp klockan fyra och flitigt studium av multiplikationstabellen som jag nu nästan behärskar.

Den första svenska räkneläran är från 1614 och är skriven av Aegidius Aurelius och har den imponerande titeln *Arithmetica Eller Een Kort och Eenfaldigh Räknebook uthi heele och brutne tal med lustige och sköne Exempel the Eenfaldigom som till thenne Konst lust och behagh hafve kortheligen och eenfaldigen till Nytto och Gagn*. Sedan dess har många räkneläror sett dagens ljus både i Sverige och i andra länder. De algoritmer och uppställningar som förmedlats har varierat över tid och mellan länder. För division finns t.ex. ett stort antal uppställningar. Efter det att miniräknaren har blivit allmän egendom har algoritmernas ställning kommit att diskuteras och några menar att de nu är obsoleta. Är det verkligen nödvändigt att lära ut uppställningar för addition, subtraktion, multiplikation och division? Måste man kunna multiplikationstabellen? Den senare frågan svarar nog alla tveklöst ja på. Multiplikationstabellen är nödvändig för överslagsberäkningar. Men hur är det med uppställningarna? Naturligtvis känns de för de flesta inte lika oundgängliga som förut men de har använts under århundraden och är praktiska. De ger också en känsla för hur decimalsystemet fungerar.

En metod att beräkna kvadratrötter

De fyra räknesätten är grundläggande och det är med hjälp av dem man vill beräkna andra matematiska storheter. Olika tekniker har utvecklats beroende på vad som skall beräknas, vilken noggrannhet som krävs och vilka krav på snabbhet som ställs. Redan under 2000-talet före Kristus kunde man i det gamla Babylonien beräkna kvadratrötter med mycket stor noggrannhet. På gamla lertavlor finns beräkningar av $\sqrt{2}$ med ett fel som är mindre är 10^{-6}. Det måste ha funnits någon metod bakom beräkningarna. En tänkbar möjlighet följande: Vi söker ett tal x sådant att $x^2 = 2$ vilket kan skrivas

$$x = \frac{2}{x}.$$

Vi prövar och startar t.ex. med $x = 1$ Det ger att vänsterledet är lika med 1 och högerledet 2. Uppenbarligen är $x = 1$ inte vår lösning. Försök med det tal som ligger mitt emellan 1 och 2 dvs 1.5. Då är vänsterledet 1.5 och högerledet $2/1.5 = 4/3$. Inte heller $x = 1.5$ är en lösning men skillnaden mellan de båda leden har minskat från $2-1 = 1$ till $3/2-4/3 \approx 0.16667$. Det verkar lovande. Vi fortsätter och låter x vara medelvärdet mellan $3/2$ och $4/3$ dvs $17/12$. Då är vänsterledet $17/12$ och högerledet $24/17$. Skillnaden är nu ungefär 0.00490. Vi fortsätter på detta sätt och vid nästa försök är skillnaden mindre än 10^{-6}. Med moderna beteckningar har vi beräknat $\sqrt{2}$ med hjälp av en algoritm av följande utseende:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{2}{x_n}).$$

Här betyder x_n approximationen efter n upprepningar och vi startar med $x_0 = 1$. Denna relativt naturliga algoritm för att beräkna $\sqrt{2}$ är den i viss mening effektivaste metoden att approximera lösningen till ekvationen $x = 2/x$ nämligen Newton-Raphsons metod.

Logaritmerna

När mätningarna kunde göras mer exakta och data blev allt fler, kom räknearbetet att bli mycket omfattande och särskilda ”räkneslavar” fick anställas för att det skulle vara möjligt att utföra räkningarna på rimlig tid. Att multiplicera eller dividera två femsiffriga tal för hand är tidsödande även med bra algoritmer. Under slutet av 1500-talet och början av 1600-talet introducerade en skotsk präst och matematiker John Napier en metod som förenklade räknearbetet väsentligt. Tidsödande multiplikationer och divisioner kunde ersättas med additioner respektive subtraktioner som är betydlig enklare. Idén var att göra en tabell som till varje tal ordnar ett annat tal, som kallas det ursprungliga talets logaritm. Tabellen utformas så att logaritmen för en produkt av två tal är summan av talens logaritmer. Om vi vill multiplicera två tal x och y så slår vi i tabellen upp deras logaritmer som vi adderar. Vi går sedan ”baklänges” i tabellen och söker upp det tal $x \cdot y$ som har denna summa som logaritm. På motsvarande sätt kan vi utföra en division men då ersätts addition med subtraktion.

Idag betecknar vi logaritmen för ett tal x med $\lg x$ och vi har alltså följande räknelagar

$$\lg xy = \lg x + \lg y \text{ och } \lg \frac{x}{y} = \lg x - \lg y.$$

Logaritmer och potenser är två sidor av samma mynt. Likheten $y = \lg x$ är nämligen ekvivalent med likheten $x = 10^y$ eller annorlunda uttryckt: $\lg x$ är det tal 10 skall upphöjas till för att vi skall få x. Om vi använder en annan bas istället för 10 kan vi få andra logaritmer. Vi säger att ${}^a\log x$ är det tal a skall upphöjas till för att vi skall få x d.v.s. $y = {}^a\log x$ är ekvivalent med $x = a^y$. I Napiers ursprungliga logaritmtabell använde han sig inte av basen 10. Den engelske matematikern Henry Briggs modifierade senare i samråd med Napier tabellerna genom att istället använda samma bas för logaritmerna som för vårt positionssystem. Därmed kunde tabellerna förenklas.

Logaritmerna revolutionerade beräkningsarbetet. En av 1700-talets största matematiker Pierre Simon de Laplace lär ha sagt att de fördubblade astronomens liv. Idag utförs inte längre numeriska beräkningar med hjälp av logaritmtabeller men logaritmerna är ändå viktiga inom matematiken och dess tillämpningar. Exponentialfunktionen $y = a^x$ är oundgänglig och därmed får också logaritmfunktionen stor betydelse.

Mekaniska hjälpmedel

För att underlätta beräkningsarbetet har sedan tusentals år olika hjälpmedel använts. Olika former av abakusar ofta i form av en sorts kulramar användes tidigt. De konkurrerade länge med algoritmerna och ännu under sent 1900-tal användes de t.ex. i affärer i Ryssland. Men algoritmerna hade fördelar. Det var bl.a. på ett helt annat sätt möjligt att kontrollera räkningarna.

Räkningen med logaritmer kan också mekaniseras med hjälp av en räknesticka. Den består av en rörlig del och en fast del som båda är graderade med en logaritmisk skala.

Det fanns emellertid en dröm att konstruera en maskin som mekaniskt kunde utföra långa och tröttsamma beräkningsarbeteten. De båda 1600-talsmatematikerna Blaise Pascal och Gotttfried Wilhelm Leibniz hade avancerade tankar kring en sådan konstruktion. Räknemaskinernas utveckling var starkt beroende av den tekniska utvecklingen och är värd en egen historia. Bakom konstruktionerna måste emellertid alltid finnas väldefinierade algoritmer som talar om hur maskinerna skall arbeta. Det kan nämnas att Sverige genom bl.a. företag som Facit spelat en stor roll för att utveckla räknemaskiner tekniskt och kommersiellt. Deras maskiner byggde på analog teknik och när man övergick till digital teknik försvann de ur marknaden.

De första datorerna

En ny och annorlunda utveckling av tankarna kring beräkningsmaskiner inleddes med Charles Babbage i början av 1800-talet. De logaritmtabeller som användes och som var nödvändiga för den tidens mer avancerade beräkningsarbete hade felaktigheter och det försämrade naturligtvis exaktheten i beräkningarna. Babbage ville konstruera en maskin som beräknade och tryckte logaritmtabeller rent mekaniskt utan mänsklig inblandning. Han presenterade en modell en s.k. differensmaskin. Trots generösa bidrag kunde han inte konstruera en maskin, som fungerade som han önskade. De tekniska problemen kunde inte övervinnas. Maskinen lyckades emellertid göra beräkningar av mycket begränsad omfattning. Han gjorde ett nytt försök och skisserade en maskin, den analytiska maskinen, som skulle kunna utföra godtyckliga beräkningar. Den var delvis inspirerad av Jacquards vävstolskonstruktion och innehöll precis som en dator inmatningsenhet, beräkningsenhet, styrenhet, utmatningsenhet samt ett minne där mellanresultat kunde lagras. I konstruktionsarbetet fick han hjälp av Ada Lovelace, som var dotter till den berömde poeten Lord Byron, och hon skrev program till den nya maskinen i ett språk som ligger mycket nära det som idag kallas assembler. Ada Lovelace kan därmed kallas världens första programmerare. Hon har fått programmeringsspråket Ada uppkallat efter sig. Men den analytiska maskinen kunde inte fås att fungera i verkligheten. Den blev bara en papperskonstruktion. Men idén om en mer komplicerad räknemaskin, en datamaskin, var född. Men det skulle ta ytterligare drygt hundra år innan en fungerande dator kunde konstrueras.

Den första fungerande datorn anses ofta något felaktigt vara ENIAC som är en förkortning för *Electronic Numerical Integrator And Calculator*. Den började konstrueras i USA under andra världskriget och var avsedd för militära ändamål som väderleksförutsägelser och beräkning av projektilbanor. Den började användas 1946. Men redan 1941 hade tysken Konrad Zuse konstruerat en dator som kallades Z3. Den användes bl.a. till beräkna vibrationer i vingarna hos flygplan. Z3 förstördes under de allierades bombning av Tyskland. Under kriget bildades vid Bletchley park strax utanför London ett centrum för forcering av krypto. Särskilt angeläget var det att knäcka koden till den tyska krypteringsmaskinen Enigma. För det ändamålet konstruerades en dator som fick namnet Colossus. Den färdigställdes 1943. På order av Winston Churchill förstördes den efter krigsslutet.

Datorer och matematik

De första datorerna använde sig av elektronrör. De var utrymmeskrävande och driftsäkerheten var inte särskilt hög. Sedan dess har mycket hänt. Istället för elektronrör användes transistorer och det innebär både ökad säkerhet, ökad snabbhet och ökad miniatyrisering. De handlar då inte om marginella förändringar utan om förbättringar med flera tiopotenser. En modern miniräknare av hygglig kvalitet har högre prestanda än de första datorerna som fyllde upp ett helt rum. Utvecklingen under de sextio åren har varit dramatisk. Förvissa är datorn viktig för numeriska beräkningar men den har fått mycket vidare användningsområden och det är svårt att tänka sig något område i samhället där datorn inte spelar en viktig roll. Ofta används de utan att vi tänker på det och de flesta använder dem utan att fundera över hur de fungerar. Det är rimligt. Men varje gång vi använder en dator - för att utföra beräkningar, för att skicka ett e-mail eller för att använda en sökmotor - så använder sig datorn av ett program som ytterst är skapat av människor och ett datorprogram är en form av algoritm som talar om för datorn vad den skall göra steg för steg. Programmen måste vara strikt logiskt uppbyggda och den formella logiken är en viktig teoretisk grundpelare vid konstruktion av datorer och datorprogram. Matematiken med formell logik är alltså en förutsättning för utvecklingen av datorer och datorprogram. Men datorerna har också betytt mycket för matematikens utveckling. Den stora räknekapacitet som datorerna erbjuder har inneburit att matematiska metoder, som tidigare endast hade teoretiskt intresse, har fått ökad betydelse.

I takt med att datorernas prestanda ökar så ökar också våra krav på dem. Alltmer komplicerade beräkningar och operationer skall göras på kort tid och det kräver att algoritmerna effektiviseras. Att finna effektiva algoritmer som både är snabba och tar liten plats i datorernas minnen har blivit en viktig del av matematiken. De ökade möjligheterna att med automatiska hjälpmedel genomföra omfattande beräkningar och nödvändigheten att skapa effektiva algoritmer och datorprogram medförde att ett nytt universitetsämne Numerisk analys såg dagens ljus under 1950-talet. Klassiska resultat inom matematiken som t.ex. Newton-Raphsons metod för ekvationslösning och Simpsons formel för beräkning av integraler blev centrala inom det nya ämnet tillsammans med nyutvecklade metoder. Programmering är central och olika programmeringspråk har utvecklats. Utveckling av mjukvara som från början var en del av numerisk analys blev så småningom ett eget ämne med namnet Datalogi. De adminstrativa tillämpningarna av datorerna blev ett stort område och gav upphov till ännu ett ämne nämligen Informatik.

Men vad är då en dator? Vad är det som skiljer den från en vanlig räknemaskin? År 1936 utvecklade den engelske matematikern och logikern Alan Turing en abstrakt maskin som kan ses som en idéskiss till en dator. Zuse lär ha använt Turings idéer vid konstruktionen av Z3 och Turing var själv drivande i konstruktionen av Colossus. Den abstrakta maskinen kallas för en Turingmaskin och olika Turingmaskiner kan konstrueras för olika typer av problem. En Turingmaskin består av en oändligt lång remsa och ett tänkt läs- och skrivhuvud som enligt givna regler kan förflytta sig längs remsan samtidigt som den läser och skriver tecken på den. På det sättet kan t.ex. fyra räknesätten operationaliseras. En grundläggande hypotes inom logiken, Church-Turings hypotes, säger att varje tänkbar beräkningsprocess kan utföras av en Turingmaskin. Ett kännetecken för en dator är att den skall fungera som en Turingmaskin.

Algoritmers komplexitet

En dator skall alltså i teorin kunna utföra de beräkningar som krävs för att lösa de problem som den är konstruerad för. Betyder det att den kan göra det i praktiken? Eller finns det beräkningsprocesser som är så omfattande att de inte kan utföras på rimlig tid hur snabb datorn än är? Det finns faktiskt problem där man hittills inte kunnat hitta algoritmer som ger den exakta lösningen på rimlig tid. Ett exempel är det s.k. handelsresandeproblemet. En handelsresande skall besöka ett givet antal städer. Varje stad skall besökas precis en gång och handelsresanden känner till avståndet mellan varje par av städer. Hur skall han planera rundresan för att göra den så kort som möjligt? Ett sätt är att låta datorn beräkna längden av varje rutt och sedan välja den minsta. Det är enkelt att skriva upp en algoritm för en sådan process. Om antalet städer är t.ex. 50 skulle det innebära att datorn skall beräkna längden av $49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ vägar. Detta tal är mycket stort, betydligt större än 10^{40}, och det innebär att även om varje väglängd kunde beräknas på 10^{-9} sekunder, vilket egentligen är orealistiskt, så skulle beräkningsarbetet ta mer än 10^{30} sekunder vilket är mer än 10^{20} år. Detta är naturligtvis orimligt ur praktisk synvinkel. Man kan fråga sig om man kan hitta en bättre metod för att lösa problemet. Man har funnit bättre metoder men ingen som ger den exakta lösningen på rimlig tid.

Det räcker alltså inte att konstruera en algoritm som löser en given typ av problem. Algoritmen måste också vara tillräckligt effektiv. En gren av den teoretiska datalogin eller om man så vill av matematiken handlar om att mäta algoritmers komplexitet och ett viktigt hjälpmedel inom den teorin är Turingmaskiner. Problem som kan lösas med hjälp av en algoritm på ”rimlig tid” sägs vara av typ P. Naturligtvis måste man i en strikt uppbyggnad av teorin kring algoritmer definiera begreppet ”rimlig tid” men vi nöjer oss med att säga att det finns en naturlig definition och att den algoritm vi skisserade för handelsresandeproblemet inte löser problemet på ”rimlig tid”. Man har som vi också nämnt inte hittat någon sådan algoritm för just detta problem. Man vet alltså inte om det är av typ P. Däremot vet man att om vi väljer en väg så kan vi på rimlig tid avgöra om den är den kortaste. Ett problem där man på detta sätt kan testa en gissad lösning på ”rimlig tid” säges vara av typ NP[1] Handelsresandeproblemet är alltså av typ NP. En naturlig fråga är följande: Hur ser ett problem ut som är av typ NP men bevisligen inte är av typ P? Eller finns det inga sådana? Det skulle i så fall betyda att varje problem av typ NP också är av typ P. Denna fråga är öppen. Ingen har vare sig kunna visa vare sig att P- och NP-problemen är identiska eller att de inte är det. Men man har kunnat visa att det finns ett antal problem av typ NP, som är ”svårast” i den meningen att om något av dem är av typ P så är alla NP-problem av typ P. Handelsresandeproblemet är ett sådant problem.

Symbolisk algebra

Hittills har vi diskuterat räkning med tal. Genom att mekanisera räknandet kan tankekraft sparas och koncentrationen kan lyftas från detaljarbete till andra problem av mer övergripande natur. Men också andra delar av problemlösning kan mekaniseras. Vi kan införa symboler för okända tal och formulera problemen som ekvationer som sedan i sin tur kan lösas enligt givna mallar. Vi kan införa symboler för tal som kan variera och därmed formulera generella samband kort och koncist samtidigt som vi genom att räkna med symbolerna kan härleda nya samband.

Ekvationslösning

I många sammanhang söker man tal som uppfyller vissa villkor. Frågeställningen kan vara mycket enkel: Anna och Per har tillsammans 75 kronor. Anna har 15 kronor mer än Per. Hur stort belopp har Anna respektive Per? Man kan lösa problemet genom att pröva sig fram och finner förmodligen rätt snart att Anna måste ha 45 kronor och Per 30 kronor. Men om vi förändrar beloppen en aning och antar att de istället har 723 kronor tillsammans och att Anna har 37 kronor mer än Per blir förmodligen prövningsprocessen besvärligare och omständligare. En mer systematisk metod hade varit önskvärd. Ett mer generellt resonemang är följande: Om summan skulle delas lika får var och en 361.50 kronor

[1]Beteckning P syftar på ”Polynomial growth” vilket innebär att beräkningstiden får växa högst polynomiellt med storleken på input. Bokstaven N i NP är förkortning av ”Nondeterministic” - vi gissar en lösning och kontrollerar om den stämmer. Vi ger alltså inte en regel för hur man kommer fram till den rätta lösningen.

var. Om vi till halva summan lägger till lika mycket som vi drar ifrån blir totalsumman oförändrad. För att skillnaden mellan de båda delarna skall bli 37 kronor bör vi därför till 361.50 lägga till och dra ifrån lägga till halva skillnaden mellan de båda delarna d.v.s. 18.50 kronor. Anna skall alltså ha 380 kronor och Per 343 kronor. Detta resonemang går att genomföra för att lösa alla problem då man känner summan och skillnaden mellan två tal och vill veta vilka talen är. Men varierar vi problemställningen en aning och t.ex. antar att vi har tre personer som skall dela på en summa t.ex. 100 kronor och en av dem skall ha 10 kronor mer än de båda andra måste vi hitta en ny metod.

I skolan lär vi oss hur vi skall kunna hantera denna typ av problem. Vi inför en symbol för det tal vi skall bestämma. I det sistnämnda problemet antar vi att den förstnämnda personen skall ha x kronor. De båda övriga skall då ha $(x - 10)$ kronor vardera. Eftersom de tillsammans skall ha 100 kronor måste

$$x + (x - 10) + (x - 10) = 100.$$

Ur denna likhet eller ekvation kan vi genom en rad manipulationer, som efter litet övning blir rutinmässiga, bestämma x. Vi börjar med att skriva om högerledet och tar bort parenteserna. Därefter konstaterar vi att $x + x + x = 3x$ och ekvationen kan skrivas

$$3x - 10 - 10 = 100$$

eller

$$3x - 20 = 100.$$

Målet är bestämma x och vi adderar därför 20 till båda leden så att vi får bara en x-term till vänster om likhetstecknet. Om vi adderar samma tal till båda leden i en likhet så bibehålls likheten. Detta konstaterande uttrycks explicit i Euklides *Elementa* för över två tusen år sedan i följande axiom

> Om lika stora adderas till lika stora så är summorna lika stora.

Ekvationen kan nu skrivas

$$3x = 120$$

och vi bestämmer vår obekanta x genom att dividera båda leden med 3. Vi utnyttjar den självklara regeln: Om vi dividerar två lika stora tal med ett och samma tal, som inte är lika med 0, blir kvoterna lika stora. Vi har alltså

$$x = \frac{120}{3} = 40.$$

De tre personerna skall alltså ha 40, 30 respektive 30 kronor.

Genom att införa en lämplig obekant och formulera villkoren med hjälp av en ekvation kan vi sedan genom relativt mekaniska manipulationer skriva om ekvationen och i gynnsamma fall som i exemplet kan man direkt bestämma x. Förutom att metoden är generell har den en annan fördel. Den ger oss samtliga lösningar till problemet. I de båda första exemplen hittade vi lösningar genom att pröva oss fram eller genom en konstruktion. Men är vi säkra på att det inte finns fler lösningar? Metoderna ger inga svar på den frågan. Men när vi löser vår ekvation vet vi att om den obekanta x uppfyller likheten så måste x vara lika med 40. Vi utgår från ekvationen och räknar oss fram till att $x = 40$. Egentligen måste vi också visa att detta x löser vårt problem vilket det uppenbarligen gör.

Den metod som innebär att man med hjälp av de fyra räknesätten kan reducera en ekvation till en enklare form finns beskriven i Al Khwarizmis *Al-kitab al-mukhtasar fi hisab al-jabr w-al-muqabala*. Verket brukar räknas som den första läroboken i algebra och ordet ”algebra” kommer från titelns ”al-jabr” som kan översättas med ”återställande” och som syftar på överflyttning av negativa termer från en sida av likhetstecknet till den andra sidan. Hela titeln kan översättas med *Den kortfattade boken om återställande och jämförande.*

I vårt exempel kunde vi genom att använda de fyra räknesätten skriva om ekvationen så att vi direkt kunde bestämma x. Problemen behöver emellertid inte vara alltför komplicerade för att ekvationen efter reduceringarna skall vara av andra graden vilket innebär att den efter förenkling kan skrivas

$$x^2 + px + q = 0$$

där p och q är kända konstanter. Al-Khwarizmi visar också hur sådana problem kan lösas. Han ger en metod som i modernt matematiskt språk motsvarar det som i gymnasieböcker i matematik brukar kallas pq-regeln. Ekvationen har de två lösningarna

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}.$$

Kan man på samma sätt skriva upp lösningarna till ekvationer av grad 3, 4, 5, …? Italienska matematiker visade på 1500-talet hur man med hjälp av kvadratrötter, tredjerötter och fjärderötter kunde ge formler för lösningarna av tredje- och fjärdegradsekvationerna. En allmän tredjegradsekvation

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

kan genom en enkel substitution skrivas om som en ekvation utan kvadratterm:

$$y^3 + py + q = 0.$$

En lösning kan då skrivas på följande sätt:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{(\frac{q}{2})^2 - (\frac{p}{3})^3}}.$$

Ekvationen har i själva verket tre komplexa rötter. En liknande formel kan skrivas upp för lösningarna till den allmänna fjärdegradsekvationen.

Vi har skrivit ekvationerna och lösningarna med hjälp av symboler. Talet x är den obekanta och talen a, b, c, p och q är kända tal. Men varken Al-Khwarizmi eller de italienska matematikerna använde sig av symbolisk algebra. De formulerade sin ekvationer i ord och beskrev hur man gick tillväga i speciella men typiska exempel. Det innebar att framställningen ofta blev omständlig och saknar den överskådlighet som den symboliska algebran ger. Eftersom man inte accepterade negativa tal måste man dessutom dela upp lösningarna i olika fall. Den symboliska algebran infördes av fransmannen Francois Viète först i slutet av 1500-talet och användes av Réne Descartes i han berömda *La Géometrie* från 1638. De komplexa talen kom inte att accepteras förrän under 1700-talet.

Vad händer om ekvations gradtal är fem eller större? Finns det då också en liknande metod att bestämma rötterna. Med ”liknande metod” menar vi att vi kan skriva upp lösningen genom att succesivt använda de fyra räknesätten samt rotutdragning på ekvationens koefficienter. Frågan fick sitt svar först i början av 1800-talet och svaret var negativt. Den norske matematikern Niels Henrik Abel visade att det finns femtegradsekvationer där detta inte är möjligt.

Samband mellan storheter

Användningen av symboler för en obekant storhet som vi vill bestämma kan alltså ofta underlätta problemlösning. Men räkning med symboler är också effektiv när man vill ange samband mellan olika storheter som oftast anges med tal. Låt oss ta ett exempel. Räntan på ett kapital varierar med kapitalets storlek, räntefoten och tiden på följande sätt:

$$\text{räntan} = \frac{\text{kapitalet} \cdot \text{räntefot} \cdot \text{antal dagar}}{100 \cdot 365}.$$

Det ligger nära till hands att förkorta skrivsättet genom att införa beteckningar för räntan, kapitalet, räntefoten och tiden. Vi kallar dem r

kronor, k kronor, p procent respektive d dagar och kan då skriva sambandet

$$r = \frac{k \cdot p \cdot d}{100 \cdot 365}.$$

Sambandet har fått en mer kompakt form men så mycket har knappast vunnits. Låt oss ta ett annat exempel. Från fysiken vet man att om två motstånd med resistanserna R_1 respektive R_2 ohm i en elektrisk krets parallellkopplas så motsvarar det ett motstånd med resistansen R ohm där

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}.$$

Förutom att skrivsättet blir mer överskådligt om man inför beteckningar för resistanserna än om man försöker beskriva det med ord så finns andra fördelar. Sambandet är enkelt och symmetriskt men i många fall kan det vara angeläget att istället för $1/R$ skriva upp R som ett uttryck i R_1 och R_2. Vi får då

$$R = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}.$$

Vänsterledet kan vi nu förenkla genom att multiplicera täljare och nämnare $R_1 \cdot R_2$:

$$R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 \cdot R_2(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2})} = \frac{R_1 R_2}{R_2 + R_1}.$$

Bokstäverna är symboler för godtyckliga tal och man kan alltså använda de räkneregler som gäller för tal: teckenregler, regler för hur man multiplicerar in i parenteser, regler för hur man adderar, subtraherar. multiplicerar och dividerar bråk m.m. Det krävs en del träning för att vänja sig vid att räkna med symboler men efter en tid kan räkningarna göras mer eller mindre automatiskt och tankarna kan koncentreras på mer fundamentala frågor, som hur man kan tolka de aktuella sambanden eller vad som händer men en storhet när en annan varierar.

Den som räknas som den symboliska algebrans skapare är, som vi tidigare nämnt, Francoise Viète med verket *In artem analycitem isagoge* från 1591. En översättning av titeln kan vara *Konsten att analysera likheter*. I *La Géométrie* från 1638 utvecklar René Déscartes den analytiska geometri. Geometriska objekt kan beskrivas algebraiskt som likheter mellan koordinater och därmed kan geometriska problem formuleras algebraiskt. Listiga knep och långa geometriska resonemang kan ersättas med ofta rutinmässiga räkningar. Skönheten i ett geometriskt resonemang kan visserligen ibland gå förlorad men de algebraiska verktygen är mycket effektiva och ger oftast resultat även om det kan krävas ett visst arbete. Genom algebran kan också geometriska härledningar bli mer överskådliga.

Den abstrakta algebran

År 1854 gav den engelske matematikern George Boole ut verket *Investigations on the theory of Thought, on Which are founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities.* Boole närmade sig logiken på ett nytt sätt och visade hur den s.k. satslogiken kan reduceras till algebra. Han införde beteckningar för logiska uttryck och definierade operationer på dem som ”och”, ”eller” och ”icke”. Operationerna uppfyller vissa grundläggande lagar och med hjälp av dem kan sammansatta logiska uttryck förenklas och uttryckens sanningsvärden bestämmas genom algebraiska manipulationer. Den samtida engelske matematikern Augustus de Morgan var mycket positiv till Booles arbete och skrev

> Boole's system of logic is but one of many proofs of genius and patience combined. ... That the symbolic processes of algebra, invented as tools of numerical calculation, should be competent to express every act of thought, and to furnish the grammar and dictionary of an all-containing system of logic, would not have been believed until it was proved.

Den booleska algebran blev ett viktigt verktyg vid konstruktioner av datorer. Det är slående att Babbage var samtida med Boole och de Morgan. Babbages medarbetare Ada Lovelace hade i sitt programmeringsarbete brev kontakt med de Morgan.

I arbetet med att förstå hur lösningarna till algebraiska ekvationer kan konstrueras började man studera symmetrier hos rötterna och i förlängningen hur rötterna kan avbildas på varandra genom transformationer. Banbrytande arbeten gjordes på 1820-talet av den unge franske matematikern Evariste Galois, som införde beteckningar för transformationerna och införde en sammansättning eller en sorts ”multiplikation” av dem. Galois dog endast 21 år gammal i en duell. Hans efterlämnade arbeten var svårlästa och de publicerades först 1846 fjorton efter hans död. Tekniken att studera transformationer och sammansättningar mellan dem blev starten för gruppteorin. I ett berömt arbete från 1872 använde den tyske matematikern Felix Klein gruppbegreppet för att karakterisera olika geometrier. Gruppteorin har gett matematikerna ett redskap för att räkna med symmetrier.

Den booleska algebran och gruppteorin är bara två exempel på abstrakta bildningar med operationer som uppfyller givna räknelagar. Många andra sådana begrepp har bildats framför allt under 1900-talet. Exempel är ringar, kroppar, linjära rum och moduler.

Några avslutande kommentarer

Matematik är inte detsamma som räkning. Men räkning är en viktig del av matematiken. Tillämpningarna kräver oftast beräkningar och en uppgift för matematiker är att skapa effektiva algoritmer som på snabbast möjliga tid ger efterfrågade resultat med den noggrannhet som krävs

Matematikern använder sig också av räknescheman för att koncentrera tankearbetet till andra delar av problemlösandet. Räknandet kan ofta ske automatiskt och det skapar ofta också en större överblick över resonemang som annars kan bli komplicerade. I många sammanhang är det ett mål att beskriva de matematiska teorierna och strukturerna så att de kan tillämpas med hjälp av någon form av räkningar.

Matematiken är en rik vetenskap och begreppet räkning är ett alltför enkelt begrepp för att karakterisera den. Men matematik och räkning är sammanflätade. Räkning är både ett medel och ett mål för stora delar av ämnet.